



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

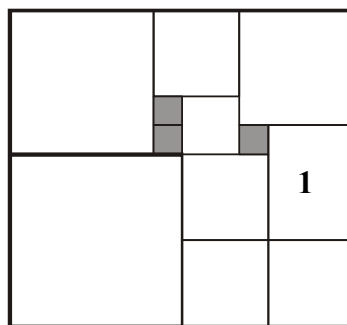
НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

ТЕМА ЗА 4 КЛАС

Задача 1. а) Пресметнете израза: $(118\ 178 : 74 + 8403) : 5 + 10$.

б) Намерете неизвестното число x от равенството: $(239 - 138 : x) \cdot 6 + 612 = 2010$.

Задача 2. Даденият правоъгълник на чертежа е разделен на 12 фигури. Едната от тях е правоъгълник и е означена с 1, а останалите 11 са квадрати. Всяко от трите най-малки квадратчета, които са затъмнени на чертежа, е с дължина на страната 1 см. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



Задача 3. Христо отишъл на гости на роднинско семейство, което имало 4 деца. Той попитал на колко години са децата, а бащата му поставил задача да ги открие сам, като използва, че произведението от годините им е равно на 72. Христо извършил известни пресмятания, но не успял да реши задачата. Тогава бащата уточнил, че сборът от годините на четирите деца е равен на годините на Христо. За съжаление Христо отново не бил в състояние да реши задачата и попитал дали някое от децата е на 2 години. Бащата дал отговор на този въпрос и Христо веднага съобщил годините на четирите деца.

Намерете годините на четирите деца и годините на Христо.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 4 КЛАС

Задача 1. а) Пресметнете израза: $(118\ 178 : 74 + 8403) : 5 + 10$.

б) Намерете неизвестното число x от равенството: $(239 - 138 : x) \cdot 6 + 612 = 2010$.

Решение: а) $118\ 178 : 74 = 1597$ **(1 т.)**

$1597 + 8403 = 10\ 000$ **(1 т.)**

$10\ 000 : 5 + 10 = 2000 + 10 = 2010$ **(1 т.)**

б) $(239 - 138 : x) \cdot 6 = 2010 - 612$

$(239 - 138 : x) \cdot 6 = 1398$ **(1 т.)**

$\Rightarrow 239 - 138 : x = 1398 : 6$

$239 - 138 : x = 233$ **(1 т.)**

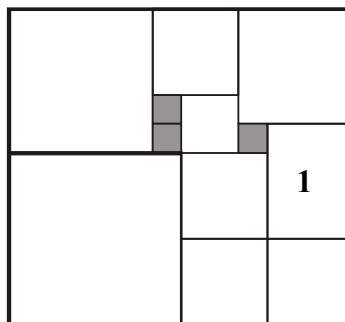
$\Rightarrow 138 : x = 239 - 233$

$138 : x = 6$ **(1 т.)**

$\Rightarrow x = 138 : 6$

$x = 23$ **(1 т.)**

Задача 2. Даденият правоъгълник на чертежа е разделен на 12 фигури. Едната от тях е правоъгълник и е означена с 1, а останалите 11 са квадрати. Всяко от трите най-малки квадратчета, които са затъмнени на чертежа, е с дължина на страната 1 см. Да се намери лицето на дадения правоъгълник.



Решение: Квадратът вдясно от двете затъмнени квадратчета има страна 2 см. **(1 т.)** Квадратът над него има страна 3 см, квадратът горе вляво има страна 5 см, а този горе вдясно има страна 4 см. **(2 т.)** Трите еднакви квадрата в долния десен ъгъл имат страна 3 см. **(1 т.)** Следователно квадратът в долния ляв ъгъл има страна 6 см **(1 т.)**, а правоъгълникът 1 е със страни 3 см и 4 см. **(1 т.)** Така получаваме, че страните на дадения правоъгълник са с дължини 12 см и 11 см, като за лицето му намираме $12 \cdot 11 = 132$ кв. см. **(1 т.)**

Задача 3. Христо отишъл на гости на роднинско семейство, което имало 4 деца. Той попитал на колко години са децата, а бащата му поставил задача да ги открие сам, като използва, че произведението от годините им е равно на 72. Христо извършил известни пресмятания, но не успял да реши задачата. Тогава бащата уточнил, че сборът от годините на четирите деца е равен на годините на Христо. За съжаление Христо отново не бил в състояние да реши задачата и попитал дали някое от децата е на 2 години. Бащата дал отговор на този въпрос и Христо веднага съобщил годините на четирите деца.

Намерете годините на четирите деца и годините на Христо.

Решение: Възможностите за представяне на 72 като произведение от 4 числа са представени в таблицата:

Първо дете	Второ дете	Трето дете	Четвърто дете	Сбор
1	1	1	72	75
1	1	2	36	40
1	1	3	24	29
1	1	4	18	24
1	1	6	12	20

1	1	8	9	19
1	2	2	18	23
1	2	3	12	18
1	2	4	9	16
1	2	6	6	15
1	3	3	8	15
1	3	4	6	14
2	2	2	9	15
2	2	3	6	13
2	3	3	4	12

За установяване на горния резултат **(3 т.)**. Ако годините на Христо не са 15, то отговорът би могъл да се установи съгласно таблицата. Следователно Христо е на 15 години и за годините на четирите деца има 3 възможности. **(2 т.)** Отговорът на въпроса дали някое от децата е на 2 години е отрицателен, защото в противен случай е необходима допълнителна информация (в два от разглежданите три случая има дете на 2 години). Единствената възможност е децата да са на 1, 3, 3 и 8 години. **(2 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

зад. 4.1 и зад. 4.2 – Иван Ангелов и Ивайло Старибратов, зад. 4.3 – Сава Гроздев

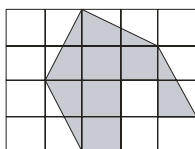


РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

ТЕМА ЗА 5 КЛАС

Задача 1. Даден правоъгълник с размери 5 см и 0,4 дм е разделен на единични квадратчета. Каква част от правоъгълника е затъмнена?

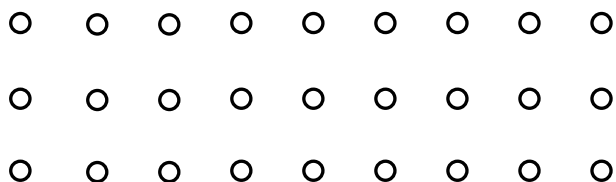


Задача 2. Намерете възможно най-голямата и възможно най-малката стойност на израза

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \frac{l}{m},$$

където $a, b, c, d, e, f, g, h, l$ и m са различни цифри.

Задача 3. Цветна леха съдържа 27 рози, част от които са червени, а останалите са жълти. Лехата е с формата на правоъгълник, като разстоянията между съседните рози на трите реда и деветте колони са едни и същи.



Да се докаже, че съществува правоъгълник, върховете на който са рози с един и същи цвят.

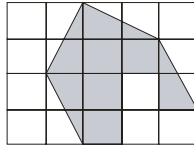
Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 5 КЛАС

Задача 1. Даден правоъгълник с размери 5 см и 0,4 дм е разделен на единични квадратчета. Каква част от правоъгълника е затъмнена?



Решение: 0,4 дм = 4 см. **(1 т.)** Лицето на правоъгълника е $5 \times 4 = 20$ кв. см. **(1 т.)** Затъмнената част на правоъгълника съдържа 4 единични квадратчета и 4 правоъгълни триъгълника, всеки от които има катети с дължини 2 см и 1 см. **(2 т.)** Лицето на един правоъгълен триъгълник с катети 2 см и 1 см е равно на 1 кв. см. **(1 т.)** Общото лице на затъмнената част е $4 + 4 \cdot 1 = 8$ кв. см **(1 т.)**, което е $\frac{8}{20} = \frac{2}{5}$ части от правоъгълника. **(1 т.)**

Задача 2. Намерете най-голямата и най-малката възможна стойност на израза

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} + \frac{l}{m},$$

където $a, b, c, d, e, f, g, h, l$ и m са различни цифри.

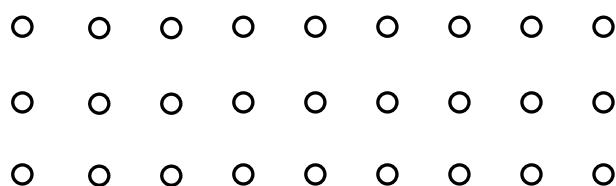
Решение: В израза се използват 10 различни цифри, т.е. използват се всичките цифри от 0 до 9 **(1 т.)**. Числото 0 трябва да е числител на някоя от дробите. **(1 т.)** При търсене на най-голямата стойност останалите 4 числителя трябва да са най-големите цифри, т.е. 9, 8, 7 и 6. **(1 т.)** По-голям сбор се получава, когато на по-голям числител отговаря по-малък знаменател. **(1 т.)** Следователно търсената най-голяма стойност на израза е

$$\frac{9}{1} + \frac{8}{2} + \frac{7}{3} + \frac{6}{4} + \frac{0}{5} = \frac{9 \cdot 12 + 8 \cdot 6 + 7 \cdot 4 + 6 \cdot 3}{12} = \frac{108 + 48 + 28 + 18}{12} = \frac{202}{12} = \frac{101}{6}. \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

При търсене на най-малката стойност четирите ненулеви числителя трябва да са най-малките ненулеви цифри, т.е. 1, 2, 3 и 4. Освен това, по-малък сбор се получава, когато на по-голям числител отговаря по-голям знаменател. **(1 т.)** Следователно търсената най-малка стойност на израза е

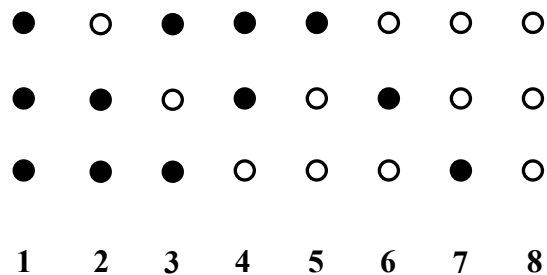
$$\frac{0}{5} + \frac{1}{6} + \frac{2}{7} + \frac{3}{8} + \frac{4}{9} = \frac{84 + 2 \cdot 72 + 3 \cdot 63 + 4 \cdot 56}{504} = \frac{84 + 144 + 189 + 224}{504} = \frac{641}{504}. \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

Задача 3. Цветна леха съдържа 27 рози, част от които са червени, а останалите са жълти. Лехата е с формата на правоъгълник, като разстоянията между съседните рози на трите реда и деветте колони са едни и същи.



Да се докаже, че съществува правоъгълник, върховете на който са рози с един и същи цвят.

Решение:



Нека черните кръгчета изобразяват червените рози, а белите кръгчета – жълтите рози. Разполагането на червени рози в една колонка от 3 рози може да стане по 8 различни начина, както е показано. **(2 т.)** Тъй като в цветната леха има 9 колонки, то в поне 2 колонки разположението на червените рози ще бъде едно и също. **(2 т.)** Ако двете еднакви колонки са измежду тези с номера 1, 2, 3 или 4, то ще има правоъгълник, върховете на който са червени рози. **(2 т.)** Ако двете еднакви колонки са измежду тези с номера 5, 6, 7 или 8, то ще има правоъгълник, върховете на който са жълти рози. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

зад. 5.1 и зад. 5.2 – Тони Чехларова, зад. 5.3 – Сава Гроздев



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

ТЕМА ЗА 6 КЛАС

Задача 1. Фирма “Екосок” пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 дм, 0,5 дм и 1,5 дм. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 см и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 см и 14 см. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще ѝ остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Задача 3. Докажете, че:

- числата $1 + 3^2 + 3^4$ и $1 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ са взаимно прости;
- сумата $1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{42} + 3^{44} + 3^{46}$ се дели на числото 533.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 6 КЛАС

Задача 1. Фирма “Екосок” пълни два вида опаковки със сок от боровинки и ги продава на една и съща цена. Първият вид има форма на правоъгълен паралелепипед с размери 1 дм, 0,5 дм и 1,5 дм. Вторият вид има форма на триъгълна пирамида с височина 20 см и основа правоъгълен триъгълник с катети 15 см и 14 см. От кой вид е по-изгодно да се купува?

Решение:

Обемът на опаковките от първия вид е $V_1 = 1 \cdot 0,5 \cdot 1,5 = 0,75$ куб. дм = 750 куб. см. **(3 т.)**

Обемът на опаковките от втория вид е $V_2 = \frac{15 \cdot 14 \cdot 20}{6} = 700$ куб. см. **(3 т.)**

По-изгодна е покупката на сокове от първия вид, защото $V_1 > V_2$. **(1 т.)**

Задача 2. Ани и Борис имат монети само по 1 стотинка и по 10 стотинки. Общо двамата имат между 100 и 200 монети, като Ани има толкова монети по 10 стотинки, колкото Борис има по 1 стотинка. Броят монети по 10 стотинки на Борис представлява 40% от броя монети по 1 стотинка на Ани. Ако Ани изхарчи 75% от парите си, ще ѝ остане сума, равна на сумата на Борис. Колко монети по 1 стотинка има Борис?

Решение: Тъй като 40% представлява $\frac{2}{5}$, то броят монети по 1 стотинка на Ани е кратен на 5. **(1 т.)** Нека Ани има x монети по 10 ст. и $5y$ монети по 1 ст. (x и y са естествени числа). Сумата на Ани е $A = (10x + 5y)$ ст. **(1 т.)** Тогава Борис има $2y$ монети по 10 ст. и x монети по 1 ст. Общата му сума е $B = (20y + x)$ ст. **(1 т.)** От условието следва, че сумата на Борис е 25% от тази на Ани, т.е. $4B = A$. **(1 т.)** Тогава $80y + 4x = 10x + 5y$, откъдето $75y = 6x$ или $25y = 2x$. **(1 т.)** Дясната страна на последното равенство е четно число и следователно $y = 2k$ за някое цяло число k . Тогава $x = 25k$. Общият брой монети е $25k + 5 \cdot 2k + 2 \cdot 2k + 25k = 64k$ и тъй като $100 < 64k < 200$, то $k = 2$ или $k = 3$. **(1 т.)** И в двата случая условията на задачата са изпълнени. И така, за монетите по 1 ст. на Борис получаваме два възможни отговора: $x = 25 \cdot 2 = 50$ или $x = 25 \cdot 3 = 75$. **(1 т.)**

Задача 3. Докажете, че:

а) числата $1 + 3^2 + 3^4$ и $1 + 3^2 + 3^4 + 3^6$ са взаимно прости;

б) сумата $1 + 3^2 + 3^4 + \dots + 3^{42} + 3^{44} + 3^{46}$ се дели на числото 533.

Решение: а) Тъй като $1 + 3^2 + 3^4 = 91 = 7 \cdot 13$ и

$$1 + 3^2 + 3^4 + 3^6 = (1 + 3^2) + 3^4(1 + 3^2) = 10 \cdot (1 + 3^4) = 2^2 \cdot 5 \cdot 41,$$

числата нямат общ делител и следователно са взаимно прости. **(2 т.)**

б) Сумата групираме по два начина. Най-напред по тройки: **(2 т.)**

$$\begin{aligned}
& 1+3^2+3^4+\dots+3^{42}+3^{44}+3^{46} = \\
& = (1+3^2+3^4)+3^6(1+3^2+3^4)+\dots+3^{42}(1+3^2+3^4) = \\
& = (1+3^2+3^4)(1+3^6+\dots+3^{42}) = \\
& = 13 \cdot 7 \cdot (1+3^6+\dots+3^{42})
\end{aligned}$$

След това по четворки: **(2 т.)**

$$\begin{aligned}
& 1+3^2+3^4+\dots+3^{42}+3^{44}+3^{46} = \\
& = (1+3^2+3^4+3^6)+3^8(1+3^2+3^4+3^6)+\dots+3^{40}(1+3^2+3^4+3^6) = \\
& = (1+3^2+3^4+3^6)(1+3^8+\dots+3^{40}) = \\
& = 41 \cdot 20 \cdot (1+3^8+\dots+3^{40})
\end{aligned}$$

Разлагаме на прости множители $533 = 41 \cdot 13$. От двете представяния следва, че сумата $1+3^2+3^4+\dots+3^{42}+3^{44}+3^{46}$ се дели на 13 и на 41. Но числата 13 и 41 са взаимно прости. Следователно сумата се дели и на тяхното произведение, т.е. на 533. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

зад. 6.1 и зад. 6.3 – Ирина Шаркова, зад. 6.2 – Ивайло Кортезов



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

ТЕМА ЗА 7 КЛАС

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n , за което числото $2n^3 + 3n^2 - 1$ се дели на 2010.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

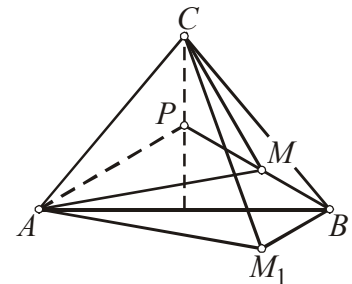
РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 7 КЛАС

Задача 1. Две машини с еднаква производителност могат да изпълнят половината от една поръчка за 2 часа и 30 минути, ако работят заедно. Едната от тях била заменена с нова машина, чиято производителност била с 50% по-голяма. За колко часа новата машина и една от старите машини ще изпълнят поръчката, ако работят заедно? Колко процента от цялата поръчка ще изпълни всяка от машините?

Решение: След като двете машини заедно свършват половината работа за 2 часа и 30 минути, те ще свършат цялата работа за 5 часа. Но двете машини са с еднаква производителност и следователно едната от тях би свършила работата сама за два пъти повече време, т.е. за 10 часа. Оттук намираме, че производителността на всяка от машините е $\frac{1}{10}$. **(2 т.)** Производителността на новата машина е с 50% по-голяма т.е. тя е $\frac{1}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{10} = \frac{3}{20}$. **(2 т.)** Ако една от старите и новата машина свършват работата за t часа, то $\frac{1}{10}t + \frac{3}{20}t = 1 \Leftrightarrow 5t = 20 \Rightarrow t = 4$. **(2 т.)** Старата машина извършва $\frac{1}{10} \cdot 4 = \frac{4}{10}$ от работата, т.е. 40%, а новата – 60%. **(1 т.)**

Задача 2. Даден е равнобедрен триъгълник ABC ($AC = BC$), в който $\sphericalangle ACB = 80^\circ$. Точка M е такава, че $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 30^\circ$. Да се намери $\sphericalangle AMC$.

Решение: Нека M е вътрешна точка и MB пресича височината през върха C в точка P . **(1 т.)** Тъй като $\sphericalangle ACB = 80^\circ$, то $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 50^\circ$. От $\sphericalangle MAB = 10^\circ$ и $\sphericalangle MBA = 30^\circ$ следва, че $\sphericalangle AMP = 40^\circ$ и $\sphericalangle MAC = 40^\circ$. **(1 т.)** Тъй като $\triangle ABC$ е равнобедрен, височината през C е и симетрала на AB , т.е. $AP = BP$. Следователно $\sphericalangle BAP = \sphericalangle ABM = 30^\circ$, откъдето $\sphericalangle MAP = 20^\circ$. Тогава $\sphericalangle CAP = 40^\circ - 20^\circ = 20^\circ$, т.е. $\sphericalangle CAP = \sphericalangle MAP$. **(1 т.)** Освен това $\sphericalangle ACP = \sphericalangle BCP = 40^\circ$. Следователно $\triangle APC \cong \triangle APM$ (II пр.). Оттук $AM = AC$. **(1 т.)** Сега намираме, че $\sphericalangle AMC = 70^\circ$. **(1 т.)**



Ако M_1 е външна точка, то $\triangle AMB \cong \triangle AM_1B$ (II пр.) и $AM_1 = AM = AC$. Тъй като $\sphericalangle M_1AC = 60^\circ$, то $\triangle M_1AC$ е равностранен и $\sphericalangle AM_1C = 60^\circ$. **(2 т.)**

Задача 3. Да се намери най-малкото естествено число n , за което числото $2n^3 + 3n^2 - 1$ се дели на 2010.

Решение: Имаме

$$\begin{aligned} 2n^3 + 3n^2 - 1 &= 2n^3 + 2n^2 + n^2 - 1 = 2n^2(n+1) + (n-1)(n+1) = (n+1)(2n^2 + n - 1) = \\ &= (n+1)(n^2 + n + n^2 - 1) = (n+1)^2(2n-1). \end{aligned} \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

Тъй като $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, то поне едно от числата $n+1$ и $2n-1$ трябва да се дели на 67. Да разгледаме двете възможности. Нека $n+1$ е кратно на 67. Тогава $n = 67k - 1$ за някое естествено число k . **(1 т.)** Получаваме, че $(n+1)^2(2n-1) = 67^2 k^2 (134k - 3)$. За да е изпълнена исканата делимост, трябва $k^2(134k - 3)$ да се дели на 30. Числото $134k - 3$ е нечетно и се дели на 3 точно когато k се дели на 3. Ето защо k трябва да се дели на 6.

(1 т.) Ако $k = 6$, то $k^2(134k - 3)$ не се дели на 5. При $k = 12$ исканата делимост е изпълнена. Получаваме, че в разглеждания случай най-малкото число, което търсим, е $n = 67 \cdot 12 - 1 = 803$. **(1 т.)**

Нека сега на 67 се дели числото $2n - 1$. Тогава можем да запишем, че $2n - 1 = 67m$ за някое естествено число m . Ясно е, че m е нечетно и получаваме $2n - 1 = 67(2l - 1)$, откъдето $n = 67l - 33$, където l е естествено число. **(1 т.)** Оттук $(n + 1)^2(2n - 1) = 67(67l - 32)^2(2l - 1)$ и за да е изпълнено исканото, трябва $(2l - 1)(67l - 32)^2$ да се дели на 30. Тъй като $2l - 1$ е нечетно, за да имаме делимост на 2, трябва l да е четно. Освен това $2l - 1 + 67l - 32 = 69l - 33 = 3(23l - 11)$ и заключаваме, че $2l - 1$ и $67l - 32$ едновременно се делят или не се делят на 3. Следователно делимост на 6 ще имаме точно когато l дава остатък 2 при деление на 6. **(1 т.)** При $l = 2$ нито един от множителите $2l - 1$ и $67l - 32$ не се дели на 5. При $l = 8$ делимостта на 5 е изпълнена и намираме $n = 503$. Тъй като $503 < 803$, търсеното n е 503. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

зад. 7.1 и зад. 7.2 – Теодоси Витанов, зад. 7.3 – Светлозар Дойчев



РЕПУБЛИКА БЪЛГАРИЯ
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО,
МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 17 април 2010 г.

ТЕМА ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x - a| \leq 2x + 2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a = -1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M . Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC . Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45^\circ$.

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n , за които числото $n^5 + 3n + 4$ е степен на числото 2.

Всяка задача се оценява със 7 точки.

Време за работа 4 часа.

Пожелаваме Ви успех!

РЕШЕНИЯ И КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ НА ЗАДАЧИТЕ ЗА 8 КЛАС

Задача 1. Дадено е неравенството $3|x-a| \leq 2x+2$, където a е параметър.

а) Да се реши неравенството при $a = -1$.

б) Да се намерят стойностите на параметъра a , за които множеството от решения на неравенството съдържа само от едно цяло число.

Решение: а) При $2x+2 < 0$, т.е. при $x < -1$, неравенството няма решение.

$$\text{При } -1 \leq x \text{ имаме } 3|x+1| \leq 2x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x+1) \leq 2x+2 \\ -2x-2 \leq 3(x+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq -1 \\ x \geq -1 \end{cases}.$$

Следователно при $a = -1$, решението на неравенството е $x = -1$. **(1 т.)**

б) Неравенството има решение при $2x+2 \geq 0$, т.е. при $x \geq -1$. При $x \geq -1$ имаме

$$3|x-a| \leq 2x+2 \Leftrightarrow \begin{cases} 3(x-a) \leq 2x+2 \\ 3(x-a) \geq -2x-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \leq 3a+2 \\ x \geq \frac{3a-2}{5} \end{cases}. \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

За да има неравенството решение, е необходимо $-1 \leq 3a+2$, откъдето получаваме $a \geq -1$. Тъй като при $a \geq -1$ имаме $-1 \leq \frac{3a-2}{5} \leq 3a+2$, то решението е интервалът

$$\left[\frac{1}{5}(3a-2); 3a+2 \right]. \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

Нека m е цяло число. То ще бъде единственото цяло решение на неравенството, когато $m-1 < \frac{1}{5}(3a-2) \leq m \leq 3a+2 < m+1$. **(1 т.)** Отгук получаваме $\frac{5m-3}{3} < a \leq \frac{5m+2}{3}$ и

$\frac{m-2}{3} \leq a < \frac{m-1}{3}$. **(1 т.)** От условието $\frac{5m-3}{3} < \frac{m-1}{3}$ следва, че $m < \frac{1}{2}$, а от

$\frac{m-2}{3} \leq \frac{5m+2}{3}$ получаваме $m \geq -1$, т.е. $m = -1$ или $m = 0$. **(1 т.)** При $m = -1$ имаме

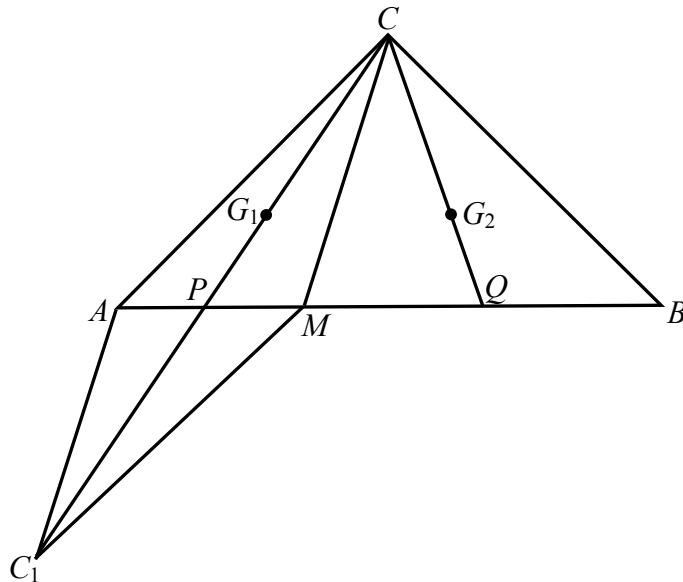
$a \leq -1$ и $a \geq -1$, т.е. $a = -1$. При $m = 0$ имаме $-1 < a \leq \frac{2}{3}$ и $-\frac{2}{3} \leq a < -\frac{1}{3}$, т.е.

$$a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right). \quad \mathbf{(1 \text{ т.})}$$

Окончателно неравенството има само едно цяло решение при $a = -1$ и $a \in \left[-\frac{2}{3}; -\frac{1}{3} \right)$.

Задача 2. Върху хипотенузата AB на равнобедрен правоъгълен триъгълник ABC е взета произволна точка M . Точките G_1 и G_2 са медицентровете съответно на триъгълниците AMC и BMC . Да се докаже, че $\angle G_1CG_2 > 45^\circ$.

Решение: Нека точките P и Q са средите съответно на отсечките AM и BM . Тъй като $G_1 \in CP$ и $G_2 \in CQ$, то $\angle G_1CG_2 = \angle PCQ$. **(1 т.)** От друга страна $\angle AMC + \angle BMC = 180^\circ$ и следователно поне един от тези два ъгъла не е остър, т.е. поне един от тези два ъгъла е най-големият в съответния триъгълник AMC или BMC . **(1 т.)** Заклучаваме, че отсечката CM е по-малка от бедрата на $\triangle ABC$. **(1 т.)** Върху продължението на CP да построим точката C_1 така, че P да е средата на CC_1 . **(1 т.)** Тогава четириъгълникът



$ACMC_1$ е успоредник и отгук $\angle PCM = \angle PC_1A$. **(1 т.)** Но в триъгълника ACC_1 имаме $AC_1 = CM < AC \Rightarrow \angle ACP < \angle PC_1A \Rightarrow \angle ACP < \angle PCM$. **(1 т.)** По същия начин доказваме, че $\angle QCM > \angle BCQ$, откъдето

$$\angle PCM + \angle QCM > \angle ACP + \angle BCQ \Rightarrow \angle PCQ > 90^\circ - \angle PCQ \Rightarrow \angle PCQ > 45^\circ. \text{ (1 т.)}$$

Задача 3. Да се намерят всички цели положителни числа n , за които числото $n^5 + 3n + 4$ е степен на числото 2.

Решение: Имаме:

$$n^5 + 3n + 4 = n^5 + 3n + 3 + 1 = n^5 - n^3 + n^3 + 1 + 3n + 3 = n^3(n-1)(n+1) + (n+1)(n^2 - n + 1) + 3(n+1) = (n+1)(n^4 - n^3 + n^2 - n + 4). \text{ (1 т.)}$$

От полученото разлагане следва, че числата $n+1$ и $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4$ трябва да са едновременно степени на числото 2, защото са по-големи от 1. **(1 т.)**

Нека $n+1 = 2^k$ и $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 = 2^m$ за някакви естествени числа k и m . Тъй като $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 - (n+1) = n^4 - n^3 + 2 + (n-1)^2 > 0$, то $m > k$. **(1 т.)**

Но тогава от $n \equiv -1 \pmod{2^k}$ ще следва, че $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 \equiv 8 \pmod{2^k}$. **(1 т.)**

От друга страна, $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4 = 2^m \equiv 0 \pmod{2^k}$ и получаваме, че 2^k трябва да дели 8, а това е възможно само ако $k \leq 3$. **(1 т.)**

При $k = 1, 2$ и 3 намираме съответно $n = 1, 3$ и 7 . **(1 т.)**

При $n = 1$ числото $n^5 + 3n + 4$ е равно на 8 и това е решение на задачата. При $n = 3$ числото $n^5 + 3n + 4$ е равно на $256 = 2^8$ и това също е решение на задачата. При $n = 7$ числото $n^4 - n^3 + n^2 - n + 4$ е равно на $2^3 \cdot 263$. Следователно $n = 7$ не е решение на задачата. **(1 т.)**

Задачите са предложени, както следва:

зад. 8.1 – Чавдар Лозанов, зад. 8.2 и зад. 8.3 – Светлозар Дойчев и Сава Гроздев