

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

27.05.2013 Г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Колко на брой от числата $(0,5)^{-2}$, $\log_{\frac{1}{2}} 4$ и $(-27)^{\frac{1}{3}}$ са цели?

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

2. Стойността на израза $\frac{\sqrt{5^3}}{\sqrt[3]{5^4}}$ е:

- А) $\sqrt[6]{5}$ Б) $\frac{1}{\sqrt[12]{5}}$ В) $\frac{1}{\sqrt[6]{5}}$ Г) 5

3. При $x \neq 2$, $x \neq \frac{1}{2}$ изразът $\frac{2x^2 + x - 1}{-2x^2 + 5x - 2}$ е тъждествено равен на:

- А) $\frac{x+1}{2-x}$ Б) $\frac{x+1}{x-2}$ В) $\frac{x-1}{x+2}$ Г) $\frac{1-x}{x+2}$

4. Числената стойност на израза $\sqrt{\log_2 \sqrt[4]{2}}$ е равна на:

- А) -2 Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) 2

5. Ако реалните корени на уравнението $x^2 - 2x - 8 = 0$ са x_1 и x_2 , то стойността на израза

$\frac{x_2}{1 + \frac{x_2}{x_1}}$ е равна на:

- А) -8 Б) -4 В) -2 Г) 4

6. Кое от неравенствата няма решение?

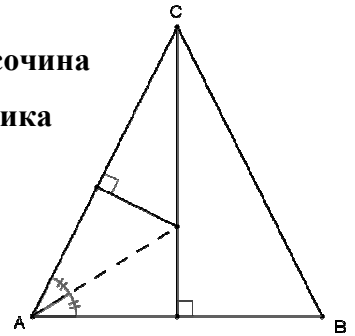
- А) $x^2 + 2x + 1 \leq 0$ Б) $x^2 > 1$ В) $-x^2 < 1$ Г) $x^2 - 2x + 3 \leq 0$

7. Ако $\alpha = \frac{\pi}{6}$, то стойността на израза $\frac{\sin \alpha}{\cotg 3\alpha - \cos 2\alpha}$:

- А) е $-\sqrt{3}$ Б) е -1 В) е 1 Г) не съществува

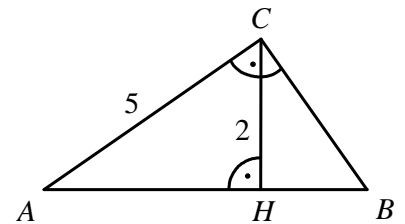
8. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$ с ъгъл при основата равен на α и височина към основата с 3 cm по-голяма от радиуса на вписаната в триъгълника окръжност. Радиусът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност е равен на:

- А) $3 \cos \alpha$ Б) $3 \sin \alpha$
 В) $\frac{3 \cos \alpha}{1 - \sin \alpha}$ Г) $\frac{3 \sin \alpha}{1 - \sin \alpha}$



9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ с катет $AC = 5 \text{ cm}$ и височина към хипотенузата $CH = 2 \text{ cm}$. Дължината на отсечката BH е:

- А) $\sqrt{21} \text{ cm}$ Б) $\frac{4\sqrt{21}}{21} \text{ cm}$
 В) $\frac{5}{2} \text{ cm}$ Г) $\frac{25\sqrt{21}}{21} \text{ cm}$



10. Дадена е числова редица с общ член $a_n = 2a_{n-1} + 1, \forall n \in \mathbb{N}$. Ако $a_2 = 4$, то първият член на редицата е:

- А) 0,5 Б) 1 В) 1,5 Г) 2

11. За геометрична прогресия е дадено, че $a_3 = -36$ и $a_6 = 288$. За първия член и частното на прогресията е вярно, че:

- А) $a_1 = 9; q = 2$ Б) $a_1 = -9; q = -2$ В) $a_1 = 9; q = -2$ Г) $a_1 = -9; q = 2$

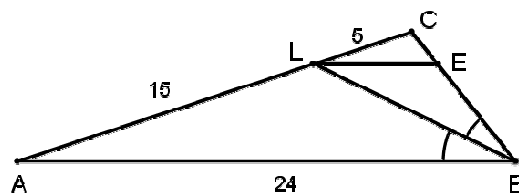
12. Броят на реалните корени на уравнението $(x-1)(x-2)\sqrt{1-x} = 0$ е:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

13. В една фирма работят 5 работници със заплата 380 лв, 2 специалисти със заплата 500 лв. и 1 ръководител (собственик) със заплата 2700 лв. Колко от служителите получават заплата, по-ниска от средната заплата във фирмата?

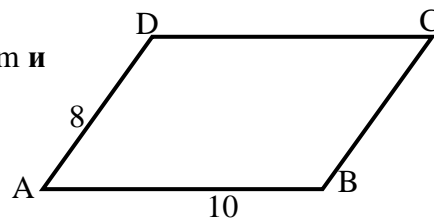
- А) 0 Б) 5 В) 6 Г) 7

14. В $\triangle ABC$ $AB = 24$, а ъглополовящата BL разделя страната AC на части $AL = 15$ и $LC = 5$. През точка L е построена права, успоредна на AB , която пресича BC в точка E . Отсечката CE е равна на:



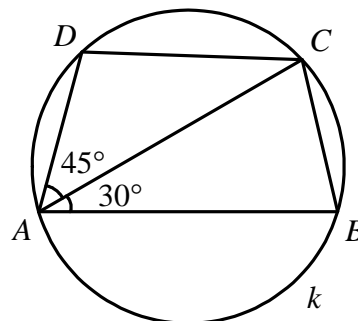
- А) 2 Б) 6 В) 8 Г) 12

15. Даден е успоредник $ABCD$ със страни $AB = 10$ cm, $AD = 8$ cm и $\operatorname{tg} \angle DAB = \frac{4}{3}$. Лицето на успоредника $ABCD$ е равно на:



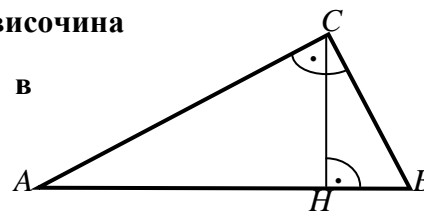
- А) 24 cm² Б) 32 cm² В) 48 cm² Г) 64 cm²

16. Върху окръжност k са избрани точки A, B, C и D така, че $\angle BAC = 30^\circ$ и $\angle CAD = 45^\circ$. Отношението $BC : CD$ е:



- А) $1 : \sqrt{2}$ Б) $\sqrt{3} : \sqrt{2}$
В) $\sqrt{2} : 1$ Г) невъзможно да се определи

17. На чертежа $\triangle ABC$ е правоъгълен с хипотенуза $AB = 25$ cm, височина към нея $CH = 12$ cm и $AC > BC$. Тангенсът на най-малкия ъгъл в триъгълника е равен на:



- А) $\frac{3}{5}$ Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{4}{5}$ Г) $\frac{4}{3}$

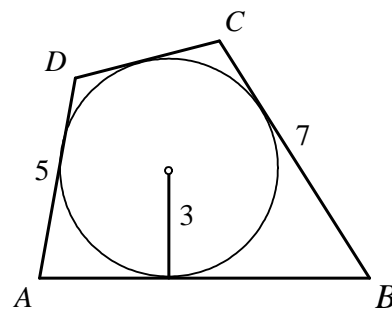
18. Четириъгълникът $ABCD$ със страни $AD = 5$ cm и $BC = 7$ cm е описан около окръжност с радиус 3 cm. Лицето на $ABCD$ е:

A) 36 cm^2

Б) 48 cm^2

В) 72 cm^2

Г) невъзможно да се определи



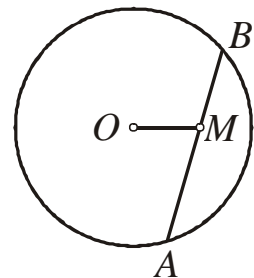
19. Радиусът на окръжността е 6 cm и $OM = 4$ cm. Ако $AM = 5$ cm, то дължината на MB е:

A) 2 cm

Б) 3 cm

В) 4 cm

Г) 5 cm



20. В помагало по математика за зрелостен изпит има 100 задачи от първи вид, 50 задачи от втори вид и 20 задачи от трети вид. По колко начина могат да се изберат задачи за изпитна тема по математика, която съдържа 20 задачи от първи вид, 5 задачи от втори вид и 3 задачи от трети вид?

A) $V_{100}^{20} \cdot V_{50}^5 \cdot V_{20}^3$

Б) $V_{100}^{20} + V_{50}^5 + V_{20}^3$

В) $C_{100}^{20} + C_{50}^5 + C_{20}^3$

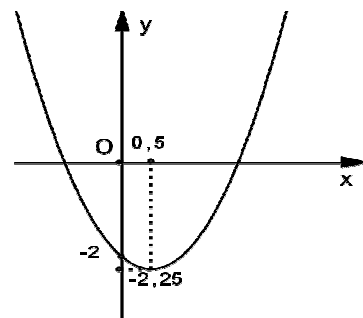
Г) $C_{100}^{20} \cdot C_{50}^5 \cdot C_{20}^3$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете решенията на неравенството $(x^2 - 3x + 2)(x - 1)(x^2 + 1) < 0$.

22. Да се реши уравнението $\sqrt{1-x} - \sqrt{x+4} = 1$.

23. Запише във вида $y = ax^2 + bx + c$ функцията, графиката на която е дадена на чертежа.



24. Средният успех на учениците от три класа от едно училище е 5,10. Средният успех на учениците от първия клас е 5,40, а на учениците от втория клас е 4,70. Определете средния успех на учениците от третия клас, ако се знае, че броят на учениците във всеки клас е един и същ.

25. Трапецът $ABCD$ е вписан в полуокръжност с диаметър $AB = 10$ cm. Намерете периметъра на трапеца, ако е известно, че основата CD е равна на бедрото AD .

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението
$$2\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - 5\left(x^2 - \frac{1}{2}\right) - 7 = 0$$

27. Намерете вероятността при хвърляне едновременно на два стандартни зара да се паднат точки със сбор не по-малък от 8.

28. В $\triangle ABC$ със страни $AC = 15$ cm и $BC = 12$ cm CL ($L \in AB$) е ъглополовящата на $\angle ACB$. През точките A , C и L е построена окръжност, която се допира до правата BC . Намерете дължините на отсечките AL , BL и CL .

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА
И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 27 май 2013 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с избран отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Г	2
2	А	2
3	А	2
4	В	2
5	Б	2
6	Г	2
7	Б	2
8	А	2
9	Б	2
10	В	2
11	Б	3
12	Б	3
13	Г	3
14	А	3
15	Г	3
16	А	3
17	Б	3
18	А	3
19	В	3
20	Г	3
21	$x \in (-\infty; 1) \cup (1; 2)$	4
22	$x_1 = -3$	4
23	$y = x^2 - x - 2$	4
24	5, 20	4
25	$P_{ABCD} = 25 \text{ cm}$	4
26	$x_1 = -2, x_2 = 2$	10
27	$\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$	10
28	$AL = CL = 10, BL = 8$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. За полагането $x^2 - \frac{1}{2} = t$ (2 т.)
2. За получаването на уравнението $2t^2 - 5t - 7 = 0$ (2 т.)
3. За намиране на корените $t_1 = -1, t_2 = \frac{7}{2}$ (2 т.)
4. За извода, че за $t_1 = -1$ уравнението $x^2 - \frac{1}{2} = -1 \Leftrightarrow x^2 = -\frac{1}{2}$ няма решение (2 т.)
5. За намиране корените $x_1 = -2, x_2 = 2$ на уравнението $x - \frac{1}{2} = \frac{7}{2} \Leftrightarrow x^2 - 4 = 0$ (2 т.)

27. Критерии за оценяване:

Първи начин:

1. Определяне на всички възможности - $6 \cdot 6 = 36$ (1 т.)
2. Определяне на 5 благоприятни възможности за сбор 8 от точките на двата зара – 4,4 или 2,6 или 6,2 или 3,5 или 5,3 (2 т.)
3. Определяне на 4 благоприятни възможности за сбор 9 от точките на двата зара – 3,6 или 6,3 или 4,5 или 5,4 (2 т.)
4. Определяне на 3 благоприятни възможности за сбор 10 от точките на двата зара – 5,5 или 4,6 или 6,4 (2 т.)
5. Определяне на 2 благоприятни възможности за сбор 11 от точките на двата зара – 5,6 или 6,5 (1 т.)
6. Определяне на 1 благоприятна възможност за сбор 12 от точките на двата зара 12 – 6,6 (1 т.)
7. Намиране на търсената вероятност $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ (1 т.)

Забележка: За определяне броя на неблагоприятните възможности се присъжда същият брой точки както при определяне на благоприятните възможности.

Втори начин:

1. Съставяне на таблица с възможните точки от двата зара и техния сбор (5 т.)

I \ II	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

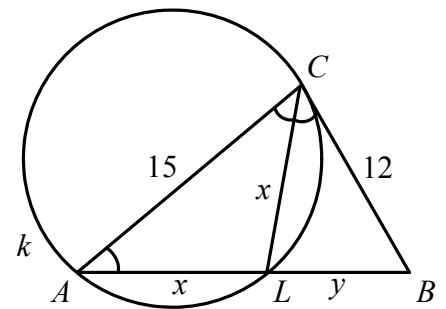
2. Преброяване на всички възможности (1 т.)
 3. Преброяване на благоприятните възможности (3 т.)
 4. Намиране на търсената вероятност $P = \frac{15}{36} = \frac{5}{12}$ (1 т.)

28. Критерии за оценяване:

1. За доказване, че $\angle BCL = \angle CAL$ (1 т.)

От $\angle BCL = \frac{1}{2} \text{м.}\widehat{CL}$ (периферен ъгъл) и от

вписаният $\angle CAL = \frac{1}{2} \text{м.}\widehat{CL} \Rightarrow \angle CAB = \angle BCL$



2. За доказване, че $\angle ACL = \angle CAL$ (1 т.)

$\angle ACL = \angle BCL$ (CL е ъглополовяща) следва, че $\angle ACL = \angle CAL$.

3. За доказване, че $AL = CL$ Означаваме $AL = CL = x$, $BL = y$. (1 т.)

4. За доказване, че $\triangle ABC \sim \triangle CBL$ ($\angle B$ е общ и $\angle BCL = \angle CAB$) и правилно

записана пропорция $\frac{AB}{BC} = \frac{AC}{CL} = \frac{BC}{BL} \Leftrightarrow \frac{x+y}{12} = \frac{15}{x} = \frac{12}{y}$ (2 т.)

5. За съставяне на еквивалентната система (2 т.)

$$\begin{cases} \frac{15}{x} = \frac{12}{y} \\ \frac{x+y}{12} = \frac{12}{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{y}{x} = \frac{4}{5} \\ (x+y)y = 144. \end{cases}$$

4. За решаване на системата и намиране на $k = 2$ (2 т.)

Заместваме $y = 4k$, $x = 5k$ в равенството $(x + y)y = 144$ и получаваме

$$36k^2 = 144 \Leftrightarrow k^2 = 4, k = 2 \text{ и } x = 10, y = 8.$$

5. За правилен отговор $AL = CL = 10$, $BL = 8$. (1 т.)

Забележка. Равенства за x и y могат да се получат още от:

– свойство на ъглополовящата: $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BL} \Leftrightarrow \frac{15}{12} = \frac{x}{y}$;

– дължината на ъглополовящата: $CL^2 = AC \cdot BC = AL \cdot BL \Leftrightarrow x^2 = xy - 15 \cdot 12$;

– свойство на секущите: $BC^2 = BL \cdot AB \Leftrightarrow 144 = y(x + y)$.