<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

23.05.2013 Г. – <u>ВАРИАНТ 1</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Най-малко е числото:

А) $\left(\frac{7}{6}\right)^2$ **Б)** 1 **В)** $\left(\frac{5}{3}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **Г)** $\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{1}{2}}$

2. Стойността на израза $\frac{x+3}{x^2-9}-\frac{1}{x-3}+\frac{x-2013}{x+3}$ **за** $x=2013$ **е равна на:**

А) 2 **Б)** 1 **В)** 0 **Г)** -2013

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{|x|}}{x}$ **са:**

А) $(-\infty;+\infty)$ **Б)** $[0;+\infty)$ **В)** $(-\infty;0]$ **Г)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$

4. Числото $\log_2 3$ **е корен на уравнението:**

А) $3^x=2$ **Б)** $2^x=3$ **В)** $3^x=\frac{1}{2}$ **Г)** $2^x=\frac{1}{3}$

5. На кое от уравненията сборът от реалните корени е $2{,}5$**?**

А) $2x^2-5x+5=0$ **Б)** $2x^2-5x+3=0$

В) $2x^2-2x+5=0$ **Г)** $2x^2+5x-3=0$

6. Решенията на неравенството $x^2-2x+3>0$ **са:**

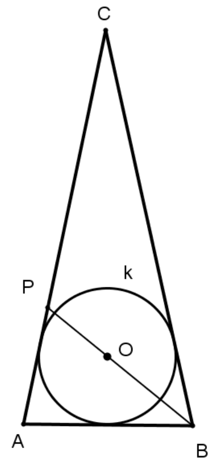
А) $x\in\varnothing$ **Б)** $x\in(-\infty;-1)\cup(3;\infty)$

В) $x\in(-\infty;-3)\cup(1;\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;\infty)$

7. Стойността на $\sin 240^\circ$ **е:**

А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

8. В равнобедрен $\triangle ABC\left(AC = BC\right)$ **е вписана окръжност** k **с център** O**.**
Лъчът $BO^{\rightarrow}$ **пресича страната** AC **в точка** P, **като** $AP = 6\text{ cm}$ **и** $PC = 12\text{ cm}$**. Периметърът на** $\triangle ABC$ **е :**



А) 72 cm **Б)** 45 cm

В) 9 cm **Г)** невъзможно да се определи

9. В $\triangle ABC$ $AB = 7\text{ cm}$**, а** $AC = 5\text{ cm}$**. Ако** $\angle ACB = 120^\circ$**, то дължината на страната** BC **е:**

А) 3 cm **Б)** 6 cm **В)** $\sqrt{39}$ cm **Г)** 8 cm

10. Ако общият член на числова редица е $a_n = \left(-1\right)^{n+1}(n+1) - 3.(-1)^n$**, то** a_{13} **е равен на:**

А) –16 **Б)** –11 **В)** 10 **Г)** 17

11. Дадена е крайна геометрична прогресия с $a_1 = 729$**,** $q = \frac{1}{3}$ **и** $a_n = \frac{1}{9}$**. Броят** n **на членовете на прогресията е:**

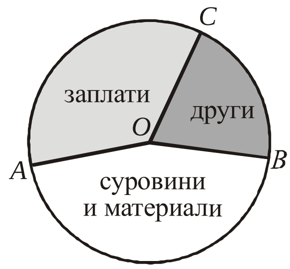
А) 5 **Б)** 7 **В)** 8 **Г)** 9

12. Наредените двойки числа $\left(x; y\right)$**, които са решения на системата** $\left|\begin{array}{l} y = 6 - x^2 \\ y = -x \end{array}\right.$**, са разположени:**

А) само в първи квадрант **Б) само в четвърти квадрант**

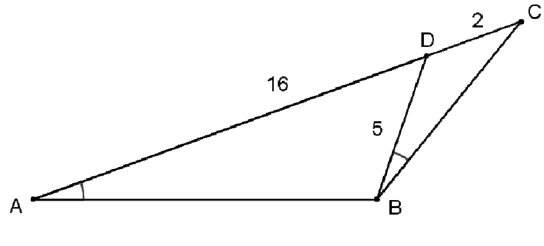
В) във втори и в четвърти квадрант **Г) в първи и в трети квадрант**

13. Разходите на фирма за един месец са 18 000 лв**. Тяхното разпределение е представено чрез кръговата диаграма. Ако** $\angle AOB = 170°$ **и** $\angle BOC = 64°$ **, то разходите за заплати са:**



А) 3200 лв. **Б)** 6000 лв. **В)** 6300 лв. **Г)** 8500 лв.

14. На страната AC **на** $\triangle ABC$ **е взета точка** D**, така че** $\angle DBC = \angle CAB$**. Ако** $AD = 16$ cm**,** $DC = 2$ cm **и** $BD = 5$ cm**, то дължината на страната** AB **е равна на:**



А) 6 cm **Б)** 15 cm **В)** $\frac{55}{3}$ cm **Г)** 36 cm

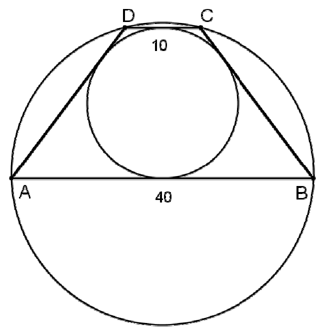
15. За $\triangle ABC$ **е дадено, че** $AB = 5$ **и** $\sin\angle CAB : \sin\angle CBA = 3:2$ **. Ако** $AC^2 + BC^2 = 117$ **, то периметърът на триъгълника е:**

А) 20 **Б)** 18 **В)** $5+3\sqrt{17}$ **Г)** $5+3\sqrt{85}$

16. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник има дължина 6 cm **и сключва с един от катетите ъгъл** 30°**. Лицето на триъгълника е:**

А) 18 cm^2 **Б)** 36 cm^2 **В)** $24\sqrt{3}$ cm^2 **Г)** $48\sqrt{3}$ cm^2

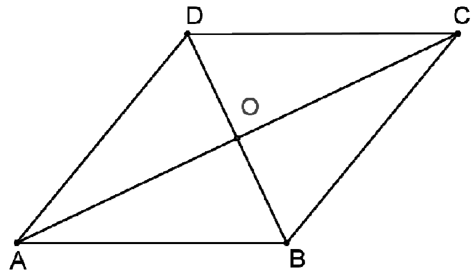
17. Около трапеца $ABCD$ **с основи** $AB = 40$ cm **и** $CD = 10$ cm **е описана окръжност. Ако в трапеца е вписана окръжност, то дължината на нейния радиус е:**



А) 10 cm **Б)** 15 cm

В) 20 cm **Г)** друг отговор

18. Дължината на единия диагонал на ромб е 75% **от дължината на другия, а лицето му е** $24\ \text{cm}^2$**. Радиусът на вписаната в ромба окръжност е:**



А) $8\ \text{cm}$ **Б)** $6\ \text{cm}$

В) $4,8\,\text{cm}$ **Г)** $2,4\ \text{cm}$

19. В $\triangle ABC$ $AB=8,\ AC=15$ **и** $\angle BAC=60^\circ$**. Височината** AH $(H\in BC)$ **на триъгълника е:**

А) $\dfrac{60}{13}$ **Б)** $\dfrac{60\sqrt{3}}{13}$ **В)** $\dfrac{60\sqrt{3}}{7}$ **Г)** $\dfrac{120\sqrt{3}}{13}$

20. Колко са трицифрените четни числа с различни цифри, цифрата на десетиците на които е нула?

А) 32 **Б)** 36 **В)** 45 **Г)** 72

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

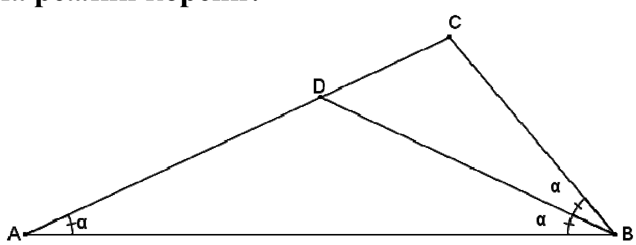
21. Намерете решенията на неравенството $(x+6)(36-x^2)\leq 0$.

22. Да се реши уравнението $\dfrac{x}{2-x}+\dfrac{x+4}{x^2-x-2}=2$.

23. В серия от 30 **опита участник в стрелба по цел е получил** 13,5 **наказателни точки. Колко попадения е реализирал участникът, ако за първия пропуск наказанието е една точка, а всеки следващ пропуск се наказва с половин точка повече от предходното наказание?**

24. Коефициентът c **на квадратното уравнение** $x^2-2x+c=0$ **е цяло число от интервала** $[-2;\ 3]$**. Каква е вероятността уравнението да има реални корени?**

25. Даден е $\triangle ABC$ **с ъглополовяща** BD**. Ако** $\angle ABC=2\angle CAB,\ AC=3CD=18$**, намерете** S_{ABC}**.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Намерете корените на уравнението $x^2-2x=t$, където t е решение на уравнението $\sqrt{t+1}-\sqrt{2t-5}=1$.

27. Да се докаже, че ако α,β и γ са ъгли в триъгълник, то е изпълнено тъждеството $\sin\alpha+\sin\beta-\sin\gamma=4\sin\frac{\alpha}{2}\sin\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$.

28. В остроъгълния $\triangle ABC$ медианата AM $(M\in BC)$ и височината CH $(H\in AB)$ са съответно равни на $6\sqrt{5}\,\text{cm}$ и 12 cm. Ако страната $BC=20\,\text{cm}$, намерете дължината на радиуса на описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x \qquad a^{\log_a b}=b \qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 23 май 2013 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**В**	2
2	**В**	2
3	**Г**	2
4	**Б**	2
5	**Б**	2
6	**Г**	2
7	**А**	2
8	**Б**	2
9	**А**	2
10	**Г**	2
11	**Г**	3
12	**В**	3
13	**В**	3
14	**Б**	3
15	**А**	3
16	**В**	3
17	**А**	3
18	**Г**	3
19	**Б**	3
20	**А**	3
21	$x \in [6;+\infty) \cup \{-6\}$	4
22	$x_1 = -\frac{4}{3}$	4
23	24	4
24	$\frac{2}{3}$	4
25	$S_{ABC} = 54\sqrt{3}$	4
26	$t = 3,\ x_1 = -1, x_2 = 3$	10
27	-	10
28	$R = \frac{10\sqrt{10}}{3}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. Получаване на уравнението $\sqrt{t+1}=1+\sqrt{2t-5}$ (1 т.)

2. Получаване на уравнението $2\sqrt{2t-5}=5-t$ (2 т.)

3. Получаване на уравнението $t^2-18t+45=0$ (1 т.)

4. Намиране на корените $t_1=15,\ t_2=3$ на квадратното уравнение (2 т.)

5. Проверка дали $t_1=15,\ t_2=3$ са корени на ирационалното уравнение (2 т.)

6. Намиране на корените $x_1=-1,\ x_2=3$ на уравнението $x^2-2x=3$ (2 т.)

Забележка. Ако решаването на съответните ирационални уравнения е свързано с еквивалентни преобразования, двете точки за проверка се добавят към получените точки за решаване на уравненията.

27. Критерии за оценяване:

1. За използване на $\alpha+\beta+\gamma=\pi$ (1 т)
2. За изразяване на $\gamma=\pi-(\alpha+\beta)$ (1 т.)
3. За преобразуване на $\sin\alpha+\sin\beta$ или $\sin\alpha-\sin\gamma$ в произведение (2 т.)
4. За изразяване на $\sin\gamma=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (1 т.)
5. За изнасяне пред скоби на общ множител (1 т.)
6. За преобразуване на разлика на косинуси в произведение (2 т.)
7. За довършване на преобразуванията и доказване на тъждеството (2 т.)

28. Критерии за оценяване:

I начин

1. Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle HBC$ и намиране $HB=16\,\mathrm{cm}$ (1 т.)
Означаване $AH=x$ и $AC=y$
2. Прилагане на формула за медианата AM

$$\left(6\sqrt{5}\right)^2=\frac{1}{4}\left[2(x+16)^2+2y^2-400\right]$$

и получаване на уравнението $(x+16)^2+y^2-560=0$ (2 т.)
3. Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle AHC$
и получаване на уравнението $x^2+144=y^2$ (1 т.)
4. Съставяне на системата $\left|\begin{array}{l}x^2+144=y^2\\(x+16)^2+y^2-560=0\end{array}\right.$ (1 т.)

5. Решение на системата и намиране $x = 4$ и $y = 4\sqrt{10}$ (2 т.)

6. Намиране на $\sin\angle ABC = \dfrac{3}{5}$ (1 т.)

7. Прилагане на синусова теорема за $\triangle ABC$ и намиране на $R = \dfrac{10\sqrt{10}}{3}$ (2 т.)

II начин:

1.Прилагане на Питагорова теорема за $\triangle HBC$ и намиране $HB = 16\,\text{cm}$ (1 т.)

2. Изразяване на $\sin\angle ABC = \dfrac{3}{5}$ (1 т.)

3. Намиране на $\cos\angle ABC = \dfrac{4}{5}$ (2 т.)

4. Прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABM$ и намиране на $AB = 20\,\text{cm}$ и $AH = 4$ cm (2 т.)

5. Прилагане на косинусова теорема за $\triangle ABC$ и намиране на $AC = 4\sqrt{10}$ cm (2 т.)

6. Прилагане на синусова теорема за $\triangle ABC$ (1 т.)

7. Намиране $R = \dfrac{10\sqrt{10}}{3}$ (1 т.)