**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА**
**СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ**

## Пролетен математически турнир

## 27 – 29 март 2009 г., ПЛОВДИВ

## Тема за 8 клас

**Задача 1.** Дадено е уравнението $a^2x^2+2009=x^2+90ax-8x$, където $a$ е реален параметър.

а) Да се реши уравнението.

б) Да се намерят целите стойности на параметъра $a$, за които уравнението има поне един цял корен.

**Задача 2.** В трапеца $ABCD$ точките $M$ и $N$ са съответно средите на основите $AB$ и $CD$, а $K$ и $G$ са средите съответно на $AC$ и $MN$, като $AB-CD=2MN$.

а) Да се намери мярката на $\angle MKN$.

б) Ако на отсечката $MK$ съществува точка $P$ така, че $GP\perp AB$ и $AD=2PM$, да се намери мярката на $\angle ADC$.

**Задача 3.** Дадени са три купчини, съответно с 2009, 145 и $n$ бонбона. На един ход е разрешено да се съберат две купчини в една или пък, ако бонбоните в някоя купчина се делят на 3, тази купчина да се раздели на три равни купчини. Възможно ли е след определен брой ходове всеки бонбон да се окаже сам в купчина, ако:

а) $n=16$; б) $n=17$?

**Задача 4.** За всяко естествено число $n$ с $\tau(n)$ означаваме броя на положителните му делители. Да се намерят:

а) всички естествени числа *n*, за които $\tau(n)>\frac{1}{2}n$;

б) всички двойки естествени числа $x$ и $y$, за които $x\tau(y)+y\tau(x)=xy+3$.

*Време за работа 4 часа 30 мин.*
*Журито Ви желае успешна работа!*

## Тема за 8 клас

**Задача 8.1.** Дадено е уравнението $a^2x^2+2009=x^2+90ax-8x$, където $a$ е реален параметър.

а) Да се реши уравнението.

б) Да се намерят целите стойности на параметъра $a$, за които уравнението има поне един цял корен.

*Решение:* а) Уравнението е равносилно на $(ax-45)^2=(x-4)^2$.

Ако $ax-45=x-4$, то $(a-1)x=41$, което има решение $x=\dfrac{41}{a-1}$ при $a\neq 1$ и няма решение при $a=1$. (1 т.)

Ако $ax-45=4-x$, то $(a+1)x=49$, което има решение $x=\dfrac{49}{a+1}$ при $a\neq -1$ и няма решение при $a=-1$. (1 т.)

Окончателно: ако $a=1$, то $x=24,5$; ако $a=-1$, то $x=-20,5$; за всички останали $a$ $x_1=\dfrac{41}{a-1}$ и $x_2=\dfrac{49}{a+1}$. (1 т.)

б) Уравнението има цял корен, ако $a-1$ е делител на 41 или $a+1$ е делител на 49, т.е. ако $a$ е едно от числата $-50$; $-40$; $-8$; $-2$; 0; 2; 6; 42; 48. (3 т. минус броя пропуснати или сгрешени стойности на $a$, но не по-малко от 0 т.)

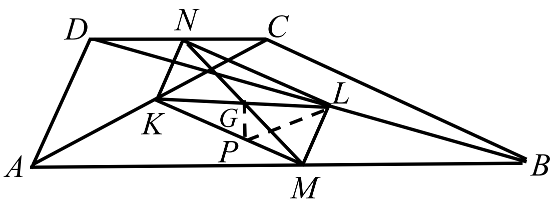
*Схема на оценяване*: 3 т. за а) и 3 т. за б), както е посочено по-горе.

**Задача 8.2.** В трапеца $ABCD$ точките $M$ и $N$ са съответно средите на основите $AB$ и $CD$, а $K$ и $G$ са средите съответно на $AC$ и $MN$, като $AB-CD=2MN$.

а) Да се намери мярката на $\angle MKN$.

б) Ако на отсечката $MK$ съществува точка $P$ така, че $GP\perp AB$ и $AD=2PM$, да се намери мярката на $\angle ADC$.

*Решение*: а) Нека $L$ е средата на $BD$. Тогава $ML$ е средна отсечка в $\Delta ABD$, а $KN$ е средна отсечка в $\Delta ACD$. Следователно $ML=KN=\dfrac{1}{2}AD$ и $ML \parallel KN$. Заключаваме, че $MLNK$ е успоредник и $G$ е пресечната точка на диагоналите му. (1 т.)




Добре известно е, че $KL$ лежи на средната основа на трапеца (което ще използваме в б)) и $2KL=AB-CD$. Сега от условието на задачата следва, че $KL=MN$ и заключаваме, че $MLNK$ е правоъгълник. В частност $\angle MKN=90^0$. (1 т.)

б) Триъгълниците $KGP$ и $LGP$ са правоъгълни, защото от условието $GP\perp AB$ следва, че $GP\perp KL$ (използваме, че $KL\parallel AB$). Те са еднакви по първи признак. От друга страна $\angle PML = 90^0$ и $PM = ML$ (по условие $PM = \frac{1}{2}AD$). Заключаваме, че $\angle MLP = \angle MPL = 45^0$. (1 т.)

Тъй като $\angle MPL$ е външен за равнобедрения $\Delta LKP$, то $\angle PLK = \angle PKL = 22,5^0$. (1 т.)

Сега $\angle MLK = 45^0 + 22,5^0 = 67,5^0$. (1 т.)

Най-накрая $\angle ADC = 180^0 - 67,5^0 = 112,5^0$, тъй като $\angle ADC$ и $\angle MLK$ са ъгли с взаимно успоредни рамене, от които точно едната двойка са противопосочни. (1 т.)

*Схема на оценяване*: 2 т. за а) и 4 т. за б), както е посочено по-горе.

**Задача 8.3.** Дадени са три купчини, съответно с 2009, 145 и $n$ бонбона. На един ход е разрешено да се съберат две купчини в една или пък, ако бонбоните в някоя купчина се делят на 3, тази купчина да се раздели на три равни купчини. Възможно ли е след определен брой ходове всеки бонбон да се окаже сам в купчина, ако:

а) $n = 16$; б) $n = 17$?

*Решение*: а) Не. Броят бонбони в никоя от купчините не се дели на 3. Следователно задължителен първи ход е събиране на две купчини в една. Ако съберем 2009 и 145, броят бонбони в двете купчини е четен и ще остане четен при всяка от операциите. Ако съберем 2009 и 16, броят бонбони в двете купчини е кратен на 5 и ще остане кратен на 5 при всяка от операциите. Ако съберем 145 и 16, броят бонбони в двете купчини е кратен на 7 и ще остане кратен на 7 при всяка от операциите. И в трите случая не може да се получи купчина от един бонбон.

б) Да. Тъй като $145 + 17 = 162$ се дели на 3, с прилагане на втората операция можем да получим 81 купчини с по 2 бонбона. Сега с първата операция можем да получим $2009 + 8.2 = 2025$, а оттук с прилагане на втората операция можем да получим 81 купчини с по 25 бонбона. По-нататък $25 + 2 = 27$ и с втората операция можем да получим 27 купчини с по 1 бонбон. Дотук имаме 80 купчини с по 25 бонбона, 72 купчини с по 2 бонбона и 27 купчини с по 1 бонбон, като за 27 от първоначалното количество бонбони сме реализирали условието от задачата. Да вземем 27 купчини с по 2 бонбона и всяка от тях да обединим с 27-те купчини с по 1 бонбон. Получаваме 27 купчини с по 3 бонбона. С прилагане на втората операция всяка от тях можем да разделим на три купчини с по 1 бонбон. По този начин реализираме условието на задачата за още 54 бонбона от първоначалните. При това разполагаме с достатъчно количество купчини с по 1 бонбон (общо 81). С помощта на 45 от тях и останалите 45 купчини с по 2 бонбона получаваме 45 купчини с по 3 бонбона. Постъпваме както преди малко и реализираме условието на задачата за още 90 бонбона. Резултатът дотук е 80 купчини с по 25 бонбона и 171 купчини с по 1 бонбон. От втория вид купчини взимаме 160 и образуваме 80 купчини с по 2 бонбона. Всяка от тях обединяваме с купчина с 25 бонбона, при което получаваме 80 купчини с по 27 бонбона. Тъй като 27 се дели на 3, за всяка купчина прилагаме съответен брой пъти втората операция и по този начин реализираме условието на задачата за останалите бонбони от първоначалните.

*Схема на оценяване:* а) общо 3 т., от които по 1 т. за всеки от случаите с кратност на 2, 5 и 7; б) общо 4 т., от които 1 т. за получаване на купчина с 2 бонбона, 1 т. за получаване на купчина с 1 бонбон и 2 т. за довършване на решението.

**Задача 8.4.** За всяко естествено число $n$ с $\tau(n)$ означаваме броя на положителните му делители. Да се намерят:

а) всички естествени числа *n*, за които $\tau(n) > \frac{1}{2}n$;

б) всички двойки естествени числа $x$ и $y$, за които $x\tau(y) + y\tau(x) = xy + 3$.

*Решение*: а) Проверка показва, че при $n \le 6$ неравенството $\tau(n) > \frac{1}{2}n$ е изпълнено за $n = 1$, 2, 3, 4 и 6. Нека $n \ge 7$ е нечетно, т.е. $n = 2k+1$, и нека

$$\tau(2k+1) > k + \frac{1}{2} \Rightarrow \tau(2k+1) \ge k+1.$$

От числата $k+1, k+2, \ldots, 2k$ никое не може да бъде делител на $n = 2k+1$, защото $2(k+1) > n$. Тези числа са $k$ на брой. За да бъде изпълнено $\tau(2k+1) \ge k+1$, трябва всички останали числа измежду $1, 2, \ldots, 2k+1$, които са на $k+1$ брой, да са делители на $2k+1$. Оттук следва, че например $k$ трябва да дели $2k+1$, а това е възможно само когато $k$ дели 1, т.е. при $k = 1$. Последното противоречи на $n \ge 7$. Нека $n \ge 8$ е четно, т.е. $n = 2k$, и нека $\tau(2k) > k \Rightarrow \tau(2k) \ge k+1$. От числата $k+1, k+2, \ldots, 2k-1$, които са $k-1$ на брой, нито едно не може да дели $2k$. Оттук следва, че всички останали числа измежду 1, 2, …, $2k$, които са $k+1$ на брой, трябва да се делители на $2k$. В частност, числото $k-1$ трябва да е делител на $2k$, а това е възможно само когато $k-1$ дели 2, т.е. при $k-1 \le 2$. Но тогава $n \le 6$ и попадаме извън случая $n \ge 8$, който разглеждаме. Доказахме, че неравенството $\tau(n) > \frac{1}{2}n$ е изпълнено само за $n = 1, 2, 3$, 4 и 6.

б) Да запишем даденото равенство във вида $x\left(\tau(y) - \frac{1}{2}y\right) + y\left(\tau(x) - \frac{1}{2}x\right) = 3$.

Ако предположим, че едновременно $\tau(x) - \frac{1}{2}x \le 0$ и $\tau(y) - \frac{1}{2}y \le 0$, ще получим, че $x\left(\tau(y) - \frac{1}{2}y\right) + y\left(\tau(x) - \frac{1}{2}x\right) \le 0$ и разглежданото равенство няма да е възможно. Следователно за поне едно от числата $x$ и $y$ е вярно, че $\tau(x) - \frac{1}{2}x > 0$ или (и) $\tau(y) > \frac{1}{2}y$. Това означава, че поне едно от търсените числа $x$ и $y$ е равно на 1, 2, 3, 4 или 6. Без ограничение можем да смятаме, че това е $x$, защото ако $(x, y)$ е решение, то и $(y, x)$ ще е решение поради симетричността на разглежданото равенство. При $x = 1$ получаваме $\tau(y) = 3$. Естествените числа с точно три делителя са квадратите на простите числа. Ето защо всички двойки от вида $(1, p^2)$ и $(p^2, 1)$, където $p$ е произволно просто число, са решения на задачата. При $x = 2$ получаваме $2\tau(y) = 3$, което е невъзможно. При $x = 3$ получаваме $3\tau(y) = y + 3$, откъдето следва, че $y$ трябва да се дели на 3. Нека $y = 3z$, където $z$ е естествено число. Записваме равенството $3\tau(y) = y + 3$ във вида $\tau(3z) = z + 1$. Да отбележим, че $z = 1$ е решение, а $z = 2$ не е решение. При $z \ge 3$ да разделим числата $1, 2, \ldots, 3z$ на три групи: от 1 до $z$

включително, от $z+1$ до $2z$ включително и от $2z+1$ до $3z$ включително. В третата група има точно един делител на $3z$. Във втората група числа имаме един или нула делителя на $3z$ (в зависимост от това дали $\frac{3z}{2}$ е цяло или не). Следователно в първата група трябва да има поне $z-1$ делителя на $3z$. Това означава, че измежду числата от 1 до $z$ най-много едно не може да е делител на $3z$. В частност, поне едно от числата $z-2$ и $z-1$ трябва да е делител на $3z$. Първият случай е възможен (при ограничението $z \geq 3$) само ако $z=3$, 4, 5 или 8., а вторият – при $z=4$. Проверката показва, че нито една от тези стойности не води до решение. Ето защо при $x=3$ получаваме единствено решение – двойката $(3,3)$. Нека $x=4$. Разглежданото равенство записваме във вида $4\tau(y)=y+3$. При $y=1$ получаваме двойката (4,1), която отбелязахме като решение в предишен случай. Нека $y=4k+1$, $k-$естествено. Получаваме $\tau(4k+1)=k+1$. Проверката показва, че $k=1$ и $k=2$ са решения, а това ни дава двойките (4,5), (5,4), (4,9) и (9,4). Нека $k \geq 3$. Числото $4k+1$ не може да има четен делител. Следователно всичките му делители трябва да са измежду числата 1, 3, …, $4k+1$, които са $2k+1$ на брой. От друга страна, при $k \geq 3$ е вярно, че $3(2k-1) > 4k+1$, а това означава, че никое от числата $2k-1, 2k+1, \ldots, 4k-1$ не може да е делител на $4k+1$, а тези числа са $k+1$ на брой. Следователно най-много $k$ от числата $1, 3, \ldots, 4k+1$ са делители на $4k+1$ и равенството $\tau(4k+1)=k+1$ е невъзможно. При $x=6$ получаваме равенството $6\tau(y)=2y+3$, което е невъзможно, защото лявата страна е четно, а дясната е нечетно число.

Окончателно търсените решения са $(1,p^2)$ и $(p^2,1)$, където $p$ е произволно просто число, (3,3), (4,5), (5,4), (4,9) и (9,4).

*Схема на оценяване:* а) общо 3 т., от които 1 т. за случая $n \leq 6$; 1 т. за останалите нечетни *n* и 1 т. за останалите четни *n;* б) общо 4 т., от които 1 т. общо за случаите $x=2$ и $x=6$, по 1 т. за всеки от случаите $x$ = 1, 3 и 4.

Задачите са предложени от:
Ивайло Кортезов: 8.1., 8.2 и 8.3;
Светлозар Дойчев и Сава Гроздев: 8.4.