Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   4   К Л А С

Задача 1. Един ден Боби казал на брат си Иво: “Намислих си едно число. То е равно на $(2008:4-102).5+8$. Намери го!” Иво отговорил: “Добре, но и ти намери моето число, ако знаеш, че като го разделиш на 7 и от полученото извадиш 7 , и с полученото число пак извършиш същите две действия, ще получиш 33.”

Намерете кои числа са си намислили Иво и Боби!

Задача 2. Ангел хванал толкова риби, колкото и синът му, а Рангел хванал 3 пъти повече риби, отколкото синът му. Колко риби е хванал Рангел, ако всички хванати риби са 25?

Задача 3. Даден е правоъгълник с лице 196 *кв.см*, който може да се разреже на 4 еднакви квадрата.

а) Намерете дължините на страните на този правоъгълник.

б) Минчо се опитал да разреже дадения правоъгълник на квадрати с дължини на страните 5 *см* и 2 *см*, като искал от всеки вид квадрати да има най-малко по един представител. Възможно ли е това? Помогнете му да го направи, ако е възможно.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   5   К Л А С

Задача 1. Пресметнете $A+B$, ако
$A=12,23+24,46.0,526.\frac{1}{4}+0,526.24,46.0,75-24,46.0,25.0,526.4$ и B е най-малкото число, за което $НОК\left(40;B;140\right)=1680$.

Задача 2. Четирима приятели Георги, Ангел, Стоян и Иван имат общо 312 пощенски марки. Ангел има 2 пъти по-малко марки от Стоян и Иван, взети заедно, а Георги има 3 пъти повече от Ангел. Намерете по колко марки има всеки от приятелите, ако Стоян има 12 марки повече от Иван.

Задача 3. Двама играчи взимат последователно по една от общо 25 картички, номерирани с нечетните числа от 1 до 50. Правилата са следните: ако единият вземе картичка, номерирана с число X, другият трябва да вземе картичката с номер, равен на най-големия нечетен делител на числото $99-X$. Губи играчът, който не може да направи ход. Колко картички най-малко могат да останат, когато играта завърши?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   6   К Л А С

Задача 1. Ани си купила пола и блуза, като полата била с 20% по-скъпа от блузата. След покупката тя видяла, че сумата, която й е останала, е с 20% по-малка от цената на полата. Колко лева е похарчила Ани, ако са й останали $21,60\,лв.$?

Задача 2. Аквариум с форма на правоъгълен паралелепипед с основа $50\,см \times 30\,см$ и височина $30\,см$ съдържа вода с дълбочина $20\,см$. Плътна метална правилна четириъгълна пирамида с основен ръб $6\,см$ и височина $15\,см$ е потопена в аквариума, като е поставена на основата си. На колко сантиметра под повърхността на водата се намира върхът на пирамидата?

Задача 3. Сборът на 20 различни цели положителни числа е 2009. Каква е възможно най-голямата стойност на най-малкото число?

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успешна работа!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   7   К Л А С

Задача 1. В $8:00$ часа сутринта от град A за град B тръгнала кола със скорост $60\ км/ч$, а 40 минути по-късно след нея тръгнал автобус със скорост $90\ км/ч$. След като била изпреварена от автобуса, колата увеличила скоростта си с 25%. Когато автобусът пристигнал в B колата била на $25\ км$ от B. Да се намери:

а) разстоянието от A до B;
б) в колко часа колата е била на $5\ км$ от автобуса.

Задача 2. На диагонала AC и на страните BC и CD на квадрата $ABCD$ са избрани съответно точки O, M и N така, че $AO = OM = ON$ и $CM > CN$. Намерете мярката на $\angle MAN$.

Задача 3. Съществува ли естествено число n, за което числото $4^n + 2^n + 5$ е точен куб на естествено число?

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О   Н А   О Б Р А З О В А Н И Е Т О   И   Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Графиките на функциите $f(x)=|x-2|+a$ и $g(x)=2x+b$ се пресичат в точката A, чиято абсциса е 1. Графиките на $f(x)$ и $g(x)$ пресичат ординатната ос съответно в точките B и C. Намерете лицето на триъгълника ABC.

Задача 2. Върху окръжност са взети точките $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n>6)$ в посочения ред така, че $\overparen{A_1A_2}=\overparen{A_2A_3}=\ldots=\overparen{A_{n-1}A_n}=\overparen{A_nA_1}$.

а) Намерете n, ако е известно, че правите A_1A_4 и A_2A_{n-2} са перпендикулярни.

б) Върху правата A_1A_n е взета точката M така, че A_1 е между A_n и M и $A_1M=A_1A_4$. Докажете, че точките M, A_2 и A_{n-2} лежат на една права.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото $4^{n+1}+3\cdot 11^n$ е степен на просто число.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + xy^2 + 16 = 0 \\ 3y^3 - xy^2 + 16 = 0 \end{array} \right.$.

Задача 2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точките P и Q, а правата PQ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките K и L ($K \in \overset{\frown}{AC}$, $L \in \overset{\frown}{BC}$). Ако K е среда на $\overset{\frown}{AC}$, да се намери отношението $KL : AB$.

Задача 3. Множеството от върховете на правилен 30-ъгълник е разбито на 15 непресичащи се двойки, които определят 15 отсечки. Да се докаже, че поне две от 15-те отсечки са равни.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$\frac{x+a}{\sqrt{x^2+a^2}} > \frac{x+b}{\sqrt{x^2+b^2}},$$

където a и b са реални параметри и $a > b > 0$.

Задача 2. Права през върха C пресича диагонала BD, страната AD и продължението на страната AB на успоредника $ABCD$ съответно в точките M, E и F. Да се докаже, че AM е допирателна към описаната около триъгълника AEF окръжност тогава и само тогава, когато $ABCD$ е ромб.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, за които равенството

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{n-1}$$

е тъждество.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2+x+3} = x - a$, където a е реален параметър.

Задача 2. а) Да се докаже, че за триъгълник с ъгли α, β и γ е изпълнено равенството

$$r = 4R\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\sin\frac{\gamma}{2},$$

където r и R са съответно радиусът на вписаната и на описаната окръжност за този триъгълник.

б) Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в окръжност. Да се докаже, че произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ и $\triangle DEF$ е равно на произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ и $\triangle EFA$ тогава и само тогава, когато периметрите на $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ са равни.

Задача 3. Група от n човека, където n е четно естествено число, се разполага около маса, местата на която са във върховете на правилен n-ъгълник. Винаги ли е възможно да се направят няколко такива разположения така, че всеки двама да са седели в диаметрално противоположни места на масата точно по веднъж?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 25 април 2009 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 16\frac{4^{x-1} + 6}{2^x + 1} = 0.$$

Задача 2. В кръг с радиус 1 са разположени четири триъгълника със сума на лицата 3. Да се докаже, че два от тях имат обща вътрешна точка.

Задача 3. Да се намерят всички реални числа a, за които:

а) съществува функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(0) = a$ и $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$;

б) съществува непрекъсната функция със свойствата от а).

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

За въпроси: 0888 937 087 (Николай Николов).