Национална олимпиада по математика, национален кръг, 29 май 2009

ТЕМА ЗА 7. КЛАС

Задача 1. Ако p и q са прости числа, по-големи от 3, да се докаже, че числото $M = 7p^2 - 5q^2 - 2$ седели на 24.

Задача 2. Дадени са два правоъгълника $ABCD$ и $AMNP$, такива че $AM = AD$ и $AP = AB$. Ако точката M лежи на страната BC, а страните CD и MN се пресичат в точка Q, да се докаже, че $QB = QP$.

Задача 3. Квадратна таблица 4x4 ще наричаме „латинска", ако във всяка клетка на таблицата е записана по една от цифрите 1, 2, 3 или 4, като във всеки ред и стълб всяка от цифрите се среща само веднъж. Латинската таблица наричаме *оцветима*, ако клетките могат да се оцветят в синьо, червено, жълто или зелено, така че във всеки ред и стълб да няма две едноцветни клетки и всяка от цифрите се среща в таблицата само в разноцветни клетки. (Например цифрата 2 не може да се среща в две сини клетки.)

а) Дайте примери за оцветима таблица и за латинска таблица, която не е оцветима.

б) Колко са всички оцветявания за дадена оцветима таблица?

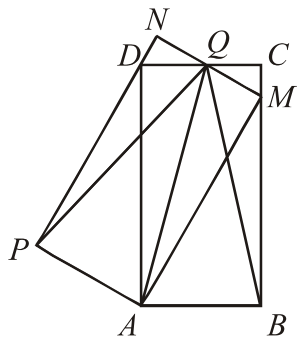
в) Колко са всички оцветими таблици?

г) Колко са всички латински таблици, които не са оцветими?

Решения и оценяване.

Задача 1. Числото p^2-1 се дели на 24, защото 3 дели $(p-1)p(p+1)$, но не дели p. **(2 т.)** Тъй като $p-1$ и $p+1$ са две последователни четни то 8 дели $(p-1)(p+1)$.**(2 т.)** Понеже $(3;8)=1$, то 24 дели p^2-1. **(1 т.)**
$M=7p^2-5q^2+2=7(p^2-1)-5(q^2-1)\Rightarrow 24/M$. **(2 т.)**

Задача 2. Нека $AM=AD$ и $QM\perp AM$ $(Q\in CD)$.
Тогава $\triangle ADQ\cong\triangle AMQ\Rightarrow QD=QM$. **(2 т.)** Ако $DN\perp MQ$, $(N\in MQ)$, то $\triangle DNQ\cong\triangle MCQ\Rightarrow QN=QC$.
Следователно $DC=MN$ **(2 т.)**.
Така доказахме, че точката *D* лежи на страната *PN* на правоъгълника *AMNP*. **(1 т.)**
От $DP=AN-DN=BC-CM=BM$ и $AP=AB$ следва $\triangle APD\cong\triangle ABM\Rightarrow\sphericalangle ADP=\sphericalangle ABM$. **(1 т.)** Следователно $\triangle PDQ\cong\triangle BMQ\Rightarrow AQ=BQ$. **(1 т.)**



Задача 3. Отговори: б) 48; в) 144; г) 432.
Решение. а) и б) Ако таблицата е латинска и оцветима, то тя е такава и след разместване на кои да е два стълба. След подходящо разместване на стълбове и евентуално пренаименоване на цифрите „2", „3" и „4" навсякъде из таблицата, можем да считаме, че тя има вида показан вдясно (звездичките представят някоя от цифрите 2, 3, 4). Такава таблица ще наричаме „подредена".

1	2	3	4
*	1	*	*
*	*	1	*
*	*	*	1

Имаме 4.3.2.1 = 24 начина да изберем оцветяването на диагоналните клетки (където са цифрите 1). Нека с *a, b, c, d* са цветовете им (в ред отгоре надолу). Има два начина да изберем цвета на клетката на цифрата „4" в горния десен ъгъл (*b* или *c*); без ограничение на общността това е цветът *b*. Тогава под него е *c*, което определя оцветяването на последния стълб. Аналогично първият ред се оцветява еднозначно, а оттам и останалата част от таблицата. Така различните оцветявания на тази таблица са 2.24 = 48.

a	*c*	*d*	*b*
d	*b*	*a*	*c*
b	*d*	*c*	*a*
c	*a*	*b*	*d*

Сега да видим коя звездичка на каква цифра съответства. На втория ред цифрата „2" може да се намира на всяка от позициите освен втората. Ако се намира на третата или съответно на четвъртата, лесно се вижда, че остатъкът от таблицата задължително се довършва по следния начин:

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	3	2	1

Тези две таблици не са оцветими, понеже цвят *a* имат две от цифрите „2" в лявата и две от цифрите „3" в дясната (и при двете възможни оцветявания).

Ако на вторият ред цифрата 2 се намира на първата позиция, то има точно два възможни начина за довършване на таблицата:

1	2	3	4
4	1	2	3
3	4	1	2
2	3	4	1

1	2	3	4
3	1	4	2
2	4	1	3
4	3	2	1

Лявата таблица е оцветима с посочените оцветявания, а в дясната има две цифри „4” в цвета *a* и значи тя не е оцветима.

в) и г) Има 4.3.2.1 = 24 начина да разположим цифрите „1” на четирите реда и 3.2.1 = 6 начина да разположим цифрите 2, 3 и 4 на останалите свободни места по първия ред. Следователно всяка от споменатите подредени таблици представя 24 . 6 = 144 различни латински таблици. Понеже има една оцветима и три неоцветими подредени таблици, то сред латинските таблици оцветимите са 144, а неоцветимите са 3.144 = 432.

Оценяване. а) 2т. (1 т. за пример за оцветима таблица плюс 1 т. за таблица, за която е доказано, че не е оцветима).
б) 2 т. (1 т. за верен отговор плюс 1 т., ако е правилно аргументиран).
в) 1 т. за верен отговор с аргументация.
г) 2 т. (1 т. за верен отговор плюс 1 т., ако е правилно аргументиран).

Задачите са предложени от: Т. Витанов 1 и 2. Ив. Кортезов – 3.