Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 25 април 2009 г.

Т Е М А   З А   7   К Л А С

Задача 1. В $8:00$ часа сутринта от град A за град B тръгнала кола със скорост $60\ км/ч$, а 40 минути по-късно след нея тръгнал автобус със скорост $90\ км/ч$. След като била изпреварена от автобуса, колата увеличила скоростта си с 25%. Когато автобусът пристигнал в B колата била на $25\ км$ от B. Да се намери:

а) разстоянието от A до B;

б) в колко часа колата е била на $5\ км$ от автобуса.

Задача 2. На диагонала AC и на страните BC и CD на квадрата $ABCD$ са избрани съответно точки O, M и N така, че $AO = OM = ON$ и $CM > CN$. Намерете мярката на $\angle MAN$.

Задача 3. Съществува ли естествено число n, за което числото $4^n + 2^n + 5$ е точен куб на естествено число?

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

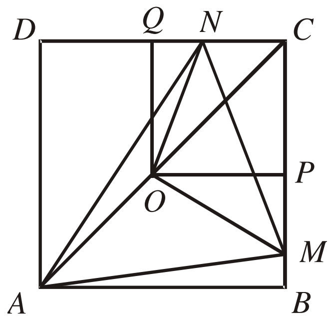
Задача 1. а) Ако t е времето (в часове) от тръгването на колата до изпреварването ѝ от автобуса, то $60t = 90\left(t - \frac{2}{3}\right)$, откъдето $2t = 3t - 2$ и $t = 2$. Така изпреварването е станало в $10:00$ часа на $2.60 = 120$ *км* от A **(1 т.)**. Оттук нататък скоростта на колата се увеличава с 15 *км/ч* и достига 75 *км/ч* **(1 т.)**. Нека x е времето (в часове) от изпреварването до пристигането на автобуса в B. Тогава $90x = 75x + 25$ и $x = \frac{5}{3}$, а изминатият от автобуса път след изпреварването е $90 \cdot \frac{5}{3} = 150$ *км*. Така разстоянието от A до B е $120 + 150 = 270$ *км* **(1 т.)**.

б) Има два случая:

Ако y е времето (в часове) преди изпреварването, когато колата е била на 5 *км* пред автобуса, то $90y - 60y = 5$, така че $y = \frac{1}{6}$ **(1 т.)**. Това е станало 10 минути преди изпреварването, т.е. в $9:50$ часа **(1 т.)**.

Ако z е времето (в часове) след изпреварването, когато колата е била на 5 *км* зад автобуса, то $90z - 75z = 5$, така че $z = \frac{1}{3}$ **(1 т.)**. Това е станало 20 минути след изпреварването, т.е. в $10:20$ часа **(1т.)**.

Задача 2. Означаваме $\angle MAN = x$, $\angle CAN = \alpha$ и $\angle CAM = \beta$. От точката O спускаме перпендикуляри OP ($P \in BC$) и OQ ($Q \in CD$) съответно към страните BC и CD на квадрата **(1 т.)**. Триъгълниците POC и QOC са еднакви и следователно $CP = CQ$ **(1 т.)**. По условие $AO = ON$ и затова $\angle NOC = 2\alpha$ като външен ъгъл за равнобедрения ΔAON **(1 т.)**. Аналогично $\angle MOC = 2\beta$, откъдето $\angle MON = 2(\alpha + \beta) = 2x$ **(1 т.)**. От друга страна триъгълниците POM и QON са еднакви **(1 т.)**. Така $PM = QN$. Тъй като $CM > CN$ и $CP = CQ$, точката P е между C и M, а точката N е между C и Q **(1 т.)**, както е показано на чертежа. От еднаквостта на триъгълниците POM и QON следва още $\angle QON = \angle POM$. Имаме



$90° = \angle QOP = \angle QON + \angle NOP = \angle POM + \angle NOP = \angle NOM = 2x$. Следователно $x = 45°$ **(1 т.)**.

Задача 3. Да предположим, че за някои естествени числа n и m е вярно равенството $4^n + 2^n + 5 = m^3$. Остатъците, които лявата страна на равенството дава по модул 7, са 0 и 4 **(1 т.)**, а остатъците, които дясната страна дава при деление на 7, са 0, 1 и 6 **(1 т.)**. Ето защо равенството $4^n + 2^n + 5 = m^3$ е възможно само когато и двете му страни се делят на 7 **(1 т.)**. Но числото $4^n + 2^n + 5$ се дели на 7 точно тогава, когато n се дели на 3 **(1 т.)**. Нека $n = 3k$, $k -$ естествено число. Тогава числото $4^n + 2^n + 5$ може да се запише във вида $4^n+2^n+5=\left(2^k\right)^6+\left(2^k\right)^3+5$. Ако означим $2^k=a$, то получаваме равенството $a^6+a^3+5=m^3$ **(1 т.)**. Но $a^6+a^3+1>\left(a^2\right)^3$ и

$$\left(a^2+1\right)^3-\left(a^6+a^3+5\right)=3a^4-a^3+3a^2-4=a^3\left(3a-1\right)+2a^2+\left(a-2\right)\left(a+2\right)>0$$

при $a\geq 2$ **(1 т.)**. Това означава, че равенството $a^6+a^3+5=m^3$ е невъзможно, защото a^6+a^3+5 се намира между кубовете на две последователни естествени числа. Следователно не съществува естествено число n, за което числото 4^n+2^n+5 е точен куб на естествено число **(1 т.)**.