Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

Пловдив, 27 – 29 март 2009 г.

София, 2009 г.

Кратки решения на задачите

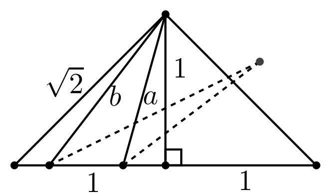
Задача 9.1. Ако за реалните числа a и b е изпълнено $1 < a < b < \sqrt{2}$, то да се докаже, че

$$\frac{a}{b} > \frac{1+\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{b^2-1}}.$$

Решение. Имаме, че $\dfrac{a}{b} > \dfrac{1+\sqrt{a^2-1}}{1+\sqrt{b^2-1}} \Leftrightarrow a + a\sqrt{b^2-1} > b + b\sqrt{a^2-1} \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow a - b + \frac{a^2b^2 - a^2 - b^2a^2 + b^2}{a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}} > 0 \Leftrightarrow (a-b)\left(1 - \frac{a+b}{a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}}\right) > 0.$$ Но $a+b > a\sqrt{b^2-1} + b\sqrt{a^2-1}$, защото $1 < a < b < \sqrt{2}$ и тогава $\sqrt{b^2-1} < 1$ и $\sqrt{a^2-1} < 1$. Следователно изразът в скобите е отрицателен и неравенството е изпълнено.

Забележка: Задачата има чисто геометрична интерпретация, илюстрирана на чертежа. Нужно е да се съобрази, че двете ъглополовящи се пресичат извън триъгълника.



Оценяване. 4т. за извеждане на $a-b$ като множител, 2т. за доказване отрицателността на втория множител.

Задача 9.2. Да се докаже, че системата

$$\left|\begin{array}{l} (x^2-2)(y^2-2) = 2009 \\ (x-9)^2 + (y-9)^2 = 100 \end{array}\right.$$

има точно две двойки решения (x, y), за които x и y са рационални числа.

Решение. Лесно се проверява, че двойките $(x, y) = (17, 3)$ и $(3, 17)$ са решения на системата. Остава да докажем, че няма други. Като положим $x + y = u$ и $xy = v$, системата добива вида:

$$\left|\begin{array}{l} v^2 + 4v - 2u^2 = 2005 \\ u^2 - 18u - 2v = -62 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} v^2 + 4v - 2u^2 = 2005 \\ v = \frac{1}{2}(u^2 - 18u + 62) \end{array}\right. .$$

Замествайки v в първото уравнение, достигаме до $u^4 - 36u^3 + 448u^2 - 2376u - 3680 = 0$. Тъй като $u = 17 + 3 = 20$ е корен на уравнението, по схемата на Хорнер то добива вида $(u-20)(u^3 - 16u^2 + 128u + 184) = 0$.

Случай 1. Ако $u = 20$, то $v = 51$ и след решаване на квадратното уравнение $t^2 - 20t + 51 = 0$, достигаме до горните две решения

Случай 2. Ако $u^3 - 16u^2 + 128u + 184 = 0$ има рационален корен u_0, то понеже старшият коефициент на полинома е единица получаваме, че u_0 е цяло число. Освен това, ${u_0}^3 = 8(2u_0^2 + 16u_0 + 23)$, т.е. $u_0 = \pm 2$ или ± 46. Директна проверка ни показва, че тези стойности не водят до решение.

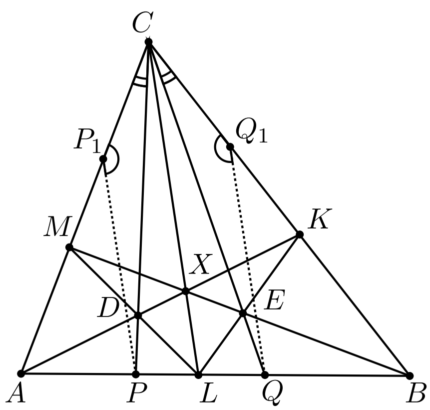
Забележка: Оказва се, че системата няма и реални решения. Имаме $u^2 \geqq 4v \Leftrightarrow 2u^2 - 36u + 124 \leqq 0$, от което следва, че $u > 0$ и съответно $u^3 - 16u^2 + 128u + 184 = u(u-8)^2 + 64u + 184 > 0$.

Оценяване. 1 т. за посочване на двете решения, 2 т. за полагането и свеждане до уравнение с едно неизвестно, 1 т. за разлагането и първият случай, 2 т. за вторият случай

Задача 9.3. Даден е $\triangle ABC$ и точка L от страната AB. Върху отсечката CL е избрана произволна точка X. Правите AX и BX пресичат страните BC и AC съответно в точките K и M и отсечките LM и LK съответно в точките D и E.

а) Да се докаже, че $\sphericalangle DCE$ е постоянен и независи от избора на точката X.

б) Ако CL е ъглополовяща на $\sphericalangle ACB$, то да се докаже, че CL е ъглополовяща и на ъгъл $\sphericalangle DCE$.



Решение. Нека $P = CD^{\rightarrow} \cap AB$, $Q = CE^{\rightarrow} \cap AB$.
а) Ще докажем, че точките P и Q са постоянни. Разглеждаме $\triangle ALC$. От теоремата на Чева и теоремата на Менелай за правата BM получаваме:

$$\frac{AP}{PL} = \frac{AM}{MC}.\frac{CX}{XL} = \frac{AB}{BL} = \mathrm{const}$$

Аналогично $\dfrac{BQ}{QL} = \dfrac{AB}{AL} = \mathrm{const}$ и следователно точките P и Q са постоянни, а от тук и $\sphericalangle DCE$.

б) През точките P и Q построяваме прави успоредни на CL, които пресичат страните AC и BC съответно в точки P_1 и Q_1. Ще докажем, че $\triangle CP_1P \sim \triangle CQ_1Q$, откъдето ще следва, че $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCQ$, т.е. CL е ъглополовяща на ъгъл $\angle DCE$.

Имаме $\sphericalangle CP_1P = 180^\circ - \sphericalangle ACL = 180^\circ - \sphericalangle BCL = \sphericalangle CQ_1Q$ и освен това

$$\frac{CP_1}{P_1P} = \frac{AC.PL}{AL} : \frac{CL.AP}{AL} = \frac{AC}{CL} : \frac{AP}{PL} = \frac{AC.BL}{CL.AB}$$

Аналогично $\dfrac{CQ_1}{Q_1Q} = \dfrac{BC.AL}{CL.AB}$, но $AC.BL = BC.AL$ и следователно $\dfrac{CP_1}{P_1P} = \dfrac{CQ_1}{Q_1Q}$. Тогава

$\triangle CP_1P \sim \triangle CQ_1Q$ и доказателството е завършено.

Оценяване. а) 1 т. за хипотезата, че P и Q са постоянни точки и 2 т. за доказателството ѝ б) 2 т. за допълнителното построение и свеждане на задачата до доказване на подобност на триъгълници, 2 т. за доказване, че $\triangle CP_1P \sim \triangle CQ_1Q$.

Задача 9.4. Нека W е една n-буквена дума, която съдържа най-много 10 различни букви (например ПЕРПЕНДИКУЛЯР или ААББВВАББО). Да се докаже, че буквите в W могат да се заменят с цифри, като на местата на еднаквите букви се поставят еднакви цифри, а на местата на различните букви се поставят различни цифри, така че полученото n-цифрено число (то може да започва и с 0) се дели на 9.

Решение. Нека някоя буква участва в W точно k пъти, като числото $n-k$ не се дели на 3. Тази буква заместваме с 9, а останалите по произволен начин с цифрите $0, 1, \ldots, 8$. Ако сборът от цифрите на полученото число се дели на 9, то задачата е решена. Нека сборът от цифрите е сравним с някакво число a по модул 9. Променяме с 1 всяка от цифрите, различна от 9, по модул 8. Сборът от цифрите на полученото число ще е сравним с $a+n-k \pmod 9$ и така докато стигнем до сбор, който се дели на 9. Това може да се постигне, защото $(n-k, 9) = 1$.

Нека сега $k_1 \equiv k_2 \equiv \cdots \equiv k_{10} \equiv n \pmod 3$. Тогава както и да разположим цифрите в W сборът им ще е сравним с $n(0+1+\cdots+9) \equiv 0 \pmod 3$.

Ако $k_1 \equiv k_2 \equiv \cdots \equiv k_{10} \equiv n \pmod 9$, то както и да разположим цифрите в W сборът им ще се дели на 9.

Остава да разгледаме случая, когато например числото $n-k_1$ не се дели на 9, т.е. $n-k_1 \equiv 3$ или $6 \pmod 9$ и тук процедираме както по-горе ($a = 0, 3$ или 6). С това задачата е решена.

Оценяване. 3 т. за разглеждане на случая "$n-k$ не се дели на 3", 1 т. за случая $k_1 \equiv k_2 \equiv \cdots \equiv k_{10} \equiv n \pmod 9$, 3 т. за довършване на решението.

Задача 10.1. Да се реши системата $\left| \begin{array}{lcl} x+a & = & y+b \\ x^3+a^3 & = & y^3+b^3 \end{array} \right.$, където $a \neq 0$ и $b \neq 0$ са реални параметри.

Решение. Записваме второто уравнение във вида $(x+a)((x+a)^2-3ax) = (y+b)((y+b)^2-3by)$. При $x+a=0$ получаваме решението $(x,y) = (-a,-b)$. Нека $x+a \neq 0$. Тогава $y+b \neq 0$ и получаваме $(x+a)^2-3ax = (y+b)^2-3by$, откъдето $3ax = 3by$. Тогава $y = \frac{ax}{b}$ и заместването в първото уравнение дава $x(1-\frac{a}{b}) = b-a$. При $a=b$ получаваме решенията $(x,y) = (x,x)$, а при $a \neq b$ намираме $(x,y) = (b,a)$.

Оценяване. 2 т. за случая $x+a=0$, 1 т. за достигане до $ax = by$, 1 т. за получаване на $x(1-\frac{a}{b}) = b-a$, по 1 т. за случаите $a=b$ и $a \neq b$.

Задача 10.2. Да се определи при кои стойности на реалния параметър m, нерaвен-

ството
$$4^{x^2} - m2^{x^2+x+1} + m^3 4^x \geq 0$$
е изпълнено за всяко цяло число x.

Решение. Полагаме $2^{x^2-x} = t$, $t > 0$ и достигаме до неравенството $t^2 - 2mt + m^3 \geq 0$. Ако x е цяло число, то $t = 2^{x^2-x}$ е измежду числата $1, 2, 4, 8, \ldots$. Така задачата се свежда до намиране на тези стойности на m, за които неравенството $t^2 - 2mt + m^3 \geq 0$ е в сила за всяко $t \in \{1, 2, 4, 8, \ldots\}$.

Случай 1. Ако $D = 4m^2 - 4m^3 = 4m^2(1-m) \leqq 0$, т.е. $m = 0$ или $m \geq 1$, то неравенството е вярно не само за всички цели, но и за всички реални стойности на x.

Случай 2. Ако $D = 4m^2(1-m) > 0$, то $m < 1$, $m \neq 0$, върхът на параболата има абсциса m и следователно е необходимо 1 да е надясно от корените, т.е.
$$f(1) \geq 0 \Leftrightarrow m^3 - 2m + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (m-1)(m^2+m-1) \geq 0,$$
откъдето $m \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right]$.

Окончателно получаваме $m \in \left[\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}, \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right] \cup [1, +\infty)$

Оценяване. 1 т. за полагането $2^{x^2-x} = t$; 1 т. за правилно дефиниране на еквивалентната задача касаеща квадратното неравенство; 1 т. за случая $D \leqq 0$, 2 т. за случая $D > 0$, 1 т. за получаване на отговора.

Задача 10.3. Върху страната BC на $\triangle ABC$ е избрана вътрешна точка K така, че $2 \sphericalangle BAK = 3 \sphericalangle KAC$. Да се докаже, че $AB^2.AC^3 > AK^5$.

Решение. Да означим $\sphericalangle BAC = \alpha$ и да построим точките $D_0, D_1, \ldots, D_5$ във вътрешността и по контура на $\sphericalangle BAC$ така, че $B \equiv D_0$, $C \equiv D_5$, а за $i = 0, 1, \ldots, 4$ да имаме $\sphericalangle D_iAD_{i+1} = \frac{1}{5} \sphericalangle BAC$, и $AD_i^5 = AB^{5-i}.AC^i$. Тогава триъгълниците D_iAD_{i+1}, $i = 0, 1, \ldots, 4$, са подобни (по равни отношение на две страни и ъгъл между тях). Нещо повече, имаме $\sphericalangle D_0D_1D_2 = \sphericalangle D_0D_1A + \sphericalangle AD_1D_2 = \sphericalangle BD_1A + ABD_1 = 180^\circ - \frac{\alpha}{5} < 180^\circ$ и аналогично $\sphericalangle D_iD_{i+1}D_{i+2} < 180^\circ$ за $i = 1, 2, 3, 4$. Следователно многоъгълникът $ABD_1D_2D_3D_4C$ е изпъкнал, а в него диагоналите BC и AD_3 се пресичат в точка K, вътрешна за отсечката AD_3. Оттук $AK < AD_3 = AB^{2/5}.AC^{3/5}$, откъдето следва исканото неравенство.

Оценяване. 1 т. за избора за точките D_i (но не и за построяване на ъглополовящи), 2 т. за подобията, 2 т. за изпъкналостта, 2 т. за довършване.

Задача 10.4. Ще наричаме едно 10-цифрено естествено число *добро*, ако цифрите му са две по две различни. Нека A е броят на добрите числа, които остават добри и след умножение с 2, а B е броят на добрите числа, които остават добри и след умножение с 5. Да се намери отношението $\dfrac{A}{B}$.

Решение. За всяко добро число $\overline{a_1a_2\ldots a_{10}}$, да образуваме периодичната десетична дроб $\alpha = 0,(a_1a_2\ldots a_{10})$. Ще наричаме добра всяка такава десетична дроб. Ако α и $\{2\alpha\}$ са добри, ще казваме, че α е A-добра и аналогично, ако α и $\{5\alpha\}$ са добри, ще казваме, че α е B-добра.

За всяка добра дроб α, да разгледаме множеството

$$S_\alpha = \{\alpha, \{10\alpha\}, \{10^2\alpha\}, \ldots, \{10^9\alpha\}\}.$$

Очевидно всяка дроб от S_α поражда отново S_α. Да забележим още, че всички дроби в едно такова множество са едновременно A-добри или едновременно B-добри.

Ако дробта α е A-добра, то $\{2\alpha\}$ е B-добра и, аналогично, ако α е B-добра, то $\{5\alpha\}$ е A-добра. Освен това множествата, съпоставени на α и $5\{2\alpha\}$ (или $2\{5\alpha\}$) са всъщност едно и също множество, т.е. $S_\alpha = S_{5\{2\alpha\}} = S_{2\{5\alpha\}}$. По този начин получаваме взаимно-еднозначно съответствие между множествата, съпоставени на A-добри дроби, и множествата, съпоставени на B-добри дроби. В частност, броят на множествата от двата вида е един и същ.

Във всяко множество, съпоставено на A-добра дроб, има точно четири дроби, чиито периоди представляват A-добри числа – това са точно дробите, чиито периоди започват с 1, 2, 3 или 4, защото в този случай $\{2\alpha\} = 2\alpha$ (последното равенство е вярно и когато периодът започва с 0, но такава дроб не отговаря на добро число). Аналогично, всяко множество, съпоставено на B-добра дроб, съдържа точно една дроб, чийто период представлява B-добро число – тази, чийто период започва с 1. Понеже всяко добро число е период на дроб в някое от множествата S_α, горните разсъждения означават, че $A = 4B$, т.е. търсеното отношение е $\dfrac{A}{B} = 4$.

Оценяване. 1 т. за преминаване към десетични дроби или друг инвариант, който дава по-добра редакция на задачата, 1 т. за въвеждане на множеството S_α, 2 т. за установяване на взаимно-еднозначно съответствие между множеството от множества, съпоставени на A-добри дроби, и множеството от и множества, съпоставени на B-добри дроби, 2 т. за съображението за по 4 (съответно 1) дроби, съответни на A-добри (съответно B-добри) числа, 1 т. за заключението.

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които уравнението $\log_{x+a}(x+2a) = \dfrac{1}{2}$ има единствено решение.

Решение. Множеството от допустими стойности се задава с $x + a > 0$, $x + a \neq 1$ и $x + 2a > 0$. В това множество уравнението е еквивалентно на $\sqrt{x+a} = x + 2a$. След повдигане на втора степен получаваме $f(x) = x^2 + (4a-1)x + 4a^2 - a = 0$.

Това уравнение има корени при $D = 1 - 4a \geq 0$, или $a \leq \dfrac{1}{4}$. При $a = \dfrac{1}{4}$ получаваме единствено решение $x = 0$, което е от множеството от допустими стойности.

Когато $D > 0$ квадратното уравнение има два корена $x_1 < x_2$. Ако допуснем, че за някой от корените е изпълнено $x_i + a = 1$, то от $\sqrt{x_i + a} = x_i + 2a$ следва, че $a = 0$. Обратно, при $a = 0$ получаваме корени $x_1 = 0$ и $x_2 = 1$, като и двата корена не са от множеството от допустими стойности.

Нека $a \neq 0$. Тъй като неравенствата $\dfrac{1-4a}{2} > -a$ и $\dfrac{1-4a}{2} > -2a$ са еквивалентни съответно на $a \leq \dfrac{1}{2}$ и $1 > 0$, то $x_2 > -a$ и $x_2 > -2a$, т.е. x_2 е решение. Понеже $f(-a) = a^2 > 0$, то x_1 не е решение при $f(-2a) < 0$, което дава $a < 0$.

Следователно търсените стойност са $a = \dfrac{1}{4}$ и $a < 0$.

Оценяване. 1 т. за определяне на допустими стойности; 2 т. за получаване на $a = \dfrac{1}{4}$; 3 т. за останалата част от решението.

Задача 11.2. В $\triangle ABC$ разстоянието от върха B до центъра на вписаната окръжност е равно на радиусът на описаната около триъгълника окръжност и $\cos \sphericalangle ABC = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$. Да се докаже, че $\triangle ABC$ е правоъгълен.

Решение. Ако означим с I центърът на вписаната окръжност за $\triangle ABC$, то от синусовата теорема за $\triangle ABI$ получаваме

$$\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{BI}{\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2R\sin\gamma}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = \frac{2R\sin(\alpha+\beta)}{\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)} = 4R\sin\left(\frac{\gamma}{2}\right).$$

Следователно $\sin\dfrac{\gamma}{2}\sin\dfrac{\alpha}{2} = \dfrac{1}{4}$. Пресмятаме

$$\sin\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{7}-1}{4} \quad \text{и} \quad \cos\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\beta}{2}} = \frac{\sqrt{7}+1}{4}.$$

Освен това

$$\frac{1}{2} = 2\sin\frac{\gamma}{2}\sin\frac{\alpha}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \cos\frac{\alpha+\gamma}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \sin\frac{\beta}{2} = \cos\frac{\alpha-\gamma}{2} - \frac{\sqrt{7}-1}{4},$$

откъдето намираме $\cos\dfrac{\alpha-\gamma}{2} = \dfrac{\sqrt{7}+1}{4} = \cos\dfrac{\beta}{2}$. Оттук директно следва, че $\alpha - \gamma = \beta$ или $\gamma - \alpha = \beta$, т.е. $\alpha = 90^\circ$ или $\gamma = 90^\circ$.

Оценяване. 2 т. за използване на $BI = R$ за получаване на зависимост между ъглите; 1 т. за незавършени преобразувания, които водят до решение.

Задача 11.3. Дадени са реални числа a, b, c и d, за които

$$a\sqrt{c^2-b^2}+b\sqrt{d^2-a^2}=c^2d^2-cd+1.$$

Да се намери стойността на израза $a^2c^2+b^2d^2$.

Решение. Тъй като $c^2 \geq b^2$ и $d^2 \geq a^2$, то съществуват ъгли α и β от интервала $[0,\pi]$, за които $b=c\cos\alpha$ и $a=d\cos\beta$. Заместваме в даденото в условието равенство и като използваме неравенството $c^2d^2-cd+1\geq|cd|$ (то е очевидно за $cd<0$, а при $cd\geq 0$ е еквивалентно на $(cd-1)^2\geq 0$), получаваме

$$cd\sin(\alpha+\beta)=c^2d^2-cd+1\geq|cd|.$$

За да е вярно горното, трябва $cd=1$ и $\sin(\alpha+\beta)=1$, което означава, че $\alpha+\beta=90^\circ$. Пресмятаме $a^2c^2+b^2d^2=d^2c^2\sin^2\beta+c^2d^2\sin^2\alpha=c^2d^2(\sin^2\beta+\cos^2\beta)=1$.

Забележка. Задачата може да се реши и с използване на неравенството на Коши-Буняковски.

Задача 11.4. Правоъгълна таблица, във всяка от клетките на която е записана $+1$ или -1, се нарича *балансирана*, ако сборът от числата във всеки нейн стълб е равен на нула. С $f(n)$ означаваме най-голямото естествено число, за което всяка балансирана таблица с $4n$ реда и $f(n)$ стълба има балансирана $2n\times f(n)$ подтаблица.

а) Да се докаже, че за всяко нечетно n е изпълнено $f(n)=2$.

б) Да се докаже, че за всяко нечетно n е изпълнено $f(2n)\leq 5$.

Решение. а) Първо ще покажем, че всяка балансирана $4n\times 2$ таблица A има балансирана $2n\times 2$ подтаблица. Тъй като умножаването на стълбовете на A с -1 не променя свойствата на таблицата, можем да считаме, че измежду редовете на A има $a\geq n$ реда $\boxed{+|+}$. Тогава в A има $2n-a$ реда $\boxed{+|-}$, $2n-a$ реда $\boxed{-|+}$ и a реда $\boxed{-|-}$. Произволни n реда от вида $\boxed{+|+}$ и на n реда от вида $\boxed{-|-}$ образуват балансирана $2n\times 2$ подтаблица.

Да разгледаме $4n\times 3$ балансирана таблица в която има по n реда от $\boxed{-|-|-}$, $\boxed{+|+|-}$, $\boxed{+|-|+}$ и $\boxed{-|+|+}$. Да допуснем, че има балансирана $2n\times 3$ подтаблица и нека тя съдържа a реда от вида $\boxed{-|-|-}$, b реда от вида $\boxed{+|+|-}$, c реда от вида $\boxed{+|-|+}$ и d реда от вида $\boxed{-|+|+}$. Тогава $a+b+c+d=2n$, $a+b=c+d$, $a+c=b+d$ и $a+d=b+c$. Събираме последните три равенства и получаваме $3a=b+c+d=2n-a$, т.е. $n=2a$, което е противоречие с четността на n.

б) Разглеждаме $8n \times 6$ таблица A, получена от n копия на показаната таблица. Да допуснем, че съществува балансирана $4n \times 6$ подтаблица B и нека в нея има a реда от вида $\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}$ и b реда от вида $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}$. Разглеждаме само първите три стълба на A и както в а) доказваме, че броят на редовете в B от вида $\boxed{-}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}$ е равен на $n-a$. Аналогично като разгледаме първия, четвъртия и петия стълб на A, получаваме, че броят на редовете в B от вида $\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{+}$ е също равен на $n-a$. Тогава броят на редовете в B от вида $\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}$ е равен на a. Аналогично намираме, че в B има по $n-b$ реда от $\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}$ и от $\boxed{+}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{-}$ и b реда $\boxed{+}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{-}\boxed{+}\boxed{+}$. Сборът на числата в последния стълб на B е равен на $2n-4a=0$, което е противоречие с четността на n. Следователно $f(2n) \leq 5$.

−	−	−	−	−	−
−	−	−	+	+	+
−	+	+	−	−	+
−	+	+	+	+	−
+	+	−	+	−	−
+	+	−	−	+	+
+	−	+	+	−	−
+	−	+	−	+	+

Оценяване. 2 т. за а) и 5 т. за б).

Задача 12.1. В триъгълна пирамида $ABCD$ стените ABC и ABD са взаимно перпендикулярни, $\angle ACD = \angle BCD = 60^\circ$ и $AD = \sqrt{91}$, $BD = \sqrt{171}$, $CD = 9$. Да се пресметне обемът на пирамидата.

Решение. От косинусовата теорема за $\triangle ACD$ и $\triangle BCD$ имаме, че $AC^2 - 9AC - 10 = 0$ и $BC^2 - 9BC - 90 = 0$, откъдето $AC = 10$ и $BC = 15$.

Нека H е ортогоналната проекция на върха D върху (ABC). Тъй като $(ABC) \perp (ABD)$, то H лежи на правата AB. Понеже $\angle ACD = \angle BCD$, то (както е известно) H лежи и върху ъглополовящата на $\angle ACB$.

По-нататък, $AD^2 - AH^2 = DH^2 = BD^2 - BH^2$ и значи $BH^2 - AH^2 = BD^2 - AD^2 = 80$. От друга страна, $\frac{BH}{AH} = \frac{BC}{AC} = \frac{3}{2}$. От тези равенства намираме $AH = 8$, $BH = 12$ и тогава $AB = 20$ и $DH = \sqrt{AD^2 - AH^2} = 3\sqrt{3}$. По хероновата формула пресмятаме $S_{ABC} = \frac{75\sqrt{15}}{4}$ и следователно $V_{ABCD} = \frac{S_{ABC}DH}{3} = \frac{225\sqrt{5}}{4}$.

Оценяване. 1 т. за намиране на AC и BC, 1 т. за определяне на положението на т. H, 2 т. за намиране на AB и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. За три различни реални числа p, q и r означаваме с S_{pqr} броя на пермутациите (a, b, c) на тези числа такива, че уравнението $2ax^3 + 3bx^2 = c$ има точно един реален корен. Да се намери най-малката възможна стойност на S_{pqr}.

Решение. Ако някое от числата е 0, например r, то уравненията $2px^3 = q$ и $2qx^3 = p$ имат точно по един реален корен.

Нека сега $pqr \neq 0$. Да разгледаме уравнението $f(x) = 2ax^3 + 3bx^2 - c = 0$, $a \neq 0$. Понеже $f'(x) = 6x(ax+b)$, то това уравнение има точно един реален корен само когато $0 < f(0)f(-b/a) = c(c - b^3/a^2)$ (защо?). Ако две от числата p, q, r имат различен знак, например q и r, следва, че при $a = p$, $b = q, r$ и $c = r, q$ уравнението има точно един реален корен. Иначе можем да считаме, че $p > q > r > 0$ и тогава при $b = r$, $a = p, q$ и $c = q, p$ уравнението има точно един реален корен.

И така, $S_{pqr} \geq 2$. Остава да отбележим, че $S_{1,0,-1} = 2$, защото единствените пермутации, изпълняващи условието са $(1, 0, -1)$ и $(-1, 0, 1)$.

Оценяване. 2 т. за $c(c - b^3/a^2) > 0$, 3 т. за $S_{pqr} \geq 2$ и 1 т. за пример.

Задача 12.3. Нека $a_1, a_2, \ldots$ е такава редица от реални числа, че $a_1 > 0$ и $a_{n+1} = a_n + \sqrt{a_n^2 + 1}$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че съществува $n \in \mathbb{N}$, за което $\pi a_n > 2^n$.

Решение. Полагаме $a_1 = \cot \frac{\alpha}{2}$, $\alpha \in (0, \pi)$, и тогава по индукция следва, че $a_n = \cot \dfrac{\alpha}{2^n}$. Понеже $\lim\limits_{x \to 0} x \cot x = 1$, то $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{\alpha} > \dfrac{1}{\pi}$. Следователно съществува $n_0 \in N$ такова, че $\dfrac{a_n}{2^n} > \dfrac{1}{\pi}$ при $n \geq n_0$.

Оценяване. 3 т. за $a_n = \cot \dfrac{\alpha}{2^n}$, 3 т. за $\lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{a_n}{2^n} = \dfrac{1}{\alpha}$ и 1 т. за заключението.

Задача 12.4. Нека $n > 1$ е естествено число и $S_n = 1^n + 2^n + \cdots + (n-1)^n$. Да се докаже, че:

а) n^2 дели S_n за всяко нечетно n;

б) n^3 дели S_n за безбройно много n.

Решение. а) Ако $n = 2m + 1$, то $S_n = \sum_{k=1}^{m} (k^n + (n-k)^n)$. Освен това,

$$k^n + (n-k)^n = k^n - k^n + nk^{n-1}n - \binom{n}{2} k^{n-2} n^2 + \cdots + n^n =$$

$$n^2 k^{n-1} - n^3 \frac{n-1}{2} k^{n-2} + \cdots + n^n. \qquad (*)$$

Следователно $n^2 | k^n + (n-k)^n$ и значи $n^2 | S_n$.

б) От (*) следва, че $k^n + (n-k)^n \equiv n^2 k^{n-1} (\mathrm{mod}\ n^3)$ за нечетно n. Тогава $S_n \equiv n^2 R_n (\mathrm{mod}\ n^3)$, където $R_n = \sum_{k=1}^{m} k^{n-1}$. Следователно $n^3 | S_n \Leftrightarrow n | R_n$. Понеже $n-1$ е четно число, то $k^{n-1} \equiv (n-k)^{n-1} (\mathrm{mod}\ n)$ и значи

$$2R_n \equiv \sum_{k=1}^{m} (k^{n-1} + (n-k)^{n-1}) = T_n (\mathrm{mod}\ n),$$

където $T_n = \sum_{k=1}^{n-1} k^{n-1}$. Така $n^3 | S_n \Leftrightarrow n | T_n$.

Ще търсим n от вида pq, където p и q са различни нечетни прости числа. Тогава

$$T_n = \sum_{i=0}^{q-1} \sum_{j=0}^{p-1} (ip + j)^{n-1} \equiv q P_n (\mathrm{mod}\ p),$$

където $P_n = \sum_{j=1}^{p-1} j^{n-1}$. Аналогично $T_n \equiv pQ_n \pmod q$, където $Q_n = \sum_{j=1}^{q-1} j^{n-1}$. Сега е ясно, че $n|T_n \Leftrightarrow p|P_n, q|Q_n$.

Ще докажем, че ако $p-1 \nmid q-1$, т.е. $p-1 \nmid n-1$, то $n|P_n$. Ще използваме, че съществува примитивен корен по модул p, т.е. число a $(1 \leq a \leq p-1)$, чийто показател по модул p е равен на $p-1$. Понеже числата $a, 2a, \dots, (p-1)a$ образуват пълна система от ненулеви остатъци по модул p, следва, че $a^{n-1}P_n \equiv P_n \pmod p$. Но $a^{n-1} \not\equiv 1 \pmod p$, тъй като иначе показателят $p-1$ на a по модул p трябва да дели $n-1$. Следователно $p|P_n$. Аналогично $q|Q_n$, ако $q-1 \nmid p-1$.

Така получихме, че ако $n = pq$, $p-1 \nmid q-1$ и $q-1 \nmid p-1$, то $n^3|S_n$. Остава да покажем, че има безбройно много двойки (p,q) от прости числа с това свойство. Достатъчно е да изберем $p = 5$ и да използваме, че има безбройно много прости числа q от вида $q = 4t+3$ $(t \in \mathbb{N})$.

Оценяване. а) 2 т. (1 т. за $n|S_n$); б) 1 т. за $n^3|S_n \Leftrightarrow n|R_n$, 1 т. за $n = pq|T_n \Leftrightarrow p|P_n, q|Q_n$, 2 т. за $p-1 \nmid n-1 \Rightarrow p|P_n$ и 1 т. за довършване на решението.

Задачите са предложени от:

9.1., 9.4 - Иван Тонов; 9.2., 9.3., 10.2. - Стоян Боев; 10.1. - Петър Бойваленков и Николай Николов; 10.3., 10.4. - Николай Белухов; 11.1., 11.2., 11.3, 11.4 - Александър Иванов, Емил Колев; 12.1., 12.4. - Керопе Чакърян; 12.2, 12.3. - Николай Николов.

Брошурата е подготвена от:

Емил Колев, Петър Бойваленков, Стоян Боев и Николай Николов