Решения на задачите от Националния кръг на Националното състезание – тест

26 април 2009 г.

1.	А	**11.**	В	**21.**	В	**31.**	Б	**41.**	В
2.	Б	**12.**	33	**22.**	А	**32.**	3	**42.**	Г
3.	В	**13.**	В	**23.**	Г	**33.**	Б	**43.**	12
4.	Г	**14.**	А	**24.**	А	**34.**	В	**44.**	Б
5.	Б	**15.**	Б	**25.**	Б	**35.**	Г	**45.**	В
6.	54	**16.**	3	**26.**	А	**36.**	В	**46.**	В
7.	Б	**17.**	В	**27.**	1	**37.**	Г	**47.**	А
8.	Б	**18.**	45	**28.**	А	**38.**	76	**48.**	В
9.	Б	**19.**	В	**29.**	В	**39.**	В	**49.**	Б
10.	А	**20.**	Г	**30.**	А	**40.**	211	**50.**	35

1. Отговор А). $\frac{3^4\left(-8\right)^2}{2^3 3^5}=\frac{3^4 2^6}{2^3 3^5}=\frac{2^3}{3}=\frac{8}{3}$.

2. Отговор Б).
$\left(3a-2\right)\left(2+3a\right)-\left(a-3\right)\left(9a+4\right)=9a^2-4-9a^2-4a+27a+12=23a+8$.

3. Отговор В). $8a^3-b^3=\left(2a\right)^3-b^3=\left(2a-b\right)\left(4a^2+2ab+b^2\right)$.

4. Отговор Г). $x=-\frac{2}{7}x \Leftrightarrow x+\frac{2}{7}x=0 \Leftrightarrow \left(1+\frac{2}{7}\right)x=0 \Leftrightarrow x=0$.

5. Отговор Б). $12-4x>0 \Leftrightarrow -4x>-12 \Leftrightarrow x<3$.

6. Отговор 54. Затъмнената фигура е съставена от 12 половинки на единични квадратчета, т.е. от 6 квадратчета и следователно лицето й е равно на $6.3.3=54$ кв. см.

7. Отговор Б). Времето в единия случай е $\frac{1}{40}$ от часа, а в другия е $\frac{1}{90}$ от часа. Разликата е $\frac{5}{360}$ от часа. Тъй като в 1 час има 3600 секунди, тази разлика е равна на 50 секунди.

8. Отговор Б). 3 ча̀са 30 минути са равни на 210 минути, които се делят на 7.
Не е възможно **А)**, защото 2 ча̀са 30 минути са равни на 150 минути, които не се делят на 7. От това, че 5 не се дели на 7, 24 не се дели на 7 и 60 не се дели на 7 следва, че 5 денонощия не могат да се измерят с този часовник. Следователно **В)** също не е възможно. Не е възможно и **Г)**, защото 14 ча̀са се делят на 7, но 5 минути не се делят на 7.

9. Отговор Б). Числата $x_1 = 664\frac{1}{3}$ и $x_2 = -675$ са решенията на уравнението и само второто от тях е цяло число.

10. Отговор А). Нека $x = 20092009$ и $y = 20082008$. Тогава
$20092009.20082009 - 20082008.20092008 = x(y+1) - y(x-1) = x + y = 40174017$.

11. Отговор В). Ще използваме стандартните означения α, β и γ за ъглите на ΔABC. Имаме $\angle ATB = 180^0 - \left(\frac{\alpha}{2} + \beta + 90^0 - \frac{\beta}{2}\right) = 90^0 - \frac{\alpha+\beta}{2} = \frac{\gamma}{2}$. Следователно мярката на $\angle ATB$ е 50% от мярката на $\angle ACB$.

12. Отговор 33. Вторите твърдения на Андрей и Веско си противоречат, откъдето следва, че те не са двамата с по две верни твърдения. Аналогично Бисер и Веско не са двамата с по две верни твърдения, защото и техните втори твърдения си противоречат. Единствената възможност е твърденията на Андрей и Бисер да са верни. Заключаваме, че отговорът на втората задача е 14. Освен това от първите твърдения на Андрей и Бисер следва, че отговорът на първата задача е 19. Окончателно $19 + 14 = 33$.

13. Отговор В). Триъгълниците BAD и DBC са еднакви по I признак, откъдето $BD = DC$, т.е. $AB = DC$ и следователно четириъгълникът $ABCD$ е успоредник. Тъй като диагоналът AC е ъглополовяща на $\angle BAD$, то $ABCD$ е ромб. Заключаваме, че ΔABD е равностранен и тогава $\angle ABC = 60^0 + 60^0 = 120^0$.

14. Отговор А). Сокът съдържа 80 части вода и 20 части плод. Като се премахнат 75% от водата, остават 25%, т.е. $0,25.80 = 20$ части вода. Следователно в концентрирания сок има 20 части вода и 20 части плод. , т.е. 50% вода.

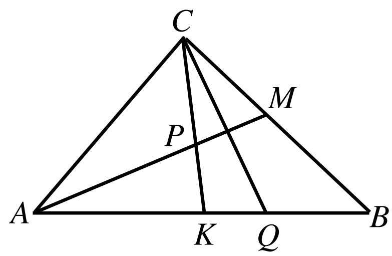
15. Отговор Б). Ако x е времето в часове за изпълнение на поръчката, от уравнението $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 1$ имаме $\frac{x}{5} + \frac{x}{7} = 1 \Leftrightarrow \frac{12x}{35} = 1$. Следователно $x = \frac{35}{12}$ ч. или $x = 2\frac{11}{12}$ ч., т.е. x = 2 ч. 55 мин.

16. Отговор 3. Имаме $8xy = (2x+y)^2 = 4x^2 + 4xy + y^2$, откъдето $4x^2 - 4xy + y^2 = 0$, т.е. $(2x-y)^2 = 0$. Заключаваме, че $2x - y = 0$ и следователно $2x - y + 3 = 3$.

17. **Отговор В).** Ако всички участници са излъгали, то твърдението например на класирания на второ място е вярно. Следователно класираният на второ място казва истината и това е противоречие. Получаваме, че поне един от участниците не е излъгал. Ако броят на тези, които не са излъгали, е повече от 1, то този брой е поне 2. Да вземем двама участници, които не са излъгали. От тях да изберем този, който е финиширал по-назад. От една страна неговото твърдение е вярно, защото той не е излъгал, но от друга не е вярно, защото преди него има участник, който не е излъгал. Отново се получава противоречие, откъдето заключаваме, че точно един от участниците не е излъгал.

18. Отговор 45. Ако S е разстоянието от A до $Б$, то за 15 минути салът ще измине разстояние $\frac{S}{3}$. Следователно за моторната лодка изминаването на разстояние $\frac{1}{3}S$ по посока от A до $Б$ се дължи на скоростта на течението, а разстояние $\frac{2}{3}S$ – на скоростта на лодката в спокойна вода. Получаваме, че моторната лодка в спокойна вода ще измине разстояние $2S$ за 3 пъти по-дълго време, т.е. за 45 минути. За същото време течението ще "върне" лодката на разстояние S и затова моторната лодка ще измине разстоянието от $Б$ до A за 45 минути.

19. Отговор В).



Нека $CQ \perp AM$ ($Q \in AB$). Тогава ΔCQA е равнобедрен ($AC = AQ$), защото височината и ъглополовящата към страната CQ съвпадат. Тъй като $\angle CPM = 89^0 < 90^0$, то CQ пресича AM надясно от P (вж. чертежа), в случая в точка между P и M. Следователно Q е надясно от K (в случая между K и B), откъдето $AQ > AK$, т.е. $AC > AK$.

20. Отговор Г). За степента на едночлена имаме $1 + 2n + n = 28$, откъдето $n = 9$.

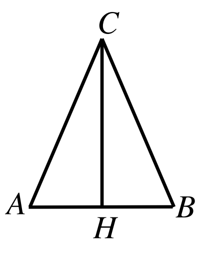
21. Отговор В). Отсечката MP е медиана в правоъгълния ΔABP и следователно $MP = 6$ см. Аналогично MQ е медиана в правоъгълния ΔABQ и следователно $MQ = 6$ см. От друга страна $\angle BMP = 180^0 - 2\angle ABC$ и $\angle AMQ = 180^0 - 2\angle BAC$. Оттук $\angle QMP = 180^0 - (\angle BMP + \angle AMQ) = 2(\angle ABC + \angle BAC) - 180^0 = 2(180^0 - \angle ACB) - 180^0 = 60^0$. След като един от ъглите в равнобедрения ΔMPQ е 60^0, този триъгълник е равностранен и следователно периметърът му е равен на $3MP = 3.6 = 18$ см.

22. Отговор А). Имаме

$$a^2x^2 - 90ax - x^2 + 8x + 2009 = a^2x^2 - 90ax + 2025 - \left(x^2 - 8x + 16\right) =$$
$$= (ax - 45)^2 - (x - 4)^2 = (ax - 45 + x - 4)(ax - 45 - x + 4) =$$
$$(ax + x - 49)(ax - x - 41)$$

23. Отговор Г). Ако момчетата са x, общият брой ученици се е променил от $2x$ на $2x+1$. Процентът на момчетата след промяната е 48%, т.е. $x = 0,48\left(2x+1\right)$, откъдето $x = 12$.

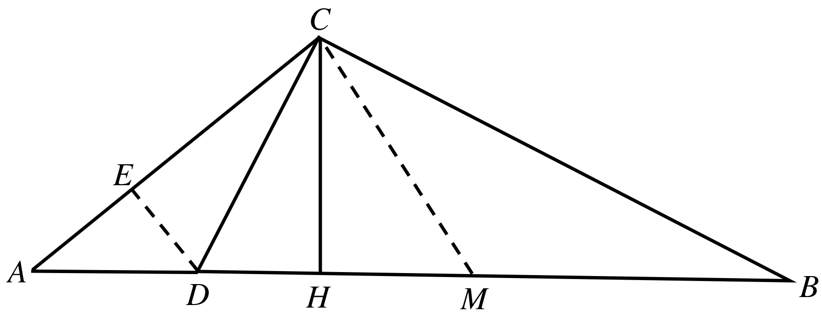
24. Отговор А).



Нека CH ($H \in AB$) е височината към основата в ΔABC. Тогава $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{12CH}{2} = 6CH = 48$, откъдето $CH = 8$ см. Тъй като $HB = \frac{1}{2}AB = 6$ см, то $CH > HB$. Заключаваме, че $\angle ABC > \angle HCB$ и понеже $\angle ABC + \angle HCB = 90^0$, следва, че $\angle HCB < 45^0$. Оттук $\angle ACB = 2\angle HCB < 90^0$, което означава, че ΔABC е остроъгълен.

25. Отговор Б). Картончето с нулата трябва да се обърне, за да се уверим, че на гърба му числото е четно. Картончето с единицата трябва да се обърне, за да не би отзад да има нула. Картончето с двойката не е необходимо да се обръща, защото каквото и да има отзад, няма да има противоречие с твърдението на Хитър Петър.

26. Отговор А).

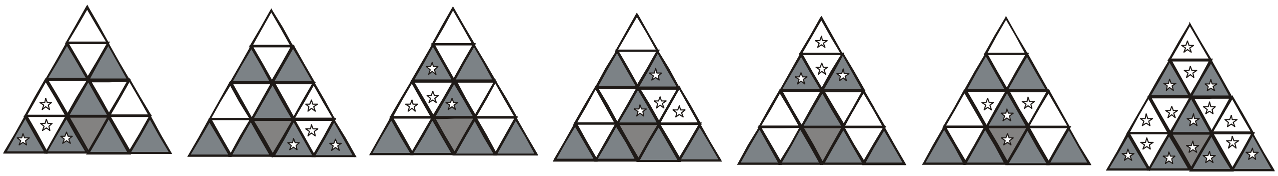


Нека $DE \perp AC$ ($E \in AC$). Тогава $\Delta DHC \cong \Delta DEC$ по II признак. Заключаваме, че $EC = CH = h$, откъдето $AE = AC - EC = h + \frac{1}{2}d - h = \frac{1}{2}d$. Сега от правоъгълния ΔADE следва, че $\angle ADE = 30^0$. По-нататък, $\angle DAE = 60^0$ и $\angle ACH = 30^0$, откъдето $AH = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2}\left(h + \frac{1}{2}d\right) = \frac{h}{2} + \frac{d}{4}$ и $DH = AH - AD = \frac{h}{2} + \frac{d}{4} - d = \frac{h}{2} - \frac{3d}{4}$. Тъй като $\angle DCB = 105^0 - \frac{1}{2}\angle ACH = 105^0 - 15^0 = 90^0$, то ΔDBC е правоъгълен с остър $\angle DBC = 15^0$. За такъв триъгълник е известно, че дължината на височината към хипотенузата е 4 пъти по-малка от дължината на хипотенузата. Ще докажем този общ факт. Нека CM ($M \in AB$) е медианата в ΔDBC към хипотенузата DB. Тогава $\angle DMC = 2\angle DBC = 30^0$ и следователно $CH = \frac{1}{2}CM = \frac{1}{4}DB$. Получаваме, че $DB = 4h$ и окончателно $HB = DB - DH = 4h - \left(\frac{h}{2} - \frac{3d}{4}\right) = \frac{7}{2}h + \frac{3}{4}d$.

27. Отговор 1. Тъй като $\frac{6n+2}{2n+3} = \frac{3(2n+3)-7}{2n+3} = 3 - \frac{7}{2n+3}$, задачата се свежда до определяне на естествените числа n, за които числото $\frac{7}{2n+3}$ е цяло. Това е изпълнено, когато числото $2n+3$ е делител на 7. Но $2n+3 > 4$ и получаваме единствената възможност $2n+3 = 7$, т.е. когато $n = 2$.

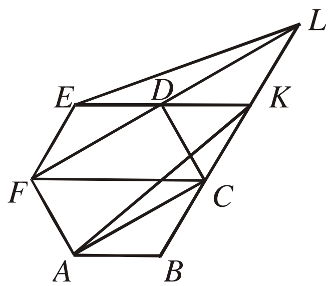
28. Отговор А). Нека x е броят на екземплярите от първия вид, а y – този от втория вид, където $x,\ y>0$ са цели числа. Тогава $8x+15y=150$, откъдето заключаваме, че x е кратно на 15. Случаят $x\geq 30$ е невъзможен, защото тогава $8x\geq 240>150$. Следователно $x=15$. От уравнението по-горе намираме $y=2$ и изразходването на сумата 150 лв. е възможно по единствен начин.

29. Отговор В). Достатъчно е да се разгледат само триъгълници с дължини на страните 2 единици и 4 единици, защото тези с дължина на страната 3 единици съдържат нечетен брой (9) триъгълничета. Има 6 триъгълника с дължини на страните 2 единици



и един с дължини на страните 4 единици, които удовлетворяват условието.

30. Отговор А).



Тъй като ΔDCK е равностранен, то $KC=DC$. Освен това $AC=FD=DL$ и $\angle EDL=\angle KCA$, откъдето $\Delta EDL\cong\Delta KCA$ и следователно $AK=EL$, т.е. твърдение **А)** е вярно. От друга страна, $\angle EDL>\angle EKL=\angle ABK$, т.е. твърдение **Б)** не е вярно. Имаме още, че $AC \parallel FL$, а FL и EL се пресичат, т.е. **В)** също не е вярно. За отхвърляне на **Г)** ще използваме, че височините към страните AB и DC съответно на триъгълниците ABK и ACD са с равни дължини. Следователно $S_{\Delta ABK}=S_{\Delta ACD}$.

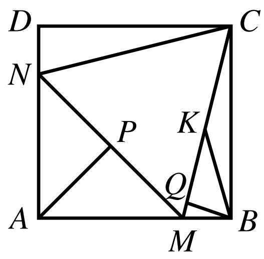
31. Отговор Б). Нека N лв. е размерът на наградния фонд. Тогава средствата за първо място са били $\frac{28}{49}N$ лв., за второ са били $\frac{12}{49}N$ лв., а за трето – съответно $\frac{9}{49}N$ лв. Оттук $\frac{28-9}{49}N=779$ и следователно $N=2009$ лв. Средствата за второ място са били $\frac{12}{49}\cdot 2009=492$ лв.

32. Отговор 3.

$(5a+3)x-3a<a(3+5x)-3 \Leftrightarrow 5ax+3x-3a<3a+5ax-3 \Leftrightarrow 3x<6a-3 \Leftrightarrow x<2a-1$.

Следователно $2a-1=5$, откъдето $2a=6$ и $a=3$.

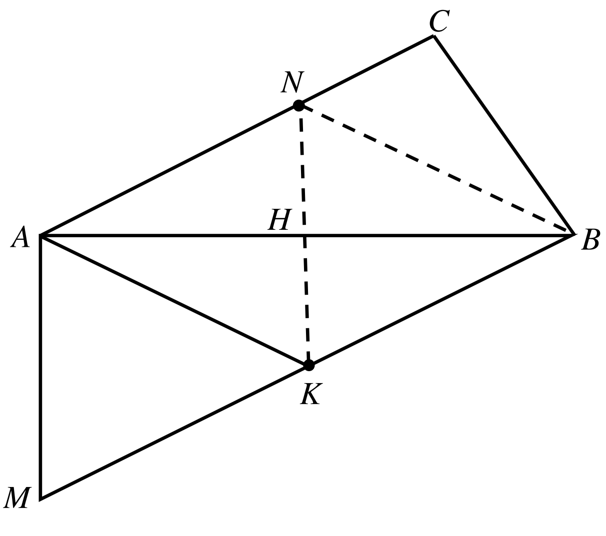
33. Отговор Б).



Триъгълниците NDC и MBC са еднакви по катет и хипотенуза. Тогава $\angle NCD = \angle MCB = \frac{1}{2}(90^0 - 60^0) = 15^0$. Освен това $DN = MB$, което ще ни трябва по-нататък. В решението на задача 26 беше използван фактът, че в правоъгълен триъгълник остър ъгъл 15^0 (в случая ΔMBC) дължината на височината към хипотенузата е 4 пъти по-малка от дължината на хипотенузата. За доказателство на този факт в конкретния случай нека K е средата на хипотенузата MC в правоъгълния ΔMBC. Тъй като ΔBCK е равнобедрен, то $\angle MKB = \angle MCB + \angle KBC = 2\angle MCB = 30^0$. От правоъгълния ΔQBK следва, че $BK = 2BQ = 4$ см (свойството на катет срещу 30^0), а оттук и от правоъгълния ΔMBC – съответно, че $MC = 2BK = 8$ см (хипотенузата е два пъти по-голяма от медианата към нея). Заключаваме, че $MN = 8$ см и от правоъгълния равнобедрен ΔAMN ($AM = AB - MB = AD - DN = AN$) получаваме, че $AP = \frac{1}{2}MN = 4$ см.

34. Отговор В). Всеки от участниците може да заеме произволно място от първо до четвърто. Възможностите за първо място са 4 (четирима участници), за второ място са 3 (вече единият е на първо място), за трето място са 2 (първите две места са определени) и за четвърто място остава 1 възможност. Следователно възможните крайни класирания са $4.3.2.1 = 24$.

35. Отговор Г).

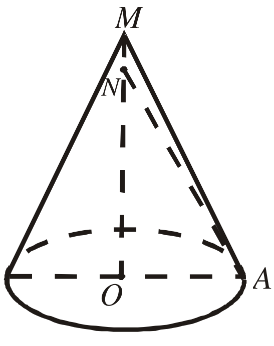


От условието следва, че ΔMBA е правоъгълен ($\angle MAB = 90^0$). Освен това $\angle MBA = 30^0$ и следователно $AM = \frac{1}{2}MB = MK = KB$. Заключаваме, че точката K лежи на симетралата на отсечката AB. Нека $NH \perp AB$ ($H \in AB$). От условията $\angle ABC = 60^0$ и $AB = 2BC$ лесно следва, че $\angle ACB = 90^0$. Тогава $\angle BAC = 30^0$ и от правоъгълния

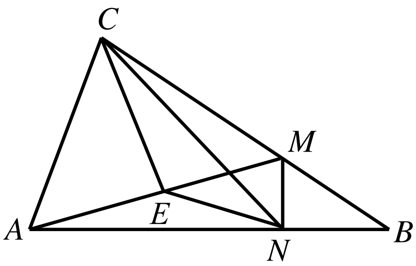
ΔAHN получаваме, че $NH = \frac{1}{2}AN = NC$. Следователно $\Delta HBN \cong \Delta CBN$ по катет и хипотенуза. Оттук $\angle HBN = \angle CBN = 30^0 = \angle BAC$ и $AN = BN$. Така, точката N лежи също на симетралата на отсечката AB. Заключаваме, че $NK \perp AB$ и **Б)** е изпълнено. Освен това $AN = AK$ (хипотенузи в еднаквите правоъгълни триъгълници AHN и AHK). Следователно $AM = AN$, т.е. **А)** също е изпълнено. Изпълнено е още $NH = HK$ (пак от еднаквостта на триъгълниците AHN и AHK), откъдето $2CN = NK$ и следователно **В)** е вярно. От посочените твърдения единствено **Г)** не е вярно, защото в противен случай четириъгълникът $KBCN$ би се оказал правоъгълник, докато $\angle BKN = 60^0$.

36. Отговор В). Нека скоростта на по-бързия камион е x км/ч. Тъй като 10 минути са равни на $\frac{1}{6}$ часа, то $23 = \frac{x}{6} + \frac{x-10}{6} = \frac{2x-10}{6} = \frac{x-5}{3}$, откъдето $x = 74$ км/ч.

37. Отговор Г). MA е хипотенуза в ΔOAM и следователно $MA > OM = 2OA$. Оттук следва, че съществува точка N върху отсечката OM така, че $AN = 2OA$ (вж.чертежа). Тъй като $\angle OAN = 60°$, то $\angle OAM > 60°$.



38. Отговор 76.



Нека E е средата на AM. Тогава CE и NE са медиани съответно в правоъгълните триъгълници AMC и AMN. Следователно $CE = \frac{1}{2}AM = NE$, т.е. ΔCNE е равнобедрен. Триъгълниците CAE и ANE са също равнобедрени. Тъй като

$$\angle CEN = \angle CEM + \angle MEN = 2\angle CAE + 2\angle EAN = 2\angle CAB,$$

то $\angle ECN = \frac{1}{2}(180^0 - 2\angle CAB) = 90^0 - \angle CAB$. Тогава

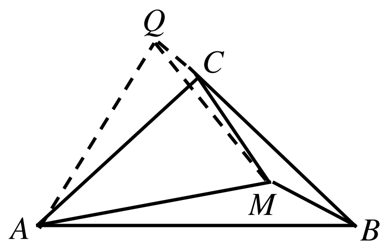
$$\angle ACN = \angle ACE + \angle ECN = (\angle CAB - 14^0) + (90^0 - \angle CAB) = 76^0.$$

39. Отговор В). Дължината на диагонала не може да е 6 см, защото диагоналът е обща страна за два триъгълника, а според неравенството на триъгълника останалите дадени числа не могат да са дължини на другите страни на тези два триъгълника (сумата само на две от останалите числа (3 и 4) е по-голяма от 6). Следователно едната страна на четириъгълника е 6 см. Другите две страни на триъгълника със страна 6 см могат да са само 3 см и 4 см. Отсечката с дължина 4 см не може да е страна на триъгълник с други две страни 1,5 см и 2 см. Получаваме, че диагоналът на четириъгълника е 3 см.

40. Отговор 211. Числата от 101 до 200 се получават, като последователно увеличаваме 100 с цяло число проценти от 1 до 100. Числата от 51 до 100 се получават, като последователно увеличаваме 50 с четно число проценти от 1 до 100. Числата от 26 до 50 се получават, като последователно увеличаваме 25 с кратно на 4 число проценти от 1 до 100. Числата от 21 до 25 се получават, като увеличаваме 20 с 5, 10, 15, 20 и 25 процента. Числата от 11 до 20 се получават, като последователно увеличаваме 10 с кратно на 10 число проценти от 1 до 100. Числата от 6 до 10 се получават, като увеличаваме 5 с кратно на 20 число проценти от 1 до 100. Числата 202, 204, 206, 208 и 210 се получават, като увеличим 200 съответно с 1, 2, 3, 4 и 5 процента. Числото 201 се получава, като увеличим 134 с 50 процента. Числото 203 се получава, като увеличим 145 с 40 процента. Числото 205 се получава, като увеличим 164 с 25 процента. Числото 207 се получава, като увеличим 180 с 15 процента. Числото 209 се получава, като увеличим 190 с 10 процента. Числото 2 се получава, като увеличим 1 със 100 процента. Числото 3 се получава, като увеличим 2 с 50 процента. Числото 4 се получава, като увеличим 2 със 100 процента. Числото 5 се получава, като увеличим 4 с 25 процента. Някои от числата от 2 до 210 включително могат да се получат по повече от един начин.

Да допуснем, че 211 може да се получи от естествено число, увеличено с цяло число проценти от 1% до 100%. Нека m е увеличено с $n\%$ (m и n са естествени числа), при което се получава 211. Тогава $m\dfrac{100+n}{100} = 211$, т.е $m(100+n) = 211.100 \Rightarrow$ 211 дели m или $100+n$ (211 е просто число). Но това е невъзможно, защото тези две числа са между 1 и 211. Да обърнем внимание (извън задачата), че кое да е просто число, по-голямо от 211, не може да се получи от естествено число чрез увеличаването му с цяло число проценти (доказателството е като за 211). Най-малкото съставно число, което не може да се получи от естествено число чрез увеличаването му с цяло число проценти с исканото свойство, е $44521 = 211.211$.

41. Отговор В).



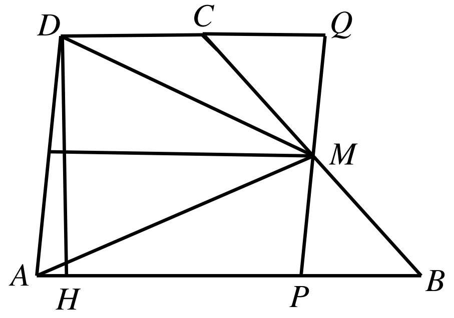
Нека Q е точка върху лъча $\overrightarrow{BC}$ така, че $BQ = BA$. Тъй като BM е ъглополовяща, то $\Delta ABM \cong \Delta QBM$, откъдето $AM = QM$ и $\angle AMB = \angle QMB = 150°$. Следователно $\angle AMQ = 360^0 - 2.150^0 = 60°$ и ΔAMQ е равностранен. Но $\angle MAC = \angle BAC - \angle BAM = 38^0 - 8^0 = 30^0$ и заключаваме, че AC е ъглополовяща на

$\angle MAQ$ в ΔAMQ. Тогава $\Delta AMC \cong \Delta QAC$, откъдето $CM = CQ$ и $\angle QMC = \angle CQM = \angle BAM = 8^0$. Окончателно

$$\angle BMC = \angle QMB - \angle QMC = 150^0 - 8^0 = 142^0 .$$

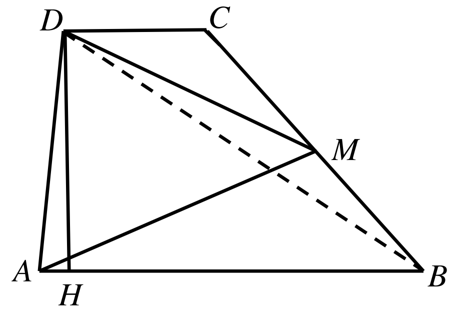
42. **Отговор Г).** Имаме $1+2+...+2009 = \frac{(1+2009).2009}{2} = 1005.2009$. Тъй като остатъкът на 1005 при деление на 100 е 5, а остатъкът на 2009 при деление на 100 е 9, то остатъкът на 1005.2009 при деление на 100 е 45. Следователно изразът от условието на задачата завършва на 45.

43. Отговор 12.



Нека правата през M, успоредна на AD, пресича правите AB и CD съответно в точките P и Q. Полученият успоредник $APQD$ има лице, равно на лицето на трапеца, защото триъгълниците PBM и QCM са еднакви по II признак. От друга страна, лицето на успоредника $APQD$ е два пъти по-голямо от лицето на ΔAMD. Това следва например, като се разгледат съответните височини от M и Q към AD. Друг начин за доказателство е с помощта на правата през M, която е успоредна на AB (вж. чертежа). Тази права разделя успоредника $APQD$ на два успоредника, а диагоналите им AM и DM разделят успоредниците на по два триъгълника с равни лица. Тогава $S_{ABCD} = 48 = \frac{(AB+CD).DH}{2}$, откъдето $AB+CD = \frac{48.2}{8} = 12$ см.

Алтернативно решение:



$S_{ABCD} = S_{ABD} + S_{DBC} = S_{ABD} + 2S_{DMC}$ (използвахме, че медианата DM в ΔDBC разделя триъгълника на два равнолицеви триъгълника). Оттук имаме $S_{ABCD} = \frac{AB.DH}{2} + 2S_{DMC}$.

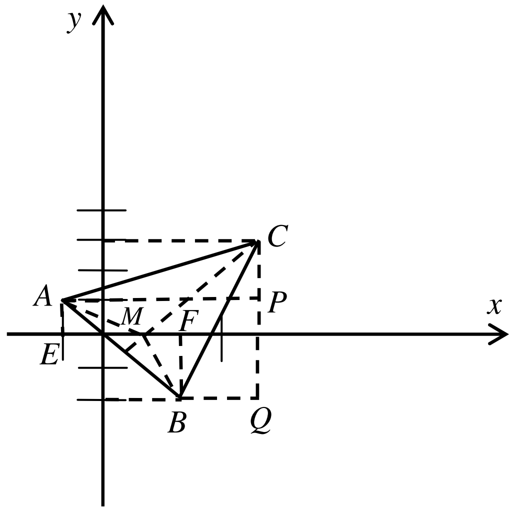
Аналогично $S_{ABCD} = S_{ACD} + S_{ABC} = S_{ACD} + 2S_{ABM} = \frac{CD.DH}{2} + 2S_{ABM}$. Като съберем получените две равенства, намираме

$$2S_{ABCD}=\frac{AB.DH}{2}+\frac{CD.DH}{2}+2(S_{DMC}+S_{ABM})=\frac{(AB+CD).DH}{2}+2(S_{ABCD}-S_{AMD})=$$

$=S_{ABCD}+2S_{ABCD}-2S_{AMD}=3S_{ABCD}-2S_{AMD}$, откъдето $S_{ABCD}=2S_{AMD}=2.24=48$ кв. см.
Следователно $\frac{(AB+CD).DH}{2}=\frac{(AB+CD).8}{2}=48$ и $AB+CD=\frac{2.48}{8}=12$ см.

44. Отговор Б). Нека числата са $x-1$, x и $x+1$. Тогава получаваме неравенството $(x-1)^2+x^2+(x+1)^2>3x(x+1)$, откъдето $x<\frac{2}{3}$. Най-голямото цяло решение на последното е $x=0$. Оттук следва, че възможно най-голямата стойност на най-малкото от трите числа е -1.

45. Отговор В). Тъй като страните AC и BC на ΔABC могат да се разглеждат като хипотенузи съответно в правоъгълните триъгълници APC и CQB с катети $AP=CQ=5$ и $CP=BQ=2$, то $AC=BC$ и следователно ΔABC е равнобедрен. Заключаваме, че височината през върха C лежи на симетралата на отсечката AB. Точката $M(1;0)$ лежи също на тази симетрала, защото $AM=BM$ (AM и BM са хипотенузи съответно в правоъгълните триъгълници AEM и MFB с катети $EM=FB=2$ и $AE=MF=1$). Така, M е пресечната точка на абсцисната ос и височината на ΔABC от върха C.

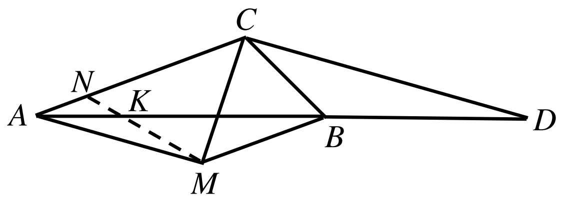


46. Отговор В). За по-голяма яснота първоначалният едновременен звън ще отчетем накрая. Тъй като $(3.60):3=60$, за тези три минути първата камбанка бие 60 пъти. Аналогично, $(3.60):5=36$ и втората камбанка бие 36 пъти за същото време. От друга страна $(3.60):15=12$ и следователно двете камбанки звънят едновременно 12 пъти (чисата 3 и 5 са взаимно прости). Затова за тези 3 минути са се чули $60+36-12=84$ звъна. Като прибавим и първоначалния звън, получаваме 85 звъна.

47. Отговор А). Ако $\angle CAB=\alpha$, то $\angle CBD=2\alpha$ и следователно $\beta=\angle CED=\angle ECD=\alpha+2\alpha=3\alpha$ (свойство на външния ъгъл). Възможно най-голямата стойност на $\angle ADE$ се получава при възможно най-малката стойност на α, т.е. при

$\alpha = 1^0$ (използваме, че мярката на α е цяло число градуси). Тогава $\angle ADE = 180^0 - \alpha - 3\alpha = 180^0 - 4^0 = 176^0$.

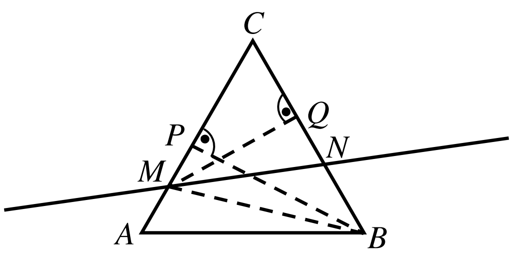
48. Отговор В).



Нека M е такава точка, че ΔMBC е равностранен (вж. чертежа). Ще докажем, че $\angle AMC = 80^0$. Ако не е така, то съществува точка $N \neq A$ върху правата AC така, че $\angle NMC = 80^0$. Нека N е между A и C (случаят, когато A е между N и C, се разглежда аналогично) и MN пресича страната AB в точката K. Тъй като $\angle NCM = 110^0 - 60^0 = 50^0$, то $\angle MNC = 50^0$ и получаваме, че ΔNMC е равнобедрен, т.е. $MN = MC = MB$. От друга страна $\angle NMB = 80^0 + 60^0 = 140^0$ и тъй като $\angle ABM = 60^0 - 40^0 = 20^0$, то $\angle MKB = 180^0 - (140^0 + 20^0) = 20^0$, т.е. ΔKMB е равнобедрен и $MK = MB$. Следователно $MK = MN$, което е невъзможно. Така $\angle AMC = 80^0$ и $\angle AMB = 140^0$. Имаме още, че $\angle CBD = 140^0$ (външен за ΔABC). Да допуснем, че триъгълниците AMB и CBD не са еднакви и за определеност нека $BD > AM$. Върху лъча $BD^{\to}$ построяваме точка D_1 така, че $BD_1 = AM$. Триъгълниците AMB и CBD_1 са еднакви по първи признак, следователно $CD_1 = AB$. От $CD_1 = CD$ следва, че ΔCDD_1 е равнобедрен, а от $\angle CD_1D > 140^0$ (външен за ΔCBD_1) следва, че ΔCDD_1 има два тъпи ъгъла. От полученото противоречие следва, че $\Delta AMB \cong \Delta CBD$. Окончателно $\angle ADC = \angle ABM = 20^0$.

49. Отговор Б). Да означим числата с $a_1, a_2, ..., a_{2009}$. Тогава $a_1 = 2$ и $a_2 = 3$. Последователно пресмятаме $a_3 = 3$, $a_4 = 2$, $a_5 = \frac{4}{3}$, $a_6 = \frac{4}{3}$, $a_7 = 2$ и $a_8 = 3$, откъдето следва, че всички числа през 6 се повтарят (това свойство се нарича периодичност, а числото 6 се нарича период). Тъй като $2009 = 224.6 + 5$, то $a_{2009} = a_5 = \frac{4}{3}$.

50. Отговор 35.



Без ограничение можем да считаме, че правата пресича страните AC и BC на триъгълника съответно в точките M и N (някоя от тези точки може да съвпада с върховете на триъгълника). Нека $AM = x.AC$ и $BN = y.BC$ (възможните стойности на x и y са в интервала $[0;1]$). Ако дължината в сантиметри на страната на ΔABC е a, то

$AM = ax$, $CM = (1-x)a$, $BN = ay$ и $CN = (1-y)a$ (пак в сантиметри). Триъгълниците MBC и ABC имат една и съща височина BP ($BP \perp AC$, $P \in AC$) и следователно $\frac{S_{MBC}}{S_{ABC}} = \frac{CM}{CA} = \frac{(1-x)a}{a} = 1-x$, откъдето $S_{MBC} = (1-x)80$. Аналогично, триъгълниците MNC и MBC имат една и съща височина MQ ($MQ \perp BC$, $Q \in BC$). Следователно $\frac{S_{MNC}}{S_{MBC}} = \frac{(1-y)a}{a} = 1-y$, откъдето $S_{MNC} = (1-y)S_{MBC} = (1-y)(1-x)80$. От друга страна, по условие правата разполовява периметъра на ΔABC, т.е. $(1-x)a + (1-y)a = \frac{3}{2}a$. Така получаваме, че $x + y = \frac{1}{2}$. Тогава

$$S_{MNC} = (1-y)(1-x)80 = (1-x-y+xy)80 = \left(\frac{1}{2} + xy\right)80 = 40 + 80xy.$$

По-нататък ще използваме неравенството $(x+y)^2 \geq 4xy$, в което равенство се достига при $x = y$. Оттук в конкретния случай имаме $xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{16}$. Следователно $S_{MNC} = 40 + 80xy \leq 40 + 80 \cdot \frac{1}{16} = 45$, т.е. $S_{MNC} \leq 45$, като равенство се достига при $x = y = \frac{1}{4}$. За другата част от ΔABC получаваме, че е по-голяма или равна на 35 кв. см. Изводът е, че най-малкото възможно лице, което може да има една от частите на триъгълника, получена при разделянето с правата, е 35 кв. см и то се реализира при права MN, успоредна на AB, за която $AM = BN = \frac{1}{4}AB$.