Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Да се реши системата

$$\left| \begin{array}{rcl} x + ay^2 + a^2z^2 & = & a^2 \\ x + by^2 + b^2z^2 & = & b^2 \\ x + cy^2 + c^2z^2 & = & c^2, \end{array} \right.$$

където a, b и c са реални параметри ($a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$).

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център на вписаната окръжност I. Окръжност, минаваща през върховете A и B пресича страните CA и CB за втори път в точките P и Q съответно.

а) Ако I лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $AP + BQ = PQ$;

б) Ако H лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $\dfrac{AP}{AH} + \dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{PQ}{CH}$.

Задача 6. Нека n е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществуват естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, такива че

$$7.2^n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 10. клас

Задача 4. Да се намерят всички естествени числа n, такива че за всяко x е изпълнено равенството:

$$(\sin x)^{2n} + (\cos x)^{2n} + n \sin^2 x \cos^2 x = 1.$$

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с ортоцентър H и център на вписаната окръжност I. Окръжност, минаваща през върховете A и B пресича страните CA и CB за втори път в точките P и Q съответно.

а) Ако I лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $AP + BQ = PQ$;

б) Ако H лежи на отсечката PQ, да се докаже, че $\dfrac{AP}{AH} + \dfrac{BQ}{BH} = \dfrac{PQ}{CH}$.

Задача 6. Нека n е естествено число. Да се намери най-малкото естествено число k, за което съществуват естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_k$, такива че

$$7.2^n = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_k^2.$$

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Даден е остроъгълен триъгълник ABC за който $\cos \sphericalangle BAC = \frac{1}{3}$. Правата през A, успоредна на медианата BM, $M \in AC$ пресича продължението на височината CC_1, $C_1 \in AB$ в точка D. Ако $CC_1 : C_1D = 2 : 1$, да се намери отношението $\frac{R}{r}$ където R и r са съответно радиусите на описаната и вписаната окръжност за $\triangle ABC$.

Задача 5. Клетките на таблица с 2009 реда и 2011 стълба са оцветени шахматно. Да се намери най-голямото естествено число k със следното свойство. При изтриване на произволни k клетки на таблицата, така че измежду неизтритите клетки има равен брой бели и черни, останалата част от таблицата (т.е. неизтритите клетки) може да се покрие с домина. (Доминото се състои от две клетки с обща страна).

Задача 6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b, за които $a - b$ се дели на n, числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Време за работа: 4 часа и 30 минути

Министерство на образованието, младежта и науката

59. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, Втори ден, 18 април 2010 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. В пространството са дадени правоъгълен $\triangle ABC$ с хипотенуза AB и равнина τ. Нека $\alpha = \sphericalangle (AC, \tau)$, $\beta = \sphericalangle (BC, \tau)$ и $\varphi = \sphericalangle (ABC, \tau)$.

а) Да се докаже, че $\sin^2 \varphi = \sin^2 \alpha + \sin^2 \beta$.

б) Ако $\alpha + \beta = 60^\circ$, да се намери най-малката стойност на φ.

Задача 5. Могат ли четири различни реални числа, които са измежду нулите на полином от трета степен и неговата производна, да образуват аритметична прогресия?

Задача 6. Нека $f(x)$ е полином с цели коефициенти и n е дадено естествено число. Известно е, че за всеки две цели числа a и b, за които $a - b$ се дели на n, числата $f(a)$ и $f(b)$ не са взаимно прости. Да се докаже, че съществува просто число p, за което p дели $f(x)$ за всяко цяло число x.

Време за работа: 4 часа и 30 минути