# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

### Тема за 9. клас

**Задача 4.** Да се намерят стойностите на реалния параметър $a$, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+a} = x - a$$

има поне едно цяло решение.

**Задача 5.** Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център $O$ и описан около окръжност с център $I$, като $I \not\equiv O$. Правата $OI$ пресича две от страните на $ABCD$ във вътрешни точки. Да се докаже, че произведението на тези две страни не надминава произведението на другите му две страни.

**Задача 6.** Да се докаже, че системата $\left| \begin{array}{l} x^3+2x^2y+xy^2+7z^4=8 \\ x^2y+2xy^2+y^3+9z^4=8 \end{array} \right.$ няма решение в цели числа.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

*За въпроси:* 0899 804 465 (Стоян Боев).

# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

### Тема за 10. клас

**Задача 4.** Нека $f(x) = x^2 + (2a-1)x - 3$ и $g(x) = x^2 + (a-2)x - 1$, където $a$ е реален параметър. Да се намерят всички стойности на $a$, за които корените на уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ са разположени така, че между двата корена на едното има точно един корен на другото.

**Задача 5.** В триъгълник $ABC$ е известно е, че $2\sphericalangle BAC + 3\sphericalangle ABC = 180^\circ$. Да се докаже, че $4(BC + CA) \leq 5AB$.

**Задача 6.** Нека $n$ е произволно естествено число и $N = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Да се докаже, че не съществува цяло число $m$ такова, че $N + m^9 = 2008$.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

*За въпроси:* 0888-91-82-81 (Иван Тонов).

# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

### Тема за 11. клас

**Задача 4.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a$, за които уравнението
$$2^{3x} - a2^{2x+1} + (a^2+1)2^x - a = 0$$
има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

**Задача 5.** Дадена е редица от положителни числа $a_1, a_2, \ldots$, за която $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и
$$a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-2}$$
за $n \geq 3$. Да се намери $a_3$, ако
$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \cdots + \frac{1}{a_{2008}+1} + \frac{1}{a_{2009}} = 1.$$

**Задача 6.** Естествените числа $a$, $b$ и $c$ са такива, че $a^2 + ab + b^2 = c^2$ и $a$ и $b$ са взаимнопрости. Да се докаже, че числото $|a-b| + 2c$ е точен квадрат на естествено число тогава и само тогава, когато то не се дели на 3.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

*За въпроси:* 0888 919 497 (Емил Колев).

# Министерство на образованието и науката

## 58. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Втори ден, 26 април 2009 г.

### Тема за 12. клас

**Задача 4.** В $\triangle ABC$ ($AC < BC$) с лице $20\sqrt{3}$ точките $M$ и $I$ са съответно медицентър и център на вписаната окръжност. Отсечката $IM$ има дължина 1 и е успоредна на страната $AB$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

**Задача 5.** Нека $n$ е естествено число. Да се докаже, че:

а) уравнението $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i(i+x)} = 1$ има единствено неотрицателно решение $x_n$;

б) редицата с общ член $x_n$ е сходяща и да се намери нейната граница.

**Задача 6.** Да се намерят всички двойки $(a, b)$ от естествени числа такива, че $n^2 + n + 1$ дели $(an + 1)^{10} + b$ за всяко естествено число $n$.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

*За въпроси:* 0888 937 087 (Николай Николов).