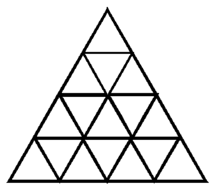
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 20 април 2008 г.

Задачите с номера от 1 до 15 включително се оценяват с по 1 точка:

1. Половината на 4^{2008} е:
А) 2^{2008} **Б)** 4^{1004} **В)** 2^{4015} **Г)** 4^{2007}
Решение: **Отг. В).** $4^{2008}:2=(2^2)^{2008}:2=2^{4016}:2=2^{4016-1}=2^{4015}$.

2. На фигурата са затъмнени пет триъгълничета. Колко такива триъгълничета още трябва да се затъмнят, че точно 37,5% от фигурата да стане затъмнена?
А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4



Решение: **Отг. А).** Фигурата е съставена от 16 триъгълничета и 37,5% от 16 са $0,375.16=6$. Затъмнени са 5 триъгълничета, следователно трябва да се затъмни още 1.

3. Ако $(3a+b)x=12a^4+4a^3b$ и $3a+b\neq 0$, то x е равно на:
А) 4 **Б)** $4a$ **В)** $4a^2$ **Г)** $4a^3$
Решение: **Отг. Г).** $x=\dfrac{12a^4+4a^3b}{3a+b}=\dfrac{4a^3(3a+b)}{3a+b}=4a^3$.

4. Сумата от корените на уравнението $|3-2x|=5$ е равна на:
А) 4 **Б)** -1 **В)** 3 **Г)** -3
Решение: **Отг. В).** От $3-2x=5$ намираме единия корен $x=-1$, а от $3-2x=-5$ – съответно другия корен $x=4$. Оттук $4+(-1)=3$.

5. В двора на село живеят равен брой кокошки и овце. Броят на краката им може да бъде равен на:
А) 16 **Б)** 22 **В)** 26 **Г)** 48
Решение: **Отг. Г).** Общият брой крака трябва да се дели на 6 и от посочените числа само 48 има това свойство.

6. За всяко естествено число $n>2008$ числото n^2-3n+2 се дели със сигурност на:
А) 3 **Б)** 5 **В)** 2 **Г)** 4

Решение: **Отг. В).** $n^2-3n+2=(n^2-n)-(2n-2)=n(n-1)-2(n-1)=(n-1)(n-2)$, което е произведение на две последователни естествени числа и едното от тях е със сигурност четно. Следователно числото n^2-3n+2 се дели със сигурност на 2. Ако n се дели на 3, то $(n-1)(n-2)$ не се дели на 3. Ако n се дели на 5, то $(n-1)(n-2)$ не се дели на 5. Ако n се дели на 4, то $(n-1)(n-2)$ не се дели на 4.

7. За кои стойности на параметъра a уравнението $a(ax-1)=3(3x+1)$ няма решение?

А) $a=-3$ **Б)** $a=-\frac{1}{3}$ **В)** $a=3$ **Г)** няма такива

Решение: **Отг. В).** След преобразуване уравнението приема вида $(a+3)(a-3)x=a+3$. При $a=-3$ всяко число е решение на уравнението, а при $a=3$ уравнението няма решение.

8. Най-малкият прост делител на числото $3^{11}+5^{13}$ е:

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 5

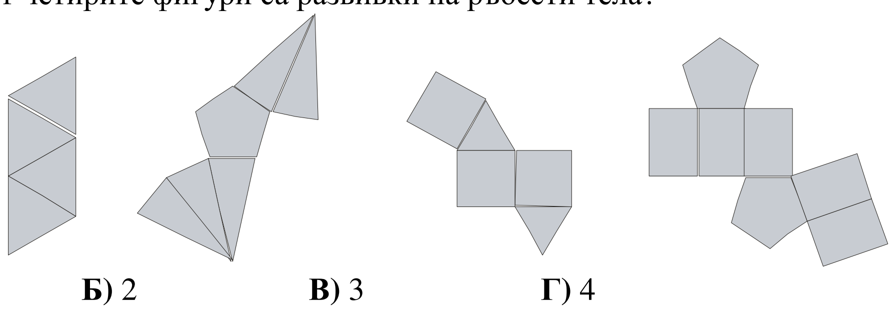
Решение: **Отг. Б).** Числото $3^{11}+5^{13}$ е четно като сума на нечетни числа.

9. Колко процента от естествените числа от 1 до 10 000 включително са точни квадрати?

А) 10% **Б)** 11% **В)** 9% **Г)** 1%

Решение: **Отг. Г).** Тъй като $100^2=10\,000$, то квадратите на числата от 1 до 100 (и само те) се намират между 1 до 10 000. Следователно търсеният процент е $\frac{100}{10\,000}.100=1\%$.

10. Колко от четирите фигури са развивки на ръбести тела?



А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Решение: **Отг. Г).** Първата фигура е развивка на правилна триъгълна пирамида, втората – на правилна петоъгълна пирамида, третата – на правилна триъгълна призма, а четвъртата – на правилна петоъгълна призма.

11. Числото 720 е записано като произведение на няколко различни естествени числа, всеки две от които са взаимно прости. Най-големият възможен брой множители в това произведение е:

А) 2 **Б)** 3 **В)** 4 **Г)** 5

Решение: **Отг. В).** Понеже $720=2^4\cdot3^2\cdot5$, то равенството $720=1\cdot2^4\cdot3^2\cdot5$ показва, че е възможно да запишем 720 в искания вид с помощта на 4 различни и взаимно прости множителя. Ако предположим, че това е възможно с по-голям брой взаимно прости множители, ще следва, че поне четири от тях трябва да имат прост делител от множеството $\{2;3;5\}$. Това означава, че ще има поне два от четирите, които не са взаимно прости.

12. Буквите A, E и $Л$ трябва да се заменят с цифри така, че да е вярно равенството $\frac{AA}{ЕЛА}=\frac{1}{7}$. На различните букви отговарят различни цифри, а на еднаквите букви – еднакви цифри. Буквата E трябва да се замени с:

А) 1 **Б)** 4 **В)** 3 **Г)** 5

Решение: **Отг. В).** Цифрата на единиците на числителя и знаменателя е една и съща и е различна от нула, защото е и цифра на десетиците на числителя. Освен това трябва и $7.A$ да има същата цифра на единиците, откъдето правим извод, че $A=5$. Сега лесно следва, че $\frac{55}{385}=\frac{1}{7}$ и следователно $E=3$.

13. Ако числото A е със 75% по-малко от числото B, то с колко процента числото B е по-голямо от A?

А) с 400% **Б)** с 4% **В)** с 3% **Г)** с 300%

Решение: **Отг. Г).** От условието следва, че $A=\frac{1}{4}B$. Следователно $B=4A=400\%A$ или В е с 300% повече от А.

14. Сборът на осем нечетни естествени числа е 20. Най-малката възможна разлика на най-голямото и най-малкото от тези числа е:

А) 0 **Б)** 2 **В)** 4 **Г)** 2008

Решение: **Отг. Б).** Числата не могат да са равни, защото 20 не се дели на 8. Следващата по големина възможна разлика е 2. Реализация с 2 е следният пример: $6.3+2.1=20$.

15. Пресметнете $\frac{2008^2+4016-8}{2006.2008.2012}$.

А) 1 **Б)** $\frac{1}{2006}$ **В)** $\frac{1}{2008}$ **Г)** $\frac{1}{2012}$

Решение: **Отг. В).** $\frac{2008^2+4016+1-9}{2006.2008.2012}=\frac{(2008+1)^2-3^2}{2006.2008.2012}=\frac{(2009-3)(2009+3)}{2006.2008.2012}=\frac{1}{2008}$.

Задачите с номера от 16 до 35 включително се оценяват с по 2 точки:

16. Известно е, че при $a=5$ уравненията $a^2x-a=25x-5$ и $18x-2a=ax-b+13x$ са еквивалентни. Стойността на b е:

А) 10 **Б)** 5 **В)** -5 **Г)** 0

Решение: **Отг. А).** Решаваме първото уравнение:

$$(a^2-25)x=a-5 \Leftrightarrow (a-5)(a+5)x=a-5.$$

Следователно при $a=5$ първото уравнение има за решение всяко число. Решаваме второто уравнение:

$$(18-13-a)x=2a-b \Rightarrow (5-a)x=2a-b.$$

При $a=5$ получаваме $0.x=10-b \Rightarrow b=10$.

17. Отсечката AB е дълга 120 см. Ако Ани отбелязва разделителни точки върху отсечката така, че да се получат 8 равни части, а Петър отбелязва разделителни точки така, че да се получат 12 равни части, то колко разделителни точки има отбелязани върху отсечката?

А) 14 **Б)** 15 **В)** 16 **Г)** 18

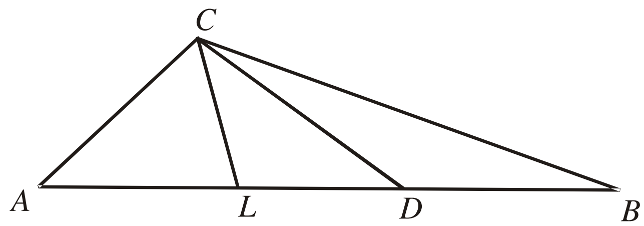
Решение: **Отг. Б).** Ани е отбелязала 7 разделителни точки през 15 см, а Петър е отбелязал 11 разделителни точки през 10 см. Три от точките на Петър се падат върху точки на Ани. Следователно общо отбелязаните разделителни точки са 15.

18. На военен парад участниците са наредени в квадратен блок, т.е. броят на редиците е равен на броя на колоните. Общият брой на участниците в две редици и две колони е 36. Колко участници има в този блок?

А) 64 **Б)** 81 **В)** 100 **Г)** 121

Решение: **Отг. В).** В два реда и два стълба има точно 4 участника, които се намират едновременно в ред и стълб. Оттук следва, че ако означим с X броят на участниците в един ред, то $4.X-4=36$. Следователно $X=10$ и броят на участниците в блока е $10.10=100$.

19. В триъгълник ABC е дадено, че $\angle A : \angle B : \angle C = 2:1:6$. Ъглополовящата на $\angle ACB$ пресича AB



в точка L и $BL=74$ см. Върху отсечката BL е взета точка D така, че $\angle LCD : \angle DCB = 2:1$. Намерете сумата $CL+CD$ в сантиметри.

Решение: **Отг. 74.** Ъглите на триъгълника са $\angle A = 40^0$, $\angle B = 20^0$, $\angle C = 120^0$. Тогава $\angle LCD = 40^0, \angle DCB = 20^0$ и следователно триъгълниците LCD и DCB са равнобедрени, т.е. $CL = LD,\ CD = BD$. Оттук $CL+CD = LD+BD = BL = 74$ см.

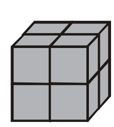
20. Ако $a<b<-1$, то най-малка е стойността на:

А) $\dfrac{a}{b}$ **Б)** $\dfrac{b}{a}$ **В)** $\dfrac{2a}{b}$ **Г)** $\dfrac{b}{a}-b$

Решение: **Отг. Б).** От $a<b<-1$ следва, че числата a и b са отрицателни. Следователно частното им е положително число и $0<\dfrac{b}{a}<\dfrac{a}{b}$. Щом $\dfrac{a}{b}>0$, то $\dfrac{a}{b}<\dfrac{2a}{b}$.

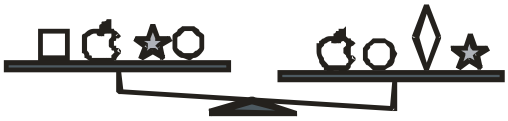
От друга страна числото $-b$ е положително и тогава $\dfrac{b}{a}-b>\dfrac{b}{a}$. Отговорът може да се отгатне, като вземем конкретни стойности за a и b. Например, при $a=-3$ и $b=-2$ е изпълнено $-3<-2$ и $-2<-1$. Сравняваните числа са съответно $\dfrac{3}{2}$, $\dfrac{2}{3}$, $\dfrac{6}{2}$ и $\dfrac{2}{3}-(-2)=2\dfrac{2}{3}$. Най-малкото от тях е $\dfrac{2}{3}$, т.е. **Б**).

21. Да се намери броят на всички правоъгълни паралелепипеди, които се съдържат в куб $2\times2\times2$.



Решение: **Отг. 27.** 8 правоъгълни паралелепипеда $(1\times1\times1)$, 12 от вида $(2\times1\times1)$, 6 от вида $(2\times2\times1)$ и 1 от вида $(2\times2\times2)$, т.е. всичко 27.

22. По колко начина тежест върху лявото блюдо може да се размени с някоя от тежестите върху дясното блюдо така, че да се постигне равновесие на везната?

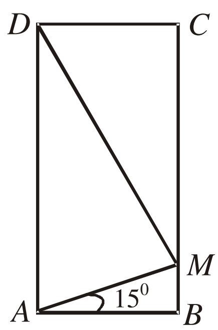


Стойностите на тежестите върху везната в грамове са.

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

Решение: **Отг. В).** Разликата между тежестите върху двете блюда е 20 г. За да се постигне равновесие чрез размяна на тежести от двете блюда, трябва да се размени обект от лявото блюдо, който е с 10 г по-лек от обект от дясното блюдо. Има 3 възможности за това: (10 г) отляво с (20 г) отдясно, (20 г) отляво с (30 г) отдясно или (40 г) отляво с (50 г) отдясно.

23. Върху страната BC на правоъгълника $ABCD$ ($AB < AD$) е избрана точка M така, че $DA = DM$ и $\angle MAB = 15^0$. Ако дължината на отсечката DM е 10 сантиметра, да се намери дължината на страната AB в сантиметри.



Решение: **Отг. 5.** Понеже $\angle MAD = 90^0 - 15^0 = 75^0$ и ΔADM е равнобедрен, то $\angle ADM = 30^0$, откъдето следва че $\angle DMC = \angle ADM = 30^0$ (кръстни ъгли при пресичането на успоредните прави AD и BC с правата DM). Тогава $AB = CD = \frac{1}{2} DM = 5$ см (катет срещу ъгъл от 30^0).

24. В един клас учат 36 ученици. Половината са момичета. Една трета от учениците не могат да умножават двуцифрени числа. Точно 14 момичета могат да умножават двуцифрени числа. Колко от момчетата в класа могат да умножават двуцифрени числа?

А) 9 **Б)** 10 **В)** 11 **Г)** 12

Решение: **Отг. Б).** $\frac{1}{3} \cdot 36 = 12$ ученици не могат да умножават двуцифрени числа. Понеже момичетата са 18 и 4 от тях не могат да умножават двуцифрени числа, то $12 - 4 = 8$ момчета не могат да умножават двуцифрени числа. Заключаваме, че $18 - 8 = 10$ момчета могат да умножават двуцифрени числа.

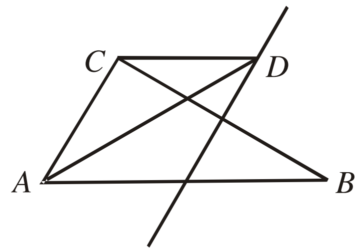
25. Посочете вярното:

А) $31^{11} > 17^{14} > 2^{55}$ **Б)** $2^{55} > 31^{11} > 17^{14}$

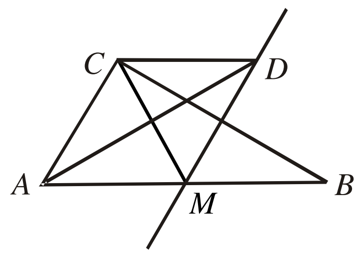
В) $17^{14} > 2^{55} > 31^{11}$ **Г)** $2^{55} > 17^{14} > 31^{11}$

Решение: **Отг. В).** Имаме, че $31^{11} < 32^{11} = (2^5)^{11} = 2^{55}$. От друга страна е изпълнено $17^{14} > 16^{14} = (2^4)^{14} = 2^{56} > 2^{55}$ и следователно $17^{14} > 2^{55} > 31^{11}$.

26. Даден е правоъгълен ΔABC с прав ъгъл при върха C и $BC > AC$. Да се намери градусната мярка на ъгъла между ъглополовящата на $\angle BAC$ и симетралата на катета CB, ако пресечната им точка е D и $CD \parallel AB$.



Решение: **Отг. 30^0.** Означаваме с M пресечната точка на симетралата на CB със страната AB. Четириъгълникът $AMDC$ има успоредни срещуположни страни $AM \parallel CD$ и $AC \parallel MD$ (AC и MD са поотделно перпендикулярни на BC) и равни съседни страни (ΔADC е равнобедрен, защото $\angle CAD = \angle MAD$ и $\angle MAD = \angle CDA$ като кръстни). Следователно той е ромб. От $MB = CD$ (хипотенузи в еднакви триъгълници) и $CD = MA$ следва, че $AM = MB$, т.е. M е средата на хипотенузата AB в правоъгълния ΔABC. От свойството на медианата към хипотенузата заключаваме, че $AM = CM$. Следователно ΔAMC е равностранен, $\angle MAC = 60°$, $\angle CAD = 30°$ и $\angle ADM = 30°$ (като кръстен ъгъл на $\angle CAD$).



27. На 22 март всяко момче от един клас подарило по едно кокиче на всяко момиче в класа. Общо подарените кокичета са 77. Възможният брой ученици в този клас е:

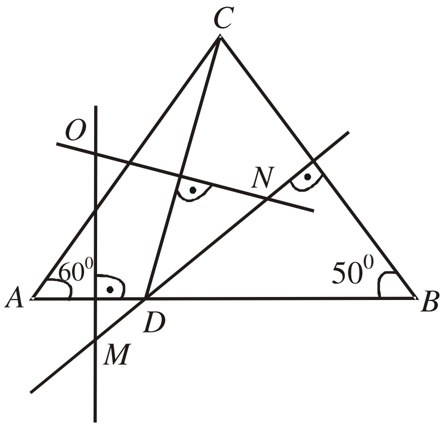
А) 11 **Б)** 22 **В)** 20 **Г)** 18

Решение: **Отг. Г).** Решение $11.7 = 77$, т.е. 7 момчета са подарили по 11 кокичета на 11 момичета или 11 момчета са подарили по 7 кокичета на 7 момичета. Общо класът е от 18 деца. Случаят $77 = 77.1$ води до отговор 78 ученици в класа, който не е измежду дадените.

28. Градовете A, B и C са разположени в указания ред покрай едно шосе. В 6 часа сутринта от град B за град C потегля велосипедист със скорост 10 км/ч. В 7 часа сутринта същия ден от град A за град C тръгва мотопедист със скорост 15 км/ч. Колко километра е разстоянието между A и C, ако разстоянието между A и B е 5 км, а мотопедистът пристига в C 20 минути преди велосипедиста?

Решение: **Отг. 55.** Мотопедистът се движи с 1 ч. и 20 мин. $= 1 + \frac{20}{60} = 1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ ч. по-малко време от велосипедиста. Ако x км е разстоянието между градовете B и C, то $\frac{x}{10} = \frac{x+5}{15} + \frac{4}{3}$, откъдето $3x = 2(x+5) + 40$ и следователно $x = 50$ км. Следователно разстоянието между градовете A и C е $50 + 5 = 55$ км.

29. За ΔABC е известно, че $\angle A = 60^0$ и $\angle B = 50^0$. Симетралата на страната BC пресича страната AB, симетралата на отсечката AD и симетралата на отсечката CD съответно в точки D, M и N. Ако O е пресечната точка на симетралите на AD и CD, определете вида на ΔMNO.



А) правоъгълен **Б)** равнобедрен тъпоъгълен

В) равностранен **Г)** равнобедрен остроъгълен

Решение: **Отг. Г).** $\angle NDC = \angle BDN = 90^0 - 50^0 = 40^0$ и оттук $\angle MNO = 90^o - \angle NDC = 90^0 - 40^0 = 50^0$. От друга страна $\angle ADM = \angle BDN = 40^0$ (връхни) и следователно $\angle OMN = 90^0 - \angle ADM = 90^0 - 40^0 = 50^0$. Получаваме, че $\angle MNO = \angle OMN = 50^0$, откъдето следва, че ΔMNO е равнобедрен и остроъгълен.

30. За детска градина трябва да се закупят кукли и колички. Цената на една кукла е 15 лв., а на една количка е 7 лв. По колко различни начина могат да бъдат закупени кукли и колички за точно 100 лв.?

А) 1 **Б)** 2 **В)** безброй много **Г)** нито един

Решение: **Отг. А).** Нека x е броят на закупените колички, а y е броят на закупените кукли. Съставяме диофантовото уравнение $7x + 15y = 100$, от вида на което следва, че x трябва да се дели на 5. Възможностите са $x = 0$, $x = 5$ и $x = 10$, защото ако $x \geq 15$, лявата страна на уравнението става по-голяма от дясната. След проверка установяваме, че единственото решение в цели числа е $x = 10$, $y = 2$, т.е. съществува само един вариант за осъществяване на покупката.

31. Броят на трицифрените числа със сума от цифрите 23 е:

А) 4 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 15

Решение: **Отг. Г).** Ако трицифреното число $\overline{abc}$ изпълнява условието на задачата, то $a + b + c = 23$. За цифрите му има следните възможности: $9, 9, 5$; $9, 8, 6$; $9, 7, 7$ и $8, 8, 7$. С втората тройка могат да съставят 6 числа, а с останалите тройки – по 3 числа. Общо числата са 15.

32. В ΔABC е дадено, че $\angle ACB = 60^0$, разстоянието от точка A до външната ъглополовяща през върха C е 5 см и дължината на страната BC е 9 см. Лицето на ΔABC е:

А) 45 кв. см **Б)** $\frac{45}{4}$ кв. см **В)** 22,5 кв. см **Г)** не може да се определи

Решение: **Отг. В).** Тъй като CA е ъглополовяща на ъгъла между външната ъглополовяща през върха C и правата BC, то разстоянието от точка A до едното рамо

BC е равно на разстоянието до другото рамо, което означава, че дължината на височината в ΔABC към страната BC е 5 см. Следователно $S_{ABC} = \frac{9.5}{2} = 22,5$ кв. см.

33. Нека $A \geq B$ са две естествени числа с повече от две цифри, на които последните две цифри съвпадат. Кое от посочените числа винаги завършва на поне две нули?
А) $A+B$ **Б)** A^2+B^2 **В)** A^2-B^2 **Г)** A^2+AB+B^2
Решение: **Отг. В).** Със сигурност числото $A-B$ се дели на 100. Следователно числото $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$ също със сигурност се дели на 100. Ако например $A=B=101$, то нито едно от числата $A+B=202$, $A^2+B^2=101^2+101^2=20402$ и $A^2+AB+B^2=30\ 603$ не се дели на 100, т.е. не завършва на поне две нули.

34. Решението на уравнението $\frac{1-2x^2}{2}-\frac{1}{3}\left(1-\frac{3x-2}{2}\right)=\frac{(x-1)^3-(x+1)^3}{6}$ е:

А) 2 **Б)** -1 **В)** $-\frac{1}{3}$ **Г)** -3

Решение: **Отг. В).**

35. В правоъгълна координатна система са дадени точките $A(2;0)$, $B(5;0)$, $C(0;5)$. При завъртането на триъгълника ABC около абсцисната ос на 360° се получава тяло с обем:
А) 50π куб. м. ед. **Б)** 75π куб. м. ед. **В)** 25π куб. м. ед. **Г)** 60π куб. м. ед.
Решение: **Отг. В).** При завъртането от условието се получава тяло, което е разликата на два конуса с равни радиуси и височини съответно $h_1=5$ мерни единици и $h_1=2$ мерни единици. Търсеният обем е разлика от обемите на тези конуси:

$$V=\frac{1}{3}\pi r^2\left(h_1-h_2\right)=\frac{1}{3}\pi 25.(5-2)=25\pi \text{ кубични мерни единици.}$$

Задачите с номера от 36 до 50 включително се оценяват с по 3 точки:

36. Нека $a>b>c>d$ са четири различни цели положителни числа. Различните стойности на разликите на числата две по две, като от по-голямото число се вади по-малкото, са 7, 11, 14, 18 и 25. Колко е $b-c$?

Решение: **Отг. 7.** Имаме $\frac{4.3}{2}=6$ разлики и 5 стойности $\Rightarrow$ две от разликите имат еднаква стойност x. Ясно е, че най-голямата разлика е между първото и четвъртото число, т.е. $a-d=25$. От друга страна $(a-b)+(b-c)+(c-d)=a-d=25$, което показва, че сумата на три от разликите е 25. Но числото 25 се представя по единствен начин като сума на три от дадените числа (с евентуално повторение на едното от тях) по следния начин: $7+7+11=25$. Следователно $x=7$. Освен това:

$$(7+11+14+18+25)+7=75+7=(a-b)+(a-c)+(a-d)+(b-c)+(b-d)+(c-d)=$$
$$=3(a-d)+(b-c)=75+(b-c).$$

Заключаваме, че $75+7=75+(b-c)$, откъдето $b-c=7$.

37. Последната цифра на числото $8^8-18^{18}+28^{28}-.......+2008^{2008}$ е:
А) 6 **Б)** 4 **В)** 8 **Г)** 0

Решение: **Отг. А).** Броят на събираемите е 201. Всички събираеми могат да бъдат групирани по двойки: третото с второто, петото с четвъртото, седмото с шестото и т.н., последното с предпоследното. Така се получават 100 двойки, а първото събираемо 8^8 участва самостоятелно. За всяка двойка първото събираемо е на степен, кратна на 4, и следователно завършва на 6, докато второто събираемо завършва на 4. Получаваме, че последната цифра на всяка двойка е $6-4=2$. Следователно последната цифра на сумата от условието на задачата съвпада с последната цифра на числото $6+2.100$, която очевидно е 6.

38. Известно е, че са верни следните две твърдения:

1. Ако обичам Антон, то обичам и Иван.
2. Обичам поне един от двамата между Антон и Иван.

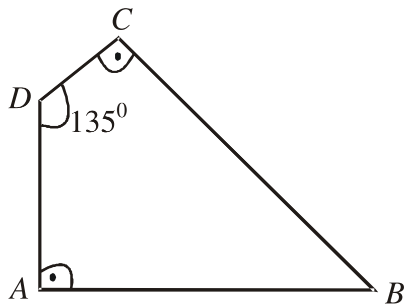
Тогава със сигурност е вярно, че:

А) обичам Антон **Б)** обичам Иван

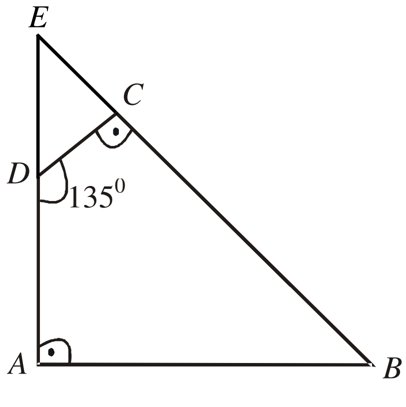
В) не обичам Антон **Г)** не обичам Иван

Решение: **Отг. Б).** Възможни са два случая: обичам Антон и не обичам Антон. В първия случай верността на **Б)** следва от твърдение 1, а във втория верността на **Б)** следва от твърдение 2. **А)** не е вярно например, ако обичам Иван и не обичам Антон. **В)** не е вярно например, ако обичам и Антон, и Иван. Най-накрая **Г)** не е вярно например, ако обичам Иван.

39. Даден е четириъгълник $ABCD$, за който $\angle DAB = \angle BCD = 90°$, $\angle ADC = 135°$, $AB = 16$ см и $CD = 6$ см. Намерете лицето на четириъгълника в квадратни сантиметри.



Решение: **Отг. 110.**



Продължаваме AD и BC до пресичане в точка E. Понеже $\angle ABE = 180^0 - 135^0 = 45^0$, триъгълниците ABE и DCE са правоъгълни и равнобедрени. Тогава:

$$S_{ABCD} = \frac{16.16}{2} - \frac{6.6}{2} = 128 - 18 = 110 \text{ кв. см.}$$

40. За числата a, b и c е известно, че $a^2 + b^2 + c^2 + 10c + 38 = 4a + 6b$. Намерете сумата им $a+b+c$.

А) -1 **Б)** 0 **В)** 49 **Г)** 64

Решение: **Отг. Б).** Като отделим точни квадрати, получаваме:

$$(a-2)^2+(b-3)^2+(c+5)^2=0.$$

Полученото равенство е възможно само ако $a=2,\ b=3,\ \ c=-5$. Оттук $a+b+c=0$.

41. Дадени са три чувала с топки. В единия има две баскетболни топки, в другия – две футболни, а в третия – една баскетболна и една футболна. Върху чувалите има надписи, нито един от които не отговаря на съдържанието на чувалите. От кой чувал трябва да се извади една топка, за да се установи съдържанието на всички чували?

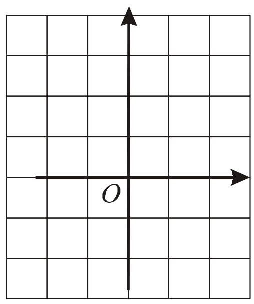
А) от чувала с надпис "две футболни топки"
Б) от чувала с надпис "две баскетболни топки"
В) от чувала с надпис "една баскетболна и една футболна"
Г) исканото е невъзможно с изваждане на само една топка

Решение: **Отг. В).** Ако извадим топка от чувала с надпис "две футболни топки", то може да се случи да извадим баскетболна топка и тогава (както се вижда от първата колонка на таблицата по-долу) тя не определя еднозначно съдържанието на чувала. Аналогично е и ако извадим футболна топка от чувала с надпис "две баскетболни топки" (вж. втората колонка).

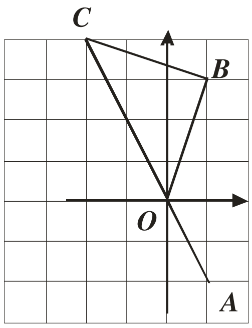
"две футболни топки"	"две баскетболни топки"	"една баскетболна и една футболна"
футболна и баскетболна	две футболни	две баскетболни
две баскетболни	футболна и баскетболна	две футболни

Ако извадим топка от чувала с надпис "една баскетболна и една футболна", то ако извадената топка е футболна, със сигурност тогава в този чувал има две футболни топки $\Rightarrow$ единствената възможност за чувала с надпис "две баскетболни топки" е той да съдържа една баскетболна и една футболна, защото чувалът с две футболни топки е вече идентифициран. За чувала с надпис "две футболни топки" остава да съдържа две баскетболни. Аналогично, ако извадим баскетболна топка от чувала с надпис "една баскетболна и една футболна", то със сигурност в този чувал ще има две баскетболни топки. Сега единствената възможност за чувала с надпис "две футболни топки" е той да съдържа една футболна и една баскетболна топка, защото чувалът с две баскетболни топки е вече идентифициран. За чувала с надпис "две баскетболни топки" остава да съдържа две футболни топки. По този начин съдържанието и на трите чувала се определя еднозначно.

42. Намерете градусната мярка на $\angle AOB$, ако в правоъгълна координатна система с начало O са дадени точките $A(1;\,-2)$ и $B(1;\,3)$.



Решение: **Отг. 135^0.**



Ясно е, че ΔBOC е правоъгълен и равнобедрен (вж. чертежа). Тогава $\angle BOC = 45°$ и следователно $\angle AOB = 180^0 - \angle BOC = 180^0 - 45^0 = 135^0$.

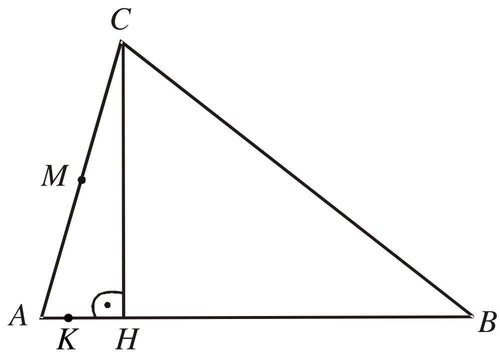
43. Дадени са 10 летви с дължини в сантиметри съответно $1, 2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^9$. Колко триъгълника със страни измежду дадените летви могат да бъдат построени?

Решение: **Отг. 0.** Да забележим, че ако $x < y < z$, то $2^x + 2^y < 2^y + 2^y = 2^{y+1} \le 2^z$, откъдето $2^x + 2^y < 2^z$. Полученото неравенство означава, че никои три от дадените летви не могат да са страни на триъгълник (нарушено е неравенството на триъгълника, съгласно което сумата от дължините на двете по-малки страни е по-голяма от дължината на най-голямата страна).

44. Да се намери броят на естествени числа n, за които дробта $\dfrac{15n+36}{18n+43}$ е съкратима.

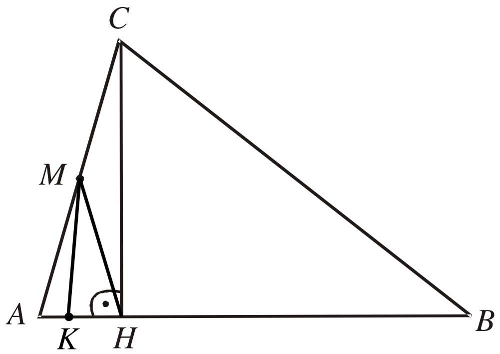
Решение: **Отг. 0.** Ако $\dfrac{15n+36}{18n+43}$ е съкратима, то и дробта $\dfrac{18n+43}{15n+36} = 1 + \dfrac{3n+7}{15n+36}$ е съкратима. Тук използваме, че ако p дели a и b, то p дели и тяхната разлика. Следователно $\dfrac{15n+36}{3n+7} = 5 + \dfrac{1}{3n+7}$ е също съкратима, откъдето следва че и $\dfrac{1}{3n+7}$ е съкратима. Последното обаче не е вярно.

45. Даден е остроъгълен ΔABC, в който $\angle BAC > 30°$. Отсечката CH $(H \in AB)$ е височина, точката M е среда на страната AC, а точката K е от вътрешността на отсечката AH. Кое от посочените твърдения е винаги вярно?



А) $AK < MK < CH$ **Б)** $2MK < AC < 2CH$
В) $MK > AM$ **Г)** $2MK < AC < AB$

Решение: **Отг. Б).** $2MH = AC$, защото MH е медиана към хипотенузата в правоъгълния ΔACH. Освен това $2CH > AC$, защото $\angle BAC > 30°$. От равнобедрения ΔAMH следва, че $MK < MH$. Така получаваме, че $2MK < 2MH = AC < 2CH$ и това доказва верността на **Б**). Твърдението в **А)** е нарушено например, ако $30^0 < \angle BAC < 45^0$ и K е среда на AH (в този случай $\angle AMK > \angle KAM$ и следователно $AK > MK$). Твърдението във **В)** е винаги нарушено, защото неравенството $MK > AM$ е еквивалентно с $MK > MH$, а по-горе беше отбелязано, че $MK < MH$. Най-накрая твърдението в **Г)** е нарушено за триъгълниците ABC, в които $AC > AB$.



46. Отборите А, Б, В, Г и Д завършили на първите пет места в класирането на футболния шампионат на една страна, като никои два от тях не са разделили някое място. Известно е, че:

- Между отборите А и Б има точно един отбор от останалите три.
- Отбор В не е преди отбор Б.
- Отбор Д е преди отбор А, но е след отбор Г.

Кое от посочените твърдения е вярно със сигурност?

А) отбор Г е първи **Б)** отбор Б е втори

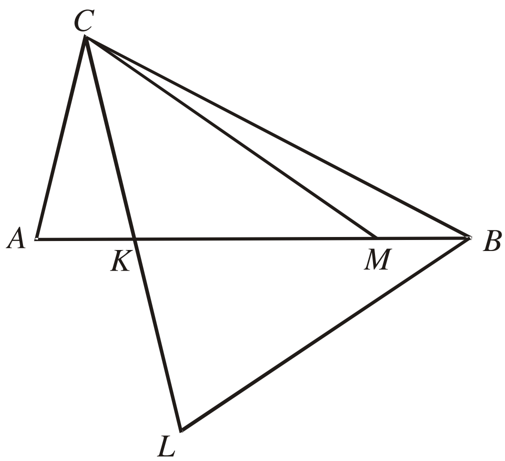
В) отбор В е четвърти **Г)** отбор А е последен

Решение: **Отг. А).** От третото твърдение в условието следва, че отбор А е най-много трети (преди него със сигурност са Д и Г). Ако А е трети, то класирането на първите три отбора е ГДА и подреждането на Б и В е невъзможно с едновременно изпълнение на първите две твърдения от условието на задачата. Ако А е четвърти, единственото възможно класиране е ГБДАВ. Ако А е пети, отново класирането е еднозначно определено и то е ГДБВА. И в двата случая Г е първи, което доказва верността на **А)**. В същото време **В)** и **Г)** са нарушени в първия случай, а **Б)** е нарушено във втория.

47. Върху страната AB на ΔABC ($AC < BC < AB$) е взета точка K така, че $AK < KB$, а върху отсечката KB е взета точка M така, че $AK = BM$. Точка L е върху правата CK (K е между C и L) така, че $KL = AC$ и $BL = CM$. Ако $CK = 6$ см, то дължината на страната AC в сантиметри е:

А) 6 см **Б)** 12 см

В) 3 см **Г)** не може да се определи



Решение: **Отг. А).** $\Delta AMC \cong \Delta KBL$ по трети признак. Следователно $\angle CAM = \angle LKB$. Но $\angle LKB = \angle AKC$ (връхни) и следователно $\angle CAM = \angle AKC$, откъдето $AC = CK = 6$ см.

48. Ани и Петя празнуват рождения си ден заедно. Ани познава $\frac{4}{5}$ от гостите на празника, а Петя познава $\frac{3}{5}$ от гостите на празника. Всеки гост познава поне едно от двете момичета, а точно 6 гости познават и двете момичета. Гостите на празника са:

А) 30 **Б)** 25 **В)** 20 **Г)** 15

Решение: **Отг. Г).** Понеже $\frac{4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{7}{5}$ и всички гости са $\frac{5}{5}$, то $\frac{7}{5}-\frac{5}{5}=\frac{2}{5}$ от гостите са познати едновременно на двете момичета. Ако всички гости са x, то от условието следва, че $\frac{2}{5}x=6$, откъдето $x=15$.

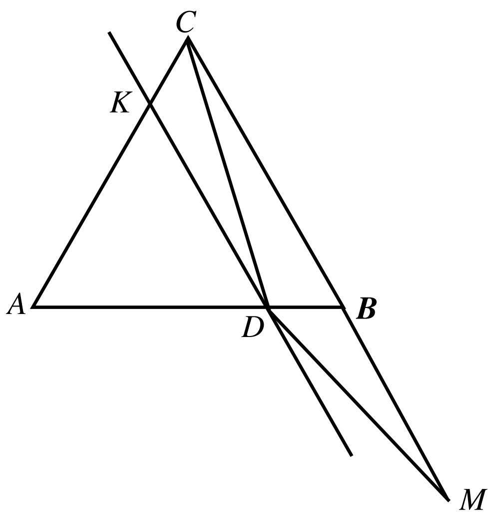
49. Върху страната $AB=9$ см в остроъгълен ΔABC е взета точка D така, че $BD=3$ см. Нека M е точка върху правата BC (B е между C и M) така, че $BM=6$ см. Да се намери дължината на страната BC в ΔABC, ако $CD=DM$ и $\angle ACD=\angle BDM$.

А) 6 см **Б)** 9 см **В)** 12 см **Г)** 15 см

Решение: **Отг. Б).** От $CD=DM$ следва, че ΔCDM е равнобедрен и $\angle DCB=\angle DMB$. Следователно ΔABC е равнобедрен, защото:

$$\angle ACB=\angle ACD+\angle DCB=\angle BDM+\angle BMD=\angle ABC \text{, т.е. } AB=AC .$$

През D построяваме права, успоредна на BC, която пресича AC в точка K. Тогава $\Delta DKC\cong\Delta DBM$ по II признак, защото $CD=DM$, $\angle KCD=\angle BDM$ и $\angle KDC=\angle DMB$. Оттук заключаваме, че $KD=BM$. Но $BM=AD$ и следователно ΔADK е равнобедрен. Получаваме, че $\angle BAC=\angle AKD=\angle ACB$. Така, ъглите в ΔABC са равни помежду си, т.е. триъгълникът е равностранен и в частност $BC=AB=9$ см .



50. Кое е 2008-то поред число в редицата $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{2}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{2}{5},\frac{3}{5},\frac{4}{5},\cdots$?

А) $\frac{8}{2008}$ **Б)** $\frac{48}{49}$ **В)** $\frac{51}{59}$ **Г)** $\frac{55}{64}$

Решение: **Отг. Г).** Броят на всички числа в редицата със знаменател по-малък от 64 е $1+2+3+\cdots+62=1953$, т.е до 2008-то число остават още 55 числа. Тези числа са $\frac{1}{64},\frac{2}{64},\frac{3}{64},...,\frac{55}{64}$. Следователно 2008-то число в редицата е $\frac{55}{64}$.

1.	В	**11.**	В	**21.**	27	**31.**	Г	**41.**	В
2.	А	**12.**	В	**22.**	В	**32.**	В	**42.**	135^0
3.	Г	**13.**	Г	**23.**	5	**33.**	В	**43.**	0
4.	В	**14.**	Б	**24.**	Б	**34.**	В	**44.**	0
5.	Г	**15.**	В	**25.**	В	**35.**	В	**45.**	Б
6.	В	**16.**	А	**26.**	30^0	**36.**	7	**46.**	А
7.	В	**17.**	Б	**27.**	Г	**37.**	А	**47.**	А
8.	Б	**18.**	В	**28.**	55	**38.**	Б	**48.**	Г
9.	Г	**19.**	74	**29.**	Г	**39.**	110	**49.**	Б
10.	Г	**20.**	Б	**30.**	А	**40.**	Б	**50.**	Г