МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

18 май 2010 г. – Вариант 1

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи.**

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А В Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълните решения с необходимите обосновки.

Чертежите в теста са само за илюстрация. Те не са начертани в мащаб и не са предназначени за директно измерване на дължини на страни и мерки на ъгли.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата $a = \frac{49^{\frac{1}{2}}}{16}$ **,** $b = \left(\frac{16}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **,** $c = \frac{7}{4}$**. Колко от неравенствата**

$a \geq c$ **,** $a > b$ **,** $b > c$ **НЕ са верни?**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

2. Числата $A = \sqrt{2} - 1$ **и** $B = \sqrt{2} + 1$ **са:**

А) равни **Б) реципрочни**

В) рационални **Г) противоположни**

3. Изразът $\frac{x+3}{y+1} : \frac{x^2 + x - 6}{y^2 - 1}$ **е тъждествено равен на** $\frac{y-1}{x-2}$ **при:**

А) $y \neq \pm 1$ **Б)** $y \neq -1,\ x \neq -3$ **В)** $x \neq 2,\ x \neq -3$ **Г)** $x \neq -3, x \neq 2, y \neq \pm 1$

4. Решенията на неравенството $\frac{-x^2 + 6x - 8}{x^2 - 16} \geq 0$ **са:**

А) $x \in (-\infty; -4] \cup (2; +\infty)$ **Б)** $x \in (-4; 2) \cup [2; 4]$ **В)** $x \in [2; 4)$ **Г)** $x \in (-4; 2]$

5. Дадено е уравнението $x^2 - 3x - 5 = 0$ **с корени** x_1 **и** x_2**. Стойността на израза** $x_1(x_2 - 2) + x_2(x_1 - 2)$ **е равна на:**

А) -16 **Б)** -7 **В)** 4 **Г)** 16

6. За $x \in [-1; 1]$**, най-голямата стойност на функцията** $f(x) = 1 + 4x - x^2$ **е:**

А) –4 **Б)** 1 **В)** 4 **Г)** 5

7.Броят на решенията на уравнението $\sqrt{2-x} = \sqrt{x-2}$ **е:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г) безброй много**

8. Стойността на израза $\log_3 9 - \left(\log_3 3^{-1}\right)^2 + \frac{1}{2}\log_9 \frac{1}{81}$ **е:**

А) 3 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** 0

9. Стойността на израза $\cos 330^o - \sin 510^o$ **е:**

А) $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$ **Б)** 0 **В)** $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ **Г)** 1

10. Ако $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}=\dfrac{1}{5}$ **, то** $cotg\alpha$ **е равен на:**

А) 5 **Б)** 2 **В)** 1 **Г)** $0,2$

11. За аритметична прогресия $a_4=-\dfrac{1}{2}$ **, а** $a_{11}=3$**. Разликата на прогресията е:**

А) $-\dfrac{1}{2}$ **Б)** $-\dfrac{5}{14}$ **В)** $\dfrac{5}{14}$ **Г)** $\dfrac{1}{2}$

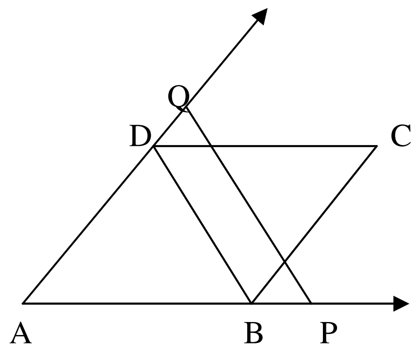
12. По колко начина могат да се изберат три учебни предмета от ЗИП от пет възможни?

А) 3 **Б)** 6 **В)** 10 **Г)** 15

13. Кое от равенствата НЕ е вярно, ако $a>0$**, а** $b<0$**?**

А) $4a^4b^4=a^2\sqrt{16a^4b^8}$ **Б)** $a^2b=\sqrt{a^4b^2}$

В) $\sqrt{8ab^2}=2|b|\sqrt{2a}$ **Г)** $3\sqrt{2a^2b^4}=\sqrt{18}ab^2$



14. На чертежа $ABCD$ **е успоредник и** $PQ\parallel BD$**. Ако** $AB=8$ **cm,** $BC=6$ **cm и** $AP=12$ **cm, то дължината на** DQ **е:**

А) $1,5$ **cm** **Б)** 2 **cm**

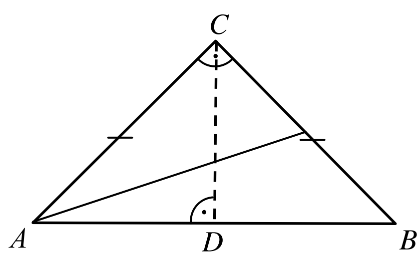
В) 3 **cm** **Г)** 4 **cm**

15. Страните на триъгълник са $BC=27$ **cm,** $AC=36$ **cm и** $AB=21$ **cm. Намерете отношението, в което центърът на вписаната окръжност дели ъглополовящата** $CL(L\in AB)$**, считано от точка** C**.**

А) 2:1 **Б)** 1:2 **В)** 4:1 **Г)** 3:1

16. Триъгълникът ABC **на чертежа е равнобедрен и правоъгълен. Дължината на медианата към катета е** $\sqrt{10}$**. Дължината на височината** CD **към хипотенузата е:**

А) $\sqrt{2}$ **Б)** 2 **В)** $2\sqrt{2}$ **Г)** 4



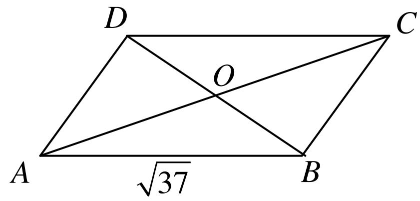
17. Триъгълникът ABC е със страна $BC = 6$ и $\sphericalangle BAC = 150^o$. Дължината на окръжността, описана около триъгълника е:

А) 6π **Б)** 12π **В)** $\frac{6\sqrt{3}}{3}\pi$ **Г)** $6\sqrt{3\pi}$

18. Триъгълник ABC има страни $AB = 7$, $BC = 3$ и $\sphericalangle ACB = 60^o$. Видът на $\triangle ABC$ е:

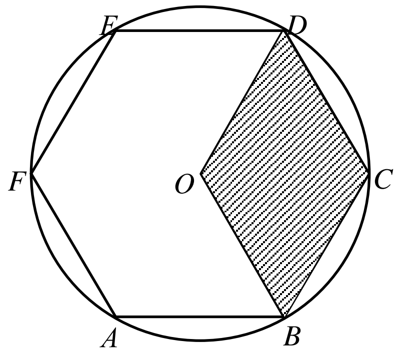
А) остроъгълен **Б) правоъгълен** **В) тъпоъгълен** **Г) неопределен**

19. В успоредника $ABCD$ $AB = \sqrt{37}$, $AC = 8$ и $BD = 6$. Острият ъгъл между диагоналите на успоредника е:



А) 15^0 **Б)** 30^0 **В)** 45^0 **Г)** 60^0

20. Даден е правилен шестоъгълник $ABCDEF$. Ако точката O е центърът на описаната около шестоъгълника окръжност с радиус 2, то S_{OBCD} е равно на:



А) $4\sqrt{3}$

Б) $2\sqrt{3}$

В) $\sqrt{3}$

Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

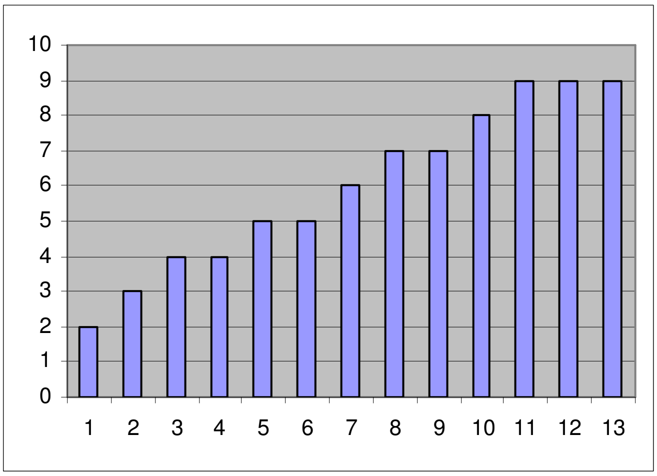
21. Намерете за кои стойности на x е изпълнено равенството $\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8^{-\frac{1}{3}}$.

22. В равнобедрен триъгълник с основа 4 и бедро 6 ъглополовящите на ъглите при основата пресичат бедрата в точки P и Q. Да се намери дължината на отсечката PQ.

23. Даден е трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$, за който $AB = 28$ cm, $CD = 11$ cm, $BC = 26$ cm и $AD = 25$ cm. Да се намери лицето на трапеца.

24. Намерете най-малката стойност на израза $\cos^2\alpha - \sin^2\alpha - 2$, ако $\alpha \in \left[0^\circ; 90^\circ\right]$.

25. Да се намери средната стойност на множеството от данни, представено с диаграмата:



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Да се намерят решенията на системата $\begin{vmatrix} x.y = 3 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{vmatrix}$

27. С помощта на цифрите 0, 2, 5, 6 **и** 7 **са записани всички четирицифрени числа по-малки от** 6000**. По случаен начин се избира едно число. Да се намери вероятността числото да се дели на** 5**.**

28. В окръжност с радиус 3 **е вписан четириъгълник** $ABCD$**, чийто диагонал** AC **е диаметър на окръжността. Ако** $\sphericalangle DAC : \sphericalangle CAB = 5:2$ **и** $AB = 3\sqrt{3}$ **, да се намери диагоналът** BD**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b$; при $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=1.2.3...(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{1.2.3...(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\dfrac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\dfrac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\alpha$	$\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\alpha$	$\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{tg}\alpha$	$-\mathrm{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\alpha\pm\mathrm{tg}\beta}{1\mp\mathrm{tg}\alpha\mathrm{tg}\beta}$$
$$\mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\alpha\mathrm{cotg}\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\beta\pm\mathrm{cotg}\alpha}$$
$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$
$$\mathrm{tg}2\alpha=\frac{2\mathrm{tg}\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\alpha}\qquad\mathrm{cotg}2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\alpha-1}{2\mathrm{cotg}\alpha}$$
$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)\qquad\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$
$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

математика– 18 май 2010 г.

ВАРИАНТ № 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1.	Г	2
2.	Б	2
3.	Г	2
4.	Г	2
5.	А	2
6.	В	2
7.	Б	2
8.	Г	2
9.	В	2
10.	А	2
11.	Г	2
12.	В	2
13.	Б	2
14.	В	2
15.	Г	2
16.	Б	2
17.	Б	2
18.	В	2
19.	Г	2
20.	Б	2
21.	1	3
22.	$\frac{12}{5}=2,4$	3
23.	$468\ \mathbf{cm}^2$	3
24.	-3	3
25.	6	3

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
26.	(-3;-1) (-1;-3) (1;3) (3;1)	15
27.	$\frac{2}{5}=0,4$	15
28.	$DB=\frac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2}=\frac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$	15

Въпроси със свободен отговор

26. Критерии за оценяване на задача 26.

1.Преобразуване на системата чрез заместване

$$\begin{vmatrix} y = \dfrac{3}{x} \\ x^2 + y^2 = 10 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = \dfrac{3}{x} \\ x^2 + \dfrac{9}{x^2} = 10 \end{vmatrix} \quad , \quad xy \neq 0 \qquad (3\,\textbf{т.})$$

2. За преобразуване на уравнението $x^2 + \dfrac{9}{x^2} = 10$ ***до уравнението***

$$x^4 - 10x^2 + 9 = 0 \qquad (3\,\textbf{т.})$$

3. За полагане $t = x^2$ ***и свеждане до квадратното уравнение*** $t^2 - 10t + 9 = 0$ ***(2 т.)***

4. За намиране на корените $t_1 = 1$ ***и*** $t_2 = 9$ ***(2 т.)***

5.За решаване на уравненията $x^2 = 1; \quad x^2 = 9$ ***(4 т.)***

6. За формяне на решенията (-3;-1) (-1;-3) (1;3) (3;1) ***(1т.)***

27. Критерии за оценяване на задача 27.

*1****.Съображения, че ако четирицифрените числа са*** $\overline{abcd}$ ***, то цифрата***

a ***може да бъде равна само на*** *2* ***или на*** *5,* ***защото числата са по-малки***

от *6000* ***и първата цифра не може да е*** *0* ***(за цифрата*** *a* ***има 2 възможности) (3 т.)***

*2****. Съображения, че останалите цифри*** *b, c* ***и*** *d* ***могат да са равни***

на всяка от дадените цифри (за всяка от цифрите *b, c* ***и*** *d* ***по 5 възможности) (3 т.)***

*3****. Следователно броят на всички четирицифрени числа***

по-малки от *6000,* ***които могат да се запишат с дадените***

пет цифри е $2.5.5.5 = 250$ ***(3 т.)***

*4****. От търсените числа на*** *5* ***се делят само тези числа, които***

завършват на *0* ***или на*** *5* ***(две възможности за цифрата на***

единиците), т.е.броят им е $2.5.5.2 = 100$ ***(4 т.)***

*5****. Вероятността избраното число да се дели на*** *5* ***е*** $\dfrac{100}{250} = \dfrac{2}{5} = 0{,}4$ ***(2 т.)***

28. **Критерии за оценяване на задача 28.**

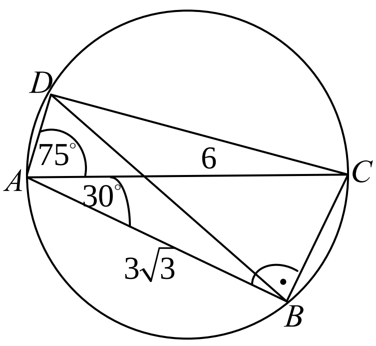
*1****.Установяване, че*** $\triangle ABC$ ***е правоъгълен (2 т.)***

2. Намиране на $BC = 3$ ***от правоъгълния*** $\triangle ABC$ ***(2 т.)***

3. Намиране на $\sphericalangle BAC = 30^o$ ***(2 т.)***

3. Намиране на $\sphericalangle DAC = 75^o$ ***(1т.)***

4. Намиране на $\sphericalangle BAD = 105^o$ ***(1т.)***



5. Прилагане на синусова теорема $\dfrac{DB}{\sin 105^o} = 2R$ ***в*** $\triangle ABD$ ***(2 т.)***

5. Определяне на $\sin 105^o = \sin 75^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ***(3 т.)***

6. Получаване на $DB = \dfrac{3(\sqrt{6}+\sqrt{2})}{2} = \dfrac{3\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{2}$ ***(2 т.)***