МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

2 септември 2009 г. – <u>Вариант 1</u>

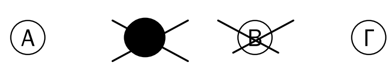
УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте със син/черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. Отбелязвайте верния отговор със знака **X** в кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и отбележете буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:



За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е отбелязана със знака X .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълнете решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. вкл. отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое от посочените числа е най-малко?

А) $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$ **Б)** $\left(\frac{4}{3}\right)^{3}$ **В)** $\left(\frac{3}{2}\right)^{-3}$ **Г)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{3}$

2. Стойността на израза $\sqrt{17^2-8^2}-\sqrt{(-2)^6}-\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^2$ **е:**

А) 25 **Б)** 21 **В)** 9 **Г)** 5

3. Ако $x \neq y$ **и** $y \neq 0$**, то изразът** $\frac{x}{y^2-xy}+\frac{1}{x-y}$ **е еквивалентен на:**

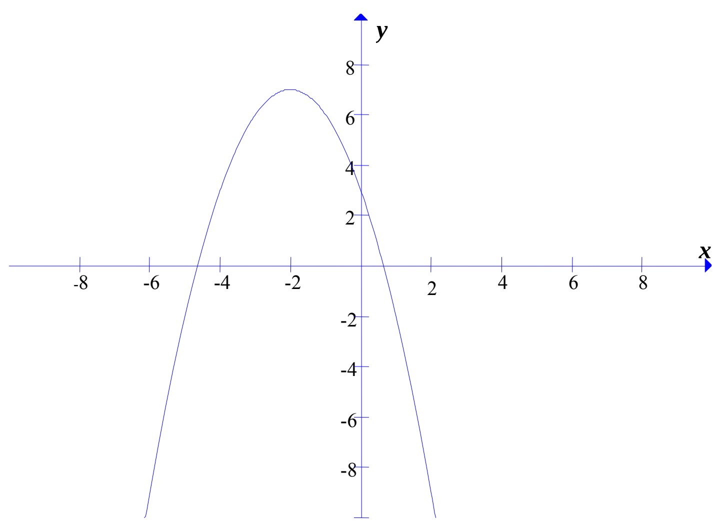
А) $\frac{x+y}{y(x-y)}$ **Б)** $\frac{x+1}{y(x-y)}$ **В)** $-\frac{1}{y}$ **Г)** $\frac{1}{y}$

4. Кое от уравненията има корени с различни знаци и положителният корен има по-голяма абсолютна стойност от отрицателния?

А) $x^2+7x+5=0$ **Б)** $-x^2+2x+3=0$ **В)** $x^2+2x-3=0$ **Г)** $-2x^2+4x-3=0$

5. Графиката на коя от посочените функции е показана на чертежа ?

А) $y=-x^2-4x+3$
Б) $y=-x^2-4x-3$
В) $y=-x^2+4x+3$
Г) $y=x^2+4x-3$



6. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt[6]{-x^4y^5}}{\sqrt[4]{x^3y}}$ **са:**

А) $x \leq 0, y \leq 0$ **Б)** $x<0, y<0$ **В)** $x \leq 0, y \geq 0$ **Г)** $x>0, y>0$

7. Стойността на израза $6^{1+\log_6 20}$ **е:**

А) 6 **Б)** 20 **В)** 120 **Г)** 26

8. Решенията на неравенството $2x^2-3x+1>0$ **са:**

А) $x\in(-\infty;0,5)\cup(1;+\infty)$ **Б)** $x\in(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$

В) $x\in(-\infty;-1)\cup\left(-\frac{1}{2};+\infty\right)$ **Г)** $x\in\left(\frac{1}{2};1\right)$

9. За функциите $f(x)=x^4-1$ **и** $g(x)=\cos^3 x+1$ **е вярно:**

А) $f(x)$ **е четна, а** $g(x)$ **- нечетна** **Б)** $f(x)$ **и** $g(x)$ **са нито четни, нито нечетни**

В) $f(x)$ **и** $g(x)$ **са нечетни** **Г)** $f(x)$ **и** $g(x)$ **са четни**

10. Стойността на израза $\cos 58^\circ \cos 28^\circ + \cos 32^\circ \cos 62^\circ$ **е:**

А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** 1 **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

11. За аритметична прогресия $a_1,a_2,...,a_9$ **е известно, че** $a_5=4$**. Сумата** S_9 **на първите** 9 **члена на прогресията е равна на:**

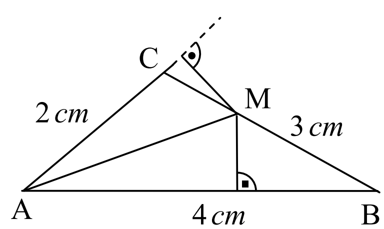
А) 72 **Б)** 36 **В)** 18 **Г)** 9

12. За статистическия ред $3,1,12,19,4,6,23,4$ **с** a **е означена модата, с** b **- медианата и с** c **- средната стойност. Кое от твърденията е вярно?**

А) $a<b<c$ **Б)** $b<a<c$ **В)** $a<c<b$ **Г)** $b<c<a$

13. Страните AB, BC **и** AC **на** ΔABC **са равни съответно на** $4\ cm$, $3\ cm$ **и** $2\ cm$. **Ако** M **е точка от страната** BC **и е на равни разстояния от** AB **и** AC, **то отсечката** CM **е равна на:**

А) 0,5 cm **Б)** 1 cm **В)** 1,5 cm **Г)** 2 cm

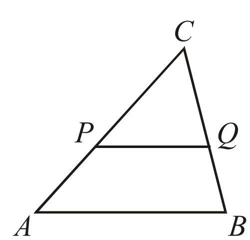


14. На чертежа $AP:PC=2:3$ **и** $CQ:CB=3:5$

Вярно е, че:

А) $S_{PQC}:S_{ABC}=3:5$ **Б)** $S_{PQC}:S_{ABQP}=3:5$

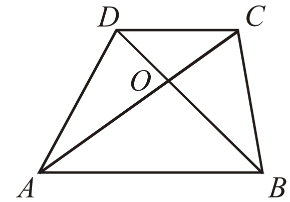
В) $S_{PQC}:S_{ABQP}=9:16$ **Г)** PQ и AB не са успоредни



15. В трапеца $ABCD$ основите са $AB = 18\ cm$, $CD = 12\ cm$ и точка O е пресечната точка на диагоналите. Ако $CO = 9\ cm$, то дължината на AC е:

А) $13{,}5\,cm$ **Б)** $11\,cm$

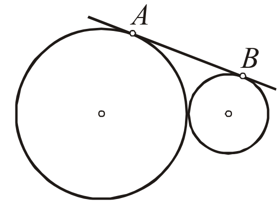
В) $12\,cm$ **Г)** $22{,}5\,cm$



16. Две окръжности с радиуси съответно $6\ cm$ и $24\ cm$ се допират външно, както е показано на чертежа. Дължината на общата им външна допирателна AB е:

А) $24\ cm$ **Б)** $2\sqrt{153}\ cm$

В) $36\ cm$ **Г)** $6\sqrt{102}\ cm$



17. За ΔABC са дадени дължините на страните $AC = 4\ cm$, $BC = 5\ cm$ и $\angle BAC = 120^\circ$. Дължината на страната AB е:

А) $3\ cm$ **Б)** $\left(\sqrt{13}+2\right)\ cm$ **В)** $\left(\sqrt{13}-2\right)\ cm$ **Г)** $\sqrt{21}\ cm$

18. В триъгълника ABC е дадено, че $AB = 1\ cm$, $BC = \sqrt{3}\ cm$ и $\angle ACB = 30^\circ$. Със сигурност мярката на $\angle BAC$ е:

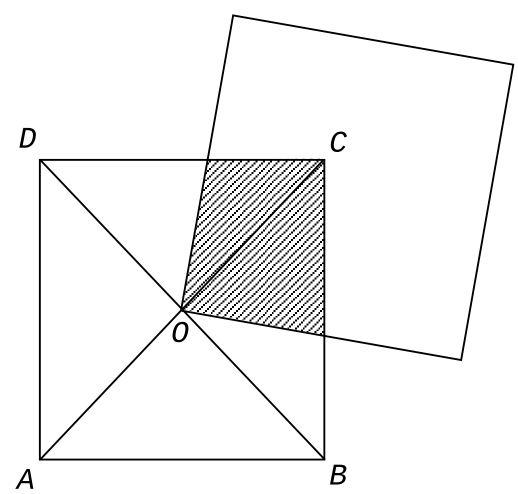
А) 60° **Б)** 60° **или** 120°

В) 120° **Г)** невъзможно да се определи

19. Центърът O на единия от два еднакви квадрата със страна a съвпада с върха на другия квадрат. Лицето на незащрихованата част от квадрата $ABCD$ е:

А) $\frac{4}{5}a^2$ **Б)** $\frac{3}{4}a^2$

В) $\frac{2}{3}a^2$ **Г)** невъзможно да се определи



20 . Даден е трапец $ABCD$ с основи $AB = 8\ cm$, $CD = 4{,}5\ cm$, диагонал $AC = 6\ cm$ и бедро $AD = 3\ cm$. Периметърът на трапеца е :

А) $19{,}5\ cm$ **Б)** $20\ cm$ **В)** $20{,}5\ cm$ **Г)** $41\ cm$

Отговорите на задачите от 21. до 25. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете най-голямото цяло число, което е решение на неравенството $\log_{\frac{1}{3}} x + 5\log_{\frac{1}{3}} x > 6\log_{\frac{1}{3}} 5$**.**

22. Намерете стойностите на x**, за които числата** $1, x^2, 6-x^2$**, взети в този ред, образуват геометрична прогресия.**

23. Ако $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ **и** $\alpha \in \left(\frac{\pi}{2};\pi\right)$**, намерете стойността на израза** $\frac{3+tg\alpha}{3-2tg\alpha}$.

24. В равнобедрен правоъгълен триъгълник с катет $6\ cm$ **е вписан правоъгълник, така че върховете му лежат на страните на триъгълника. Ако правоъгълникът има общ ъгъл с триъгълника, намерете периметъра на правоъгълника.**

25. На книжната борса предлагат два вида сборници по математика от различни автори – седем са за зрелостен изпит и три са за кандидат-студентски изпит. По колко различни начина Борис може да подбере по два сборника от всеки вид?

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. вкл. запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $(5x-4)(2x-1)+2=3\sqrt{10x^2-13x+4}$

27. За томбола с награди в един клас се продават 20 **билета, от които** 3 **печелят. Ученик си купил** 5 **билета. Каква е вероятността да печелят точно два от закупените билети?**

28. В остроъгълен $\triangle ABC$ **с лице** $54\ cm^2$ **отсечките** $AP\ (P\in BC)$ **и** $CQ\ (Q\in AB)$ **са височини. Лицето на** $\triangle BPQ$ **е** $6\ cm^2$ **и** $PQ=6\sqrt{2}\ cm$**. Намерете радиуса на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b$; при $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=1.2.3...(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\dfrac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\;2} = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a^{\;2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b^{\;2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c^{\;2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta} \qquad \mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha} \qquad \mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Учебен предмет – математика септември 2009 г.

ВАРИАНТ № 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки	Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1.	**В**	**2**	**26.**	$x_1 = 0;\ x_2 = 1,3;\ x_3 = 1;\ x_4 = 0,3$	**15**
2.	**Г**	**2**	**27.**	$P = \frac{5}{38}$	**15**
3.	**В**	**2**	**28.**	$R = 13,5\,cm$	**15**
4.	**Б**	**2**			
5.	**А**	**2**			
6.	**Б**	**2**			
7.	**В**	**2**			
8.	**А**	**2**			
9.	**Г**	**2**			
10.	**Г**	**2**			
11.	**Б**	**2**			
12.	**А**	**2**			
13.	**Б**	**2**			
14.	**В**	**2**			
15.	**Г**	**2**			
16.	**А**	**2**			
17.	**В**	**2**			
18.	**Б**	**2**			
19.	**Б**	**2**			
20.	**А**	**2**			
21.	4	**3**			
22.	$\pm\sqrt{2}$	**3**			
23.	$0,5$	**3**			
24.	$12\,cm$	**3**			
25.	63	**3**			

ВЪПРОСИ С РЕШЕНИЯ

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧА 26

1.Определяне на допустими стойности за x: $10x^2-13x+4\geq 0$, т.е. $(5x-4)(2x-1)\geq 0$, $x\in(-\infty;0,5]\cup[0,8;+\infty)$ (2 т.)

2. Полагане $\sqrt{10x^2-13x+4}=y$, $y\geq 0$ и съображение за $(5x-4)(2x-1)=y^2$ (3 т.)

3. Решаване на уравнението $y^2-3y+2=0$ и намиране на корените $y_1=2$ и $y_2=1$ (2 т.)

4. Намиране на $x_1=0; x_2=\frac{13}{10}=1,3; x_3=1; x_4=\frac{3}{10}=0,3$ (4 т.)

5. Проверка за принадлежност на корените към допустимите стойности (или пряка проверка чрез заместване) и установяване, че намерените числа са корени на уравнението (4 т.)

- Забележка: При пряка проверка за корените и установяване, че намерените числа са корени, без да са намерени допустими стойности (т1. е пропусната) се дават 6 точки.

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧА 27

1.Начини за избор на 5-те закупени билети

$C_{20}^{5}=\frac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5}=15504$ (3 т.)

2.Благоприятни изходи от печелившите билети

$C_{3}^{2}=\frac{3.2}{1.2}=3$ (3 т.)

3.Благоприятни изходи от непечелившите билети

$C_{17}^{3}=\frac{17.16.15}{1.2.3}=680$ (3 т.)

4.Брой на всички благоприятни изходи

$C_{3}^{2}.C_{17}^{3}=2040$ (3 т.)

5.Вероятност за сбъдване на събитието

$p=\frac{C_3^2.C_{17}^3}{C_{20}^5}=\frac{2040}{15504}=\frac{5}{38}$ (3 т.)

или $\quad p = \dfrac{C_3^2 . C_{17}^3}{C_{20}^5} = \dfrac{\dfrac{3.2}{1.2} . \dfrac{17.16.15}{1.2.3}}{\dfrac{20.19.18.17.16}{1.2.3.4.5}} = \dfrac{5}{38}$ **Отговор** $\dfrac{5}{38}$

КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧА 28

1. Обосноваване, че $\triangle BPQ \sim \triangle BAC$ (3 т.)

2. Получаваме $\dfrac{PQ^2}{AC^2} = \dfrac{S_{PBQ}}{S_{ABC}} = \dfrac{6}{54} = \dfrac{1}{9}$, (2 т.)

3. Намиране коефициента на подобие $\cos\beta = \dfrac{BP}{AB} = \dfrac{1}{3}$ и

на $AC = 18\sqrt{2}$. (4 т.)

4. Прилагане на синусова теорема за $\triangle ABC$: $R = \dfrac{18\sqrt{2}}{2\sin\beta}$. (3т.)

5. Изразяване на $\sin\beta = \dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ (2 т.)

6. Намиране на $R = 13,5\ cm$ (1 т.)