Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

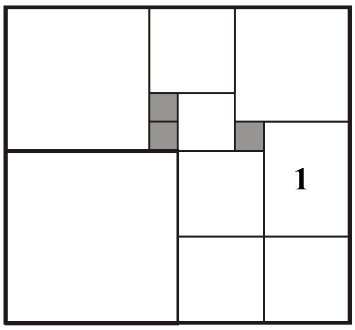
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   ЗА   4   К Л А С

Задача 1. а) Пресметнете израза: $(118\ 178 : 74 + 8403) : 5 + 10$.

б) Намерете неизвестното число x от равенството: $(239 - 138 : x).6 + 612 = 2010$.

Задача 2. Даденият правоъгълник на чертежа е разделен на 12 фигури. Едната от тях е правоъгълник и е означена с 1, а останалите 11 са квадрати. Всяко от трите най-малки квадратчета, които са затъмнени на чертежа, е с дължина на страната 1 *см*. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



Задача 3. Христо отишъл на гости на роднинско семейство, което имало 4 деца. Той попитал на колко години са децата, а бащата му поставил задача да ги открие сам, като използва, че произведението от годините им е равно на 72. Христо извършил известни пресмятания, но не успял да реши задачата. Тогава бащата уточнил, че сборът от годините на четирите деца е равен на годините на Христо. За съжаление Христо отново не бил в състояние да реши задачата и попитал дали някое от децата е на 2 години. Бащата дал отговор на този въпрос и Христо веднага съобщил годините на четирите деца.

Намерете годините на четирите деца и годините на Христо.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

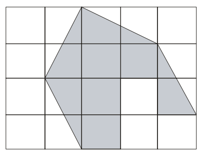
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   ЗА   5   К Л А С

Задача 1. Даден правоъгълник с размери 5 *см* и 0,4 *дм* е разделен на единични квадратчета. Каква част от правоъгълника е затъмнена?

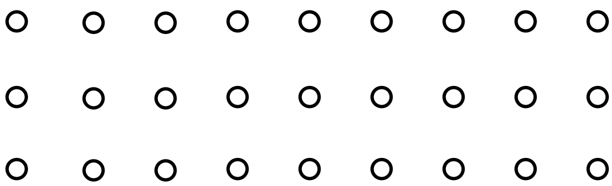


Задача 2. Намерете възможно най-голямата и възможно най-малката стойност на израза

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}+\frac{g}{h}+\frac{l}{m},$$

където a, b, c, d, e, f, g, h, l и m са различни цифри.

Задача 3. Цветна леха съдържа 27 рози, част от които са червени, а останалите са жълти. Лехата е с формата на правоъгълник, като разстоянията между съседните рози на трите реда и деветте колони са едни и същи.



Да се докаже, че съществува правоъгълник, върховете на който са рози с един и същи цвят.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   6   К Л А С

Задача 1. Фирма "Екосок" пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 *дм*, 0,5 *дм* и 1,5 *дм*. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 *см* и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 *см* и 14 *см*. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще й остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Задача 3. Докажете, че:

а) числата $1+3^2+3^4$ и $1+3^2+3^4+3^6$ са взаимно прости;

б) сумата $1+3^2+3^4+\ldots+3^{42}+3^{44}+3^{46}$ се дели на числото 533.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   7   К Л А С

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n, за което числото $2n^3 + 3n^2 - 1$ се дели на 2010.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,
М Л А Д Е Ж Т А   И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

Т Е М А   З А   8   К Л А С

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x-a| \le 2x+2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a=-1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a, за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M. Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC. Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45^\circ$.

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n, за които числото n^5+3n+4 е степен на числото 2.

Всяка задача се оценява със 7 точки.
Време за работа 4 часа.
Пожелаваме Ви успех!

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър a, за които корените x_1 и x_2 на уравнението $x^2 + (\sqrt{a+1} - a)x - 1 = 0$ са реални и удовлетворяват равенството

$$x_1^2 + x_2^2 + a^2 = 2a(x_1 + x_2) + 2 + \sqrt{a^3 + a^2 - 14a + 25}.$$

Задача 2. В даден четириъгълник $ABCD$ може да се впише окръжност k, която се допира до страните AB, BC, CD и DA в точките M, N, P и Q съответно. Нека S е средата на хордата, получена от пресичането на диагонала AC с окръжността k. Да се докаже, че е изпълнено равенството

$$SM.SQ = SN.SP.$$

Задача 3. Върху успоредните прави a и b са взети съответно точките A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4, които са две по две различни. Да се намери минималният възможен брой различни точки, получени при пресичането на отсечките A_iB_j, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$. (Включително самите точки A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4.)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се реши уравнението

$$20^{x^2}.10^x = 2$$

Задача 2. Външновписаната окръжност към страната AB на $\triangle ABC$ се допира до AB в точка D. Ако $\sphericalangle CAB = 2 \sphericalangle CDA$, да се намери стойността на отношението $AD : BD$.

Задача 3. Върху успоредните прави a и b са взети съответно точките A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4, които са две по две различни. Да се намери минималният възможен брой различни точки, получени при пресичането на отсечките A_iB_j, $i = 1, 2, 3, 4$; $j = 1, 2, 3, 4$. (Включително самите точки A_1, A_2, A_3, A_4 и B_1, B_2, B_3, B_4.)

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$2^{2ax+1} + 2^a \leq 2^{ax} + 2^{ax+a+1},$$

където a е реален параметър.

Задача 2. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} - 1$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата (a_n) е сходяща и да се намери нейната граница;

б) съществува n, за което $a_{2n} < 1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Задача 3. Дени попълва с ненулево цяло число някой от коефициентите на уравнение от 2010-та степен, след това Вени попълва също с ненулево цяло число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени всичките 2011 коефициента. Дени печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Вени. Коя от двете има печеливша стратегия?

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Първи ден, 17 април 2010 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се реши неравенството

$$2^{2ax+1} + 2^a \leq 2^{ax} + 2^{ax+a+1},$$

където a е реален параметър.

Задача 2. Нека $a_1 > 1$ и $a_{n+1} = a_n + \dfrac{1}{a_n} - 1$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че:

а) редицата (a_n) е сходяща и да се намери нейната граница;

б) съществува n, за което $a_{2n} < 1 + \dfrac{1}{2^{2^n}}$.

Задача 3. Дени попълва с ненулево цяло число някой от коефициентите на уравнение от 2010-та степен, след това Вени попълва също с ненулево цяло число друг от коефициентите и т.н., докато бъдат попълнени всичките 2011 коефициента. Дени печели, ако полученото уравнение има целочислен корен, а в противен случай печели Вени. Коя от двете има печеливша стратегия?

Време за работа: 4 часа и 30 минути