Министерство на образованието и науката

58. Национална олимпиада по математика
Областен кръг, 25-26.04.2009 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

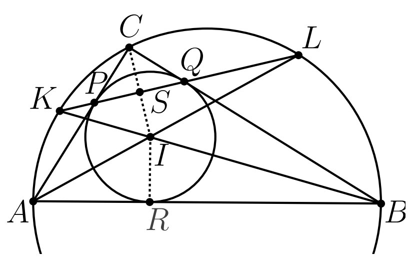
Задача 9.1. Да се реши системата $\left| \begin{array}{l} x^3 + xy^2 + 16 = 0 \\ 3y^3 - xy^2 + 16 = 0 \end{array} \right.$.

Решение. Изваждаме почленно второто уравнение от първото и получаваме $x^3 + 2xy^2 - 3y^3 = 0$. Лесно се вижда, че $y = 0$ не дава решение на системата. При $y \neq 0$ разделяме полученото уравнение на y^3 и полагаме $\frac{x}{y} = t$. Получаваме $t^3 + 2t - 3 = 0 \iff (t-1)(t^2+t+3) = 0$ с единствено реално решение $t = 1$. Тогава $x = y$ и от системата получаваме $x = y = -2$.

Оценяване. 1 т. за елиминиране на свободния член, 1 т. за случая $y = 0$, 1 т. за полагането (разглеждането на уравнението като хомогенно), 3 т. за решаване на уравнението от трета степен за t и 1 т. за довършване.

Задача 9.2. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до страните AC и BC съответно в точките P и Q, а правата PQ пресича описаната около $\triangle ABC$ окръжност в точките K и L ($K \in \overset{\frown}{AC}$, $L \in \overset{\frown}{BC}$). Ако K е среда на $\overset{\frown}{AC}$, да се намери отношението $KL : AB$.

Решение. Имаме



$$\frac{1}{2}(\overset{\frown}{AK} + \overset{\frown}{CL}) = \sphericalangle QPC = \sphericalangle PQC = \frac{1}{2}(\overset{\frown}{CK} + \overset{\frown}{BL}).$$

Но $\overset{\frown}{AK} = \overset{\frown}{CK}$ и следователно L е среда на $\overset{\frown}{BC}$. Тогава AL пресича BK в центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност и KL е симетрала на CI.

Така получаваме, че $PIQC$ е квадрат, $\sphericalangle ACB = 90^\circ$ и освен това $\triangle KLC \sim \triangle ABI$, т.е. $KL : AB = CS : IR = CS : CP = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, където R е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност с AB.

Оценяване. 3 т. за доказване, че L е среда на $\overset{\frown}{BC}$, 2 т. за $\sphericalangle ACB = 90^\circ$, 1 т. за $\triangle KLC \sim \triangle ABI$ и 1 т. за достигане до отговора.

Задача 9.3. Множеството от върховете на правилен 30-ъгълник е разбито на 15 непресичащи се двойки, които определят 15 отсечки. Да се докаже, че поне две от 15-те отсечки са равни.

Решение. Нека $A_1A_2\dots A_{30}$ е даденият правилен 30-ъгълник. Да отъждествим дължината на отсечката A_iA_j с числото $|i-j|$, ако $|i-j| \leq 15$ и с $30-|i-j|$, ако $|i-j| \geq 16$. Тогава е достатъчно да докажем, че поне две от числата, съпоставени на 15-те отсечки, са равни.

Да допуснем противното, т.е. числата са $1, 2, \dots, 15$. Да означим съответно с $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{15}}$ краищата с по-малък индекс на отсечките с дължини $1, 2, \dots,$ 15. Тогава вторите им краища са съответно A_{i_1+1} или A_{i_1+30-1}, A_{i_2+2} или A_{i_2+30-2} и т.н. Оттук следва, че сумата от всички индекси е равна на $M = 2(i_1+i_2+\dots+i_{15})+30m+a_1+a_2+\dots+a_{15}$, където m е цяло число, а $|a_i| = i$ за $i = 1, 2, \dots, 15$. Тогава M има същата четност, както числото $a_1+a_2+\dots+a_{15}$, а то е с четността на $1+2+\dots+15 = 120$. Следователно M е четно число. От друга страна, имаме $M = 1+2+\dots+30 = 15.31 = 465$, противоречие.

Оценяване. 1 т. за заместване на дължините с цели числа, 2 т. за дефиниране на инвариант, които води до противоречие и 4 т. за реализация на противоречие.

Задача 9.4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x^2+a} = x-a$$

има поне едно цяло решение.

Решение. След повдигане на квадрат достигаме до уравнението $2ax = a(a-1)$.

Случай 1. Ако $a = 0$, то уравнението добива вида $|x| = x$ и всяко $x \geqq 0$ е решение.

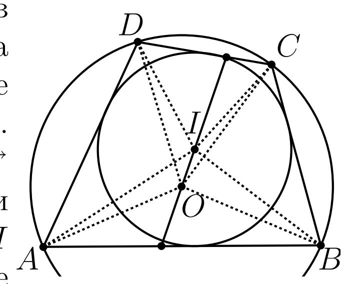
Случай 2. Ако $a \neq 0$, то $x = \dfrac{a-1}{2}$. Тогава $x^2+a = \frac{(a-1)^2}{4}+a = \frac{(a+1)^2}{4} \geqq 0$ и за да имаме решение е достатъчно $x-a = \dfrac{a-1}{2}-a \geqq 0$, т.е. $a \leqq -1$.

Следователно уравнението има поне едно цяло решение точно когато a е нечетно отрицателно число или 0.

Оценяване. 1 т. за свеждане на уравнението до линейно, 1 т. за *случай 1*, 3 т. за *случай 2* и 2 т. за достигане до отговора.

Задача 9.5. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност с център O и описан около окръжност с център I, като $I \not\equiv O$. Правата OI пресича две от страните на $ABCD$ във вътрешни точки. Да се докаже, че произведението на тези две страни не надминава произведението на другите му две страни.

Решение. Понеже $ABCD$ е описан, то $AB + CD = AD + BC$. Ще докажем, че OI пресича във вътрешни точки най-дългата и най-късата страна на $ABCD$. От горното равенство лесно се съобразява, че те са срещулежащи и нека са съответно AB и CD. От $AB > BC$ следва, че $\sphericalangle OBA < \sphericalangle OBC$, т.е. $BO^{\rightarrow}$ лежи между $BI^{\rightarrow}$ и $BA^{\rightarrow}$. Аналогично, $AO^{\rightarrow}$ лежи между $AI^{\rightarrow}$ и $AB^{\rightarrow}$, т.е. O лежи вътре в $\triangle ABI$ и OI пресича страната AB. По същия начин получаваме, че OI пресича страната CD.



От друга страна, имаме равенствата $4AB.CD = (AB+CD)^2-(AB-CD)^2$и $4AD.BC = (AD + BC)^2 - (AD - BC)^2$. Оттук и от факта, че AB и CD са най-дългата и най-късата страни, получаваме $(AB - CD)^2 > (AD - BC)^2$ и следователно $AB.CD < AD.BC$.

Оценяване. 1 т. за предположението че OI пресича най-дългата и най-късата страна, 3 т. за доказателството му и 3 т. за доказване на неравенството (което може да се направи и чисто геометрично).

Задача 9.6. Да се докаже, че системата $\left|\begin{array}{l} x^3 + 2x^2y + xy^2 + 7z^4 = 8 \\ x^2y + 2xy^2 + y^3 + 9z^4 = 8 \end{array}\right.$ няма решение в цели числа.

Решение. Да допуснем, че системата има решение. Събираме двете уравнения и получаваме $(x + y)^3 + (2z)^4 = 16$.

Да разгледаме остатъците на двете страни по модул 13. Възможните остатъци на третите степени са 0, 1, 5, 8 и 12, а остатъците на четвъртите степени са 0, 1, 3 и 9. Тогава лесно се вижда, че единствената възможност е да имаме $(x + y)^3 \equiv 0 \pmod{13}$ и $(2z)^4 \equiv 3 \pmod{13}$. Оттук $y \equiv -x \pmod{13}$ и $z^4 \equiv 1 \pmod{13}$.

Заместваме y и z^4 (по модул 13) в първото уравнение на системата и получаваме $7 \equiv 8 \pmod{13}$, противоречие.

Оценяване. 1 т. за представянето $(x+y)^3+(2z)^4 = 16$, 1 т. за разглеждане на остатъците по модул 13, 3 т. за намиране на единствената възможност (остатъци 0 и 3), 1 т. за заместване в системата по модул 13 и 1 т. за получаване на противоречие.

Задача 10.1. Да се реши неравенството

$$\frac{x + a}{\sqrt{x^2 + a^2}} > \frac{x + b}{\sqrt{x^2 + b^2}},$$

където a и b са реални параметри и $a > b > 0$.

Решение. Ще разгледаме поотделно три възможности за знаците на числителите.

Случай 1. Ако $x > -b$, то двете страни на неравенството са положителни и след повдигане на квадрат, освобождаване от знаменател и опростяване получаваме $(a-b)x(x^2-ab) > 0$. Тъй като $a-b > 0$, остава $x(x^2-ab) > 0$, чиито решения (по метода на интервалите) са $x \in (-\sqrt{ab}, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$. Понеже $-b > -\sqrt{ab}$, решенията в този случай са $x \in (-b, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

Случай 2. Ако $-a \le x \le -b$, неравенството очевидно е изпълнено.

Случай 3. Ако $x < -a$, то, подобно на случай 1) получаваме неравенството $(a-b)x(x^2-ab) < 0$, чиито решения (отново по метода на интервалите) са $x \in (-\infty, -\sqrt{ab}) \cup (0, \sqrt{ab})$. Понеже $-a < -\sqrt{ab}$, решенията в този случай са $x \in (-\infty, -a)$.

Окончателно, решенията са $x \in (-\infty, 0) \cup (\sqrt{ab}, +\infty)$.

Оценяване. По 2 т. за всеки от трите случая и 1 т. за окончателно описание на решенията.

Задача 10.2. Права през върха C пресича диагонала BD, страната AD и продължението на страната AB на успоредника $ABCD$ съответно в точките M, E и F. Да се докаже, че AM е допирателна към описаната около триъгълника AEF окръжност тогава и само тогава, когато $ABCD$ е ромб.

Решение. Нека $ABCD$ е ромб. Тогава триъгълниците AMD и CMD са еднакви по първи признак, откъдето $\sphericalangle DCM = \sphericalangle DAM$. Но $\sphericalangle DCM = \sphericalangle EFA$. Следователно $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$, т.е. AM е допирателна към описаната около $\triangle AEF$ окръжност.

Нека $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$. Тогава разглежданите по-горе триъгълници са еднакви, защото имат обща страна, един и същ ъгъл срещу нея и равни височини. Това показва, че радиусите на описаните окръжности са равни, а оттам следва и равенство на ъглите.

Оценяване. 3 т. за едната посока: 1 т. за еднаквостта $\triangle AMD \cong \triangle CMD$, 2 т. за $\sphericalangle DAM = \sphericalangle EFA$ и заключението, че AM е допирателна към описаната около $\triangle AEF$ окръжност; 4 т. за другата посока: 2 т. за еднаквостта $\triangle AMD \cong \triangle CMD$ и 2 т. за довършване.

Задача 10.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които равенството

$$(x+y)^{2n+1} - x^{2n+1} - y^{2n+1} = (2n+1)xy(x+y)(x^2+xy+y^2)^{n-1}$$

е тъждество.

Решение. Полагаме $x = y = 1$ и получаваме $2^{2n+1} - 2 = 2(2n+1)3^{n-1}$, откъдето $2^{2n} - 1 = (2n+1)3^{n-1}$. Това уравнение се удовлетворява за $n = 1, 2, 3$. Нека $n \ge 4$. Представяме уравнението във вида $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{3^n}$.

Имаме
$$\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(1+\frac{1}{3}\right)^n > 1 + \frac{n}{3} + \frac{n(n-1)}{2.3^2} + \frac{1}{3^n},$$
откъдето $\frac{2n+1}{3} > 1 + \frac{n}{3} + \frac{n^2-n}{18}$, което е еквивалентно на $n^2 - 7n + 12 < 0$, а последното не е възможно при $n \geq 4$. Неравенството $\left(\frac{4}{3}\right)^n > \frac{2n+1}{3} + \frac{1}{3^n}$ при $n \geq 4$ може да се докаже лесно и по индукция.

Следователно търсените стойности на n може да са само $n = 1, 2, 3$. Във всеки от тези три случая непосредствено се проверява, че тъждествата са верни.

Оценяване. 2 т. за полагане, което води до подходящо уравнение за n, 1 т. за решенията $n = 1, 2, 3$, 3 т. за отхвърляне на $n \geq 4$ и 1 т. за проверка на тъждествата при $n = 1, 2, 3$.

Задача 10.4. Нека $f(x) = x^2 + (2a-1)x - 3$ и $g(x) = x^2 + (a-2)x - 1$, където a е реален параметър. Да се намерят всички стойности на a, за които корените на уравненията $f(x) = 0$ и $g(x) = 0$ са разположени така, че между двата корена на едното има точно един корен на другото.

Решение. *Първи начин.* Нека x_1 и x_2 са корените на $f(x) = 0$, а x_3 и x_4 са корените на $g(x) = 0$. Тогава не е трудно да се съобрази, че исканото е еквивалентно на $f(x_3)f(x_4) < 0$. Имаме последователно
$$\begin{aligned}
& f(x_3)f(x_4) < 0 \iff [x_3^2 + (2a-1)x_3 - 3][x_4^2 + (2a-1)x_4 - 3] < 0 \\
\iff\ & [1 - (a-2)x_3 + (2a-1)x_3 - 3][1 - (a-2)x_4 + (2a-1)x_4 - 3] < 0 \\
\iff\ & [(a+1)x_3 - 2][(a+1)x_4 - 2] < 0 \\
\iff\ & (a+1)^2 x_3 x_4 - 2(a+1)(x_3 + x_4) + 4 < 0 \\
\iff\ & a^2 - 4a - 1 < 0.
\end{aligned}$$
Следователно търсените стойности на a са $a \in (2 - \sqrt{5}, 2 + \sqrt{5})$.

Втори начин. Исканото е еквивалентно на изискването пресечната точка на графиките на $f(x)$ и $g(x)$ да лежи под абсцисната ос. Тъй като пресечната точка има абсциса $x_0 = \frac{2}{a+1}$ (единственото решение на уравнението $f(x) = g(x)$), получаваме $g(\frac{2}{a+1}) < 0 \iff a^2 - 4a - 1 < 0$.

Оценяване. 1 т. за съображението, че корените на $f(x)$ и $g(x)$ са реални за всяко a, 2 т. за преминаване към еквивалентно твърдение, което води до неравенство и 4 т. за решаване на неравенството.

Задача 10.5. В триъгълник ABC е известно е, че $2 \sphericalangle BAC + 3 \sphericalangle ABC = 180^\circ$. Да се докаже, че $4(BC + CA) \leq 5AB$.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Лесно се вижда, че $\beta = 2\gamma - 180^\circ$ и $\alpha = 360^\circ - 3\gamma$, откъдето $90^\circ < \gamma < 120^\circ$, т.е. $-\frac{1}{2} < \cos\gamma < 0$. Имаме последователно

$$\begin{aligned}\frac{a+b}{c} &= \frac{\sin\alpha + \sin\beta}{\sin\gamma} = -\frac{\sin 3\gamma + \sin 2\gamma}{\sin\gamma} \\ &= -(3 - 4\sin^2\gamma) - 2\cos\gamma = -4\cos^2\gamma - 2\cos\gamma + 1.\end{aligned}$$

Тъй като квадратната функция $y = -4x^2 - 2x + 1$ приема най-голямата си стойност при $x = -\frac{1}{4} \in (-\frac{1}{2}, 0)$, заключаваме, че $\frac{a+b}{c} \le y(-\frac{1}{4}) = \frac{5}{4}$.

Оценяване. 2 т. за оценяването на γ или други важни оценки за ъглите, 1 т. за прехода чрез синусова теорема, 2 т. за получаване на функция за изследване и 2 т. за получаване на исканата оценка.

Задача 10.6. Нека n е естествено число и $N = n(n+1)(n+2)(n+3)$. Да се докаже, че не съществува цяло число m, за което $N + m^9 = 2008$.

Решение. Да допуснем противното. Тъй като $n(n+1)(n+2)(n+3) = (n^2+3n+1)^2 - 1$, разглежданото равенство се записва във вида $k^2 + m^9 = 2009$, където $k = n^2 + 3n + 1$. Да разгледаме последното равенство по модул 19 (тъй като $9 = \frac{19-1}{2}$). Тогава от малката теорема на Ферма следва, че m е сравнимо с 0 или ± 1 по модул 19, а остатъците на точните квадрати по модул 19 са $0, 1, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 16$ и 17. От друга страна, имаме $2009 \equiv 14 \pmod{19}$, откъдето следва, че исканото равенство е невъзможно.

Оценяване. 1 т. за съображенето, че $N = k^2 - 1$, 1 т. за работа с модул, по който се правят важни изводи и 5 т. за достигане на противоречие.

Задача 11.1. Да се реши уравнението $\sqrt{x^2 + x + 3} = x - a$, където a е реален параметър.

Решение. Допустимите стойности са $x \in \mathbb{R}$. При $x < a$ уравнението няма решение, а при $x \ge a$ то е еквивалентно на $(1 + 2a)x = a^2 - 3$. Тъй като при $a = -\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, то $x = \dfrac{a^2 - 3}{1 + 2a}$. От $\dfrac{a^2 - 3}{1 + 2a} \ge a$ намираме $\dfrac{a^2 + a + 3}{1 + 2a} \le 0$, което е изпълнено само при $a < -\dfrac{1}{2}$. Следователно при $a \ge -\dfrac{1}{2}$ уравнението няма решение, а при $a < -\dfrac{1}{2}$ решението е $x = \dfrac{a^2 - 3}{1 + 2a}$.

Оценяване. 1 т. за допустимите стойности, 1 т. за случая $x > a$, 2 т. за намиране на $x = \dfrac{a^2 - 3}{1 + 2a}$ и 3 т. за определяне кога $x > a$.

Задача 11.2. а) Да се докаже, че за триъгълник с ъгли α, β и γ е изпълнено равенството

$$r = 4R \sin\frac{\alpha}{2} \sin\frac{\beta}{2} \sin\frac{\gamma}{2},$$

където r и R са съответно радиусът на вписаната и на описаната окръжност за този триъгълник.

б) Шестоъгълникът $ABCDEF$ е вписан в окръжност. Да се докаже, че произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABF$, $\triangle BCD$ и $\triangle DEF$ е равно на произведението на радиусите на вписаните окръжности в $\triangle ABC$, $\triangle CDE$ и $\triangle EFA$ тогава и само тогава, когато периметрите на $\triangle ACE$ и $\triangle BDF$ са равни.

Решение. а) Равенството следва от тъждеството $\sin\dfrac{\alpha}{2} = \sqrt{\dfrac{1-\cos\alpha}{2}}$, косинусовата теорема и формулите $S = pr = \dfrac{abc}{4R}$.

б) Ще използваме, че ако α, β и γ са ъгли в триъгълник, то

$$\begin{aligned}\sin 2\alpha + \sin 2\beta + \sin 2\gamma &= 2\sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha-\beta) + 2\sin\gamma\cos\gamma = \\ &= 2\sin\gamma(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)) = 4\sin\alpha\sin\beta\sin\gamma\end{aligned}$$

Като използваме тъждеството от а), получаваме

$$\sin\frac{\sphericalangle ABC}{2}\sin\frac{\sphericalangle CDE}{2}\sin\frac{\sphericalangle EFA}{2} = \sin\frac{\sphericalangle BCD}{2}\sin\frac{\sphericalangle DEF}{2}\sin\frac{\sphericalangle FAB}{2}. \tag{1}$$

Освен това $\sphericalangle ABC + \sphericalangle CDE + \sphericalangle EFA = \sphericalangle BCD + \sphericalangle DEF + \sphericalangle FAB = 360^\circ$, откъдето следва, че

$$\sin\sphericalangle ABC + \sin\sphericalangle CDE + \sin\sphericalangle EFA = \sin\sphericalangle BCD + \sin\sphericalangle DEF + \sin\sphericalangle FAB.$$

От синусовата теорема сега следва твърдението на задачата.

Оценяване. 2 т. за а) и 5 т. за б), от които 3 т. за равенството (1).

Задача 11.3. Група от n човека, където n е четно естествено число, се разполага около маса, местата на която са във върховете на правилен n-ъгълник. Винаги ли е възможно да се направят няколко такива разположения така, че всеки двама да са седели в диаметрално противоположни места на масата точно по веднъж?

Решение. Ако е възможно да се направят такива разположения, то техният брой трябва да е $n-1$. Задачата е еквивалентна на: да се докаже, че ребрата на пълния граф с n върха могат да се оцветят в $n-1$ цвята така, че да няма две едноцветни ребра с общ връх. Да номерираме върховете с числата $A_1, A_2, \ldots, A_n$ и нека цветовете са $1, 2, \ldots, n-1$. Да оцветим ребрата A_iA_j за $1 \le i, j \le n-1$ в цвят $i+j \pmod n$. Ако допуснем, че има различни ребра A_iA_p и A_iA_q с общ връх A_i, които са от един и същи цвят, ще получим $i+p \equiv i+q \pmod{n-1}$. Поради $1 \le p, q \le n-1$ това означава, че $p = q$, което е противоречие.

Следователно от всеки връх от $A_1, A_2, \dots, A_{n-1}$ излизат $n-2$ разноцветни ребра към останалите $n-2$ върха. При това от връх A_i не излиза ребро в цвят $2i \pmod{n-1}$. Тъй като $n-1$ е нечетно число, то $2i \not\equiv 2j \pmod{n-1}$, което означава, че свързвайки A_n с всеки от върховете A_i, $1 \leq i \leq n-1$ с ребро в цвят $2i \pmod{n-1}$, ще получим търсеното оцветяване.

Оценяване. 1 т. за твърдение, че отговорът е да или за определяне, че броят на разположенията е $n-1$, 1 т. за идея за получаване на оцветяване с използване на сбора на индексите на точките и общо най-много 3 т., ако предложеното оцветяване не води до решение.

Задача 11.4. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$2^{3x} - a2^{2x+1} + (a^2+1)2^x - a = 0$$

има три различни реални корена, които образуват аритметична прогресия.

Решение. След полагането $y = 2^x$, уравнението става

$$y^3 - 2ay^2 + (a^2+1)y - a = 0. \tag{1}$$

Ако уравнението от условието има три реални корена, които образуват аритметична прогресия, то уравнението (1) има три реални положителни корена, които образуват геометрична прогресия. Уравнението (1) може да се запише във вида $(y-a)(y^2-ay+1) = 0$. За да има три корена трябва $a > 0$ и $a^2 - 4 > 0$, което означава, че $a > 2$. За тези стойности на a корените y_1 и y_2 на $y^2 - ay + 1 = 0$ са положителни защото $y_1y_2 = 1$ и $y_1 + y_2 = a > 0$. Единствената възможност a, y_1 и y_2 да образуват геометрична прогресия е $y_1^2 = ay_2$, което дава $ay_1 - 1 = a(a - y_1)$. Оттук $y_1 = \dfrac{a^2+1}{2a}$ и след заместване в уравнението, получаваме $a^4 - 4a^2 - 1 = 0$. Единственият положителен корен е $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$, като $a > 2$.

Оценяване. 1 т. за полагането, 1 т. за извода, че уравнението (1) има три реални положителни корена, които образуват геометрична прогресия, 1 т. за разлагането на (1), 1 т. за определяне на $a > 2$, 2 т. за намиране на $a = \sqrt{2+\sqrt{5}}$ и 1 т. за проверка, че $a > 2$.

Задача 11.5. Дадена е редица от положителни числа $a_1, a_2, \dots$, за която $a_1 = 1$, $a_2 = 2$ и

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_{n-1}^2 + a_{n-2}^2 + a_{n-2}$$

за $n \geq 3$. Да се намери a_3, ако

$$\frac{1}{a_1+1} + \frac{1}{a_2+1} + \dots + \frac{1}{a_{2008}+1} + \frac{1}{a_{2009}} = 1.$$

Решение. Ще докажем, че $a_3 = 6$ е търсената стойност. Нека $a_3 = 6$. Тогава $a_2 = a_1^2 + a_1$, $a_3 = a_2^2 + a_2$ и $a_4 = a_3^2 + a_2^2 + a_1^2 + a_1 = a_3^2 + a_2^2 + a_2 = a_3^2 + a_3$. Сега по индукция лесно следва, че $a_n = a_{n-1}^2 + a_{n-1}$. Пресмятаме

$$\frac{1}{a_i + 1} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_i(a_i + 1)} = \frac{1}{a_i} - \frac{1}{a_{i+1}}$$

и след телескопично сумиране получаваме тъждеството от условието. Ясно е, че ако $a_3 > 6$, то сборът от условието е по-малък от 1, а при $a_3 < 6$, той е по-голям от 1. Следователно единствената стойност е $a_3 = 6$.

Оценяване. 1 т. за доказване, че има най много една стойност за a_3, 2 т. за познаване на отговора и 1 т. за идея за телескопично сумиране.

Задача 11.6. Естествените числа a, b и c са такива, че $a^2 + ab + b^2 = c^2$ и a и b са взаимнопрости. Да се докаже, че числото $|a - b| + 2c$ е точен квадрат на естествено число тогава и само тогава, когато то не се дели на 3.

Решение. Без ограничение можем да считаме, че $a > b$. Записваме равенството $a^2 + ab + b^2 = c^2$ във вида

$$(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a + b)^2.$$

Тъй като a и b са взаимнопрости, то те не са едновременно четни. От $a^2 + ab + b^2 = c^2$ следва, че c е нечетно число. Нека НОД$(2c - a + b, 2c + a - b) = d$. Ако p е нечетен прост делител на d, то p^2 дели $3(a + b)^2$ и значи p дели $a + b$. Освен това p дели $2c - a + b - (2c + a - b) = 2(b - a)$ и следователно p дели $b - a$. Получаваме, че p дели a и b, което е противоречие. Следователно d няма нечетни прости делители и тъй като d дели $4c$, (c е нечетно), то $d = 1, 2$ или 4.

Ако $d = 2$ или 4 (т.е. a и b са нечетни), то числото c е нечетно и тъй като $a^2 \equiv b^2 \equiv c^2 \equiv 1 \pmod 8$, имаме $ab \equiv 7 \pmod 8$. Оттук и от факта, че всяко от числата a и b дава остатък $1, 3, 5$ или 7 при деление на 8, следва, че $a + b$ се дели на 8. Ако $d = 2$, то $2c - a + b = 2p$ и $2c + a - b = 2q$, като $(p, q) = 1$ и $p + q = 2c$ е четно число. Следователно p и q са нечетни и равенството $(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a + b)^2$ е невъзможно по модул 8.

Ако $d = 4$, след съкращаване на 4 получаваме ситуация, аналогична на случая $d = 1$, като при това точният квадрат си остава такъв.

Нека $d = 1$, т.е. a и b са с различна четност. Тогава числата $2c - a + b$ и $2c + a - b$ са нечетни и едното от тях е от вида $3p^2$, а другото е от вида q^2, където q не се дели на 3, защото иначе $2c - a + b$ и $2c + a - b$ не са взаимнопрости. Остава да отбележим, че ако $|a - b| + 2c$ е точен квадрат, то е равно на q^2 и значи не се дели на 3 и, обратно, ако $|a - b| + 2c$ не се дели на 3, то е равно на q^2, т.е. е точен квадрат.

Оценяване. 1 т. за разлагането $(2c - a + b)(2c + a - b) = 3(a + b)^2$, 2 т. за доказване, че $d = 1, 2, 4$, 1 т. за случая a и b с различна четност и 3 т. за останалата част.

Задача 12.1. Да се реши уравнението

$$3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 16\frac{4^{x-1}+6}{2^x+1} = 0.$$

Решение. Изследваме функцията $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2$ в интервала $(-\infty, +\infty)$. Имаме $f'(x) = 12(x^3 - x^2 - 2x) = 12x(x+1)(x-2)$. Оттук $f'(x) < 0$ при $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 2)$ и $f'(x) > 0$ при $x(-1, 0) \cup (2, +\infty)$. Тогава f намалява в първите два интервала и расте във вторите два. Следователно най-малката стойност на f се достига при $x = -1$ или $x = 2$. Понеже $f(-1) = -5 > -32 = f(2)$, тя е равна на $f(2) = -32$.

От друга страна,

$$g(x) = \frac{4^{x-1}+6}{2^x+1} \geq 2 \Leftrightarrow 4(2^{x-2}-1)^2 \geq 0.$$

Следователно $f(x) + 16g(x) \geq -32 + 16.2 = 0$, като равенство се достига само при $x = 2$.

Оценяване. 1 т. за намиране на нулите на f', 1 т. за определяне на знаците на f', 1 т. за определяне на интервалите на монотонност на f, 1 т. за намиране на най-малката стойност на f, 2 т. за намиране на най-малката стойност на g и 1 т. за окончателния отговор.

Задача 12.2. В кръг с радиус 1 са разположени четири триъгълника със сума на лицата 3. Да се докаже, че два от тях имат обща вътрешна точка.

Решение. Да допуснем противното. Тогава триъгълниците покриват лице 3. Разглеждаме краищата на радиусите, върху които лежат върховете им (ако някой връх съвпада с центъра, вземаме кой да е радиус). Получаваме вписан 12-ъгълник (възможно изроден) с лице $S > 3$. От друга страна, както е добре известно, S не надминава лицето на съответния правилен 12-ъгълник, а то е равно на 3 и получаваме противоречие.

Оценяване. 3 т. за разглеждане на съответния вписан 12-ъгълник и 4 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Да се намерят всички реални числа a, за които:

а) съществува функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ такава, че $f(0) = a$ и $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$;

б) съществува непрекъсната функция със свойствата от а).

Решение. а) Понеже $f^{2009}(x) = f(f(f(x))) = f(x^{2009})$, то $a^{2009} = a$, т.е.

$a = 0, \pm 1$. Да отбележим, че ако $\{b, c, d\} = \{-1, 0, 1\}$ и

$$f(x) = \begin{cases} 1/x, & |x| > 1 \\ 1/x^{2009}, & 0 < |x| < 1 \\ b, & x = b \\ c, & x = d \\ d, & x = c \end{cases}$$

то $f(f(x)) = x^{2009}$ за всяко $x \in \mathbb{R}$. Значи търсените числа са 0 и ± 1.

б) Да отбележим, че f е инективна функция (ако $f(x) = f(y)$, то $x^{2009} = f(f(x)) = f(f(y)) = y^{2009}$, т.е. $x = y$). Ако допуснем, че $a = f(0) = -1$, то $f(-1) = 0$. За $e = f(1)$ имаме, че $e \neq 0, -1$ и $e^{2009} = e$, т.е. $e = 1$. Тогава $f(0)f(1) < 0$ и понеже f е непрекъсната, то $f(y) = 0$ за някое $y \in (0, 1)$. Това е противоречие с инективността на f и $f(-1) = 0$. Аналогично $a \neq 1$. Остава $a = 0$. Тази стойност може да се реализира както показва следната непрекъсната функция f, за която $f(f(x)) = x^{2009}$:

$$f(x) = \begin{cases} x^{\sqrt{2009}}, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -(-x)^{\sqrt{2009}}, & x < 0. \end{cases}$$

Оценяване. а) 1 т. за $a = 0, \pm 1$ и 2 т. за примери; б) 3 т. за $a = 0$ и 1 т. за пример.

Задача 12.4. В $\triangle ABC$ ($AC < BC$) с лице $20\sqrt{3}$ точките M и I са съответно медицентър и център на вписаната окръжност. Отсечката IM има дължина 1 и е успоредна на страната AB. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.

Решение. Да означим $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$. Нека CL ($L \in AB$) и CN ($N \in AB$) са съответно ъглополовяща и медиана (L е между A и N, понеже $AC < BC$). От условието следва, че $\triangle CLN \sim \triangle CIM$. Тогава $\dfrac{LN}{1} = \dfrac{CL}{CI} = \dfrac{CN}{CM} = \dfrac{3}{2}$ (понеже M е медицентър). От $\dfrac{b}{a} = \dfrac{AL}{BL} = \dfrac{AL}{c - AL}$ получаваме $AL = \dfrac{bc}{a+b}$. Тъй като AI е ъглополовяща в $\triangle ALC$, то $\dfrac{CI}{IL} = \dfrac{AC}{AL} = \dfrac{a+b}{c}$ и оттук $\dfrac{CL}{CI} = \dfrac{a+b+c}{a+b}$. Но $\dfrac{CL}{CI} = \dfrac{3}{2}$ и получаваме $a + b = 2c$. Тогава

$$\frac{3}{2} = LN = AN - AL = \frac{c}{2} - \frac{bc}{a+b} = \frac{c(a-b)}{2(a+b)} = \frac{a-b}{4},$$

откъдето намираме $a - b = 6$. Сега от $a + b = 2c$ и $a - b = 6$ следва, че $a = c + 3$ и $b = c - 3$. Хероновата формула ни дава, че

$$1200 = S_{ABC}^2 = \frac{3c}{2}\left(\frac{c}{2} - 3\right)\left(\frac{c}{2} + 3\right)\frac{c}{2} \Leftrightarrow c^4 - 36c^2 - 6400 = 0,$$

т.е. $(c^2-100)(c^2+64)=0$, откъдето $c=10$ и $a=c+3=13$, $b=c-3=7$.

Оценяване. 2 т. за $a+b=2c$, 2 т. за $\dfrac{c(a-b)}{a+b}=3$ и 3 т. за довършване на решението.

Задача 12.5. Нека n е естествено число. Да се докаже, че:

а) уравнението $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}=1$ има единствено неотрицателно решение x_n;

б) редицата с общ член x_n е сходяща и да се намери нейната граница.

Решение. а) Функцията $f_n(x)=\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{i(i+x)}$ е намаляваща при $x\geq 0$. Понеже $f_n(0)\geq 1>1-\dfrac{1}{n+1}=f_n(1)$ следва, че уравнението $f_n(x)=1$ има единствено неотрицателно решение x_n, като $x_n<1$.

б) Ако $y_n=1-\dfrac{4}{n+3}$, то

$$f(y_n)=\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+y_n)}\geq$$

$$\frac{1}{1+y_n}+\sum_{i=2}^{n}\frac{1}{i(i+1)}=\frac{n+3}{2(n+1)}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}=1,$$

т.е. $f(y_n)\geq f(x_n)$. Тогава $y_n\leq x_n<1$ и значи $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$.

Оценяване. 2 т. за а) и 5 т. за б), от които 2 т, ако доказана само сходимостта
.

Задача 12.6. Да се намерят всички двойки (a,b) от естествени числа такива, че n^2+n+1 дели $(an+1)^{10}+b$ за всяко естествено число n.

Решение. Понеже $n^3\equiv 1(\mathrm{mod}\ n^2+n+1)$, то

$$(an+1)^{10}+b=b+\sum_{i=0}^{10}\binom{n}{i}(an)^i\equiv$$

$$An^2+Bn+C\equiv[(B-A)n+C-A](\mathrm{mod}\ n^2+n+1),$$

където

$$A=\binom{10}{2}a^2+\binom{10}{5}a^5+\binom{10}{8}a^8,$$

$$B=\binom{10}{1}a+\binom{10}{4}a^4+\binom{10}{7}a^7+\binom{10}{10}a^{10},$$

$$C = b + \binom{10}{0} + \binom{10}{3}a^3 + \binom{10}{6}a^6 + \binom{10}{9}a^9.$$

Тогава лесно следва, че n^2+n+1 дели $(an+1)^{10}+b$ за всяко естествено число n точно когато $A = B = C$. Имаме, че $A = B$ тогава и само тогава когато a е нула на полинома $xP(x)$, където

$$P(x) = x^9 - \binom{10}{8}x^7 + \binom{10}{7}x^6 - \binom{10}{5}x^4 + \binom{10}{4}x^3 - \binom{10}{2}x + 10.$$

Оттук следва, че a може да е само 1, 2, 5 или 10. Директна проверка показва, че $P(2) = 0$, докато $P(1) \neq 0$, защото е нечетно число. Освен това, 5 дели $P(5)$ и $P(10)$, а 25 не дели тези две числа и значи те не са 0. И така, $a = 2$ и от $A = C$ следва, че $b = 3^5$.

Оценяване. 3 т. за $P(a) = 0$, 1 т. за $P(2) = 0$ и 3 т. за довършване на решението.