МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

1.09. 2010 г. – <u>Вариант 2</u>

УВАЖАЕМИ ЗРЕЛОСТНИЦИ,

Тестът съдържа **28 задачи** по математика от **два вида**:

- 20 задачи със структуриран отговор с четири възможни отговора, от които само един е верен;
- 8 задачи със свободен отговор.

Първите 20 задачи (от 1. до 20. включително) в теста са от затворен тип с четири възможни отговора, обозначени с главни букви от А до Г, от които само един е верен. Отговорите на тези задачи отбелязвайте с черен цвят на химикалката в **листа за отговори**, а не върху тестовата книжка. За да отбележите верния отговор, зачертайте със знака

кръгчето с буквата на съответния отговор. Например:

А Б В Г

Ако след това прецените, че първоначалният отговор не е верен и искате да го поправите, запълнете кръгчето с грешния отговор и зачертайте буквата на друг отговор, който приемате за верен. Например:

А В Г

За всяка задача трябва да е отбелязан не повече от един действителен отговор. Като действителен отговор на съответната задача се приема само този, чиято буква е зачертана със знака .

Отговорите на **задачите със свободен отговор (от 21. до 28. вкл.)** запишете в предоставения **свитък за свободните отговори**, като за задачи **от 26. до 28. вкл.** запишете пълните решения с необходимите обосновки.

ПОЖЕЛАВАМЕ ВИ УСПЕШНА РАБОТА!

Отговорите на задачите от 1. до 20 включително отбелязвайте в листа за отговори!

1.Кое от посочените числа е най-голямо?

А) $\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{3}}$ **Б)** $\log_3 1$ **В)** 2^{-5} **Г)** $\left(\frac{1}{16}\right)^{-\frac{1}{2}}$

2. Изразът $\frac{1}{\left(4\sqrt{5}+9\right)}$ **е равен на:**

А) $\frac{4\sqrt{5}-9}{61}$ **Б)** $4\sqrt{5}-9$ **В)** $9-4\sqrt{5}$ **Г)** $\frac{9-4\sqrt{5}}{61}$

3. Изразът $\frac{(x+1)(2x+1)}{x+2-x^2}$ **при** $x \neq -1, x \neq 2$ **е тъждествено равен на:**

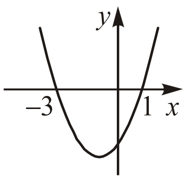
А) $\frac{2x+1}{x+2}$ **Б)** $\frac{2x+1}{2-x}$ **В)** $\frac{2x+1}{x-2}$ **Г)** $\frac{2x-1}{x-2}$

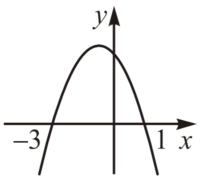
4. Решенията на неравенството $x^2+5x-6 \leq 0$ **са:**

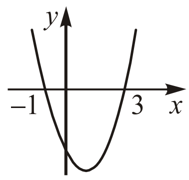
А) $x \in (-\infty; -6] \cup [1; +\infty)$ **Б)** $x \in [-1; 6]$

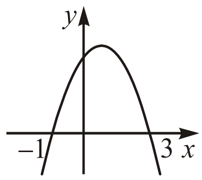
В) $x \in [-6; 1]$ **Г)** $x \in \left(-\infty; -\frac{1}{6}\right] \cup [1; +\infty)$

5. Графиката на функцията $y=-x^2+2x+3$ **е:**

А)


Б)


В)


Г)


6. Каква е функцията $f(x)=-x^2+5x+7$ **в интервала** $(1;2)$**?**

А) само растяща **Б) само намаляваща**

В) константа **Г) намаляваща и растяща**

7. Решенията на уравнението $x^2\sqrt{x-2}=0$ **са:**

А) само 2 **Б)** само 0 **В)** 0 и 2 **Г)** $x \in (-\infty; +\infty)$

8. Стойността на израза $\log_2 16 + 2\log_{\frac{1}{3}} 9 - \lg 0,0001$ **е равна на:**

А) 5 **Б)** 4 **В)** -3 **Г)** -4

9. Стойността на израза $\cos(90^\circ + \alpha) + \sin(180^\circ - \alpha) + \sin^2 80^\circ + \cos^2 80^\circ - 1$ **е:**

А) 1 **Б)** 2 **В)** 0 **Г)** 3

10. Ако α **е остър ъгъл и** $\cos\alpha = \sin 60^\circ \cos 18^\circ - \sin 18^\circ \cos 60^\circ$**, то:**

А) $\alpha = 32^\circ$ **Б)** $\alpha = 42^\circ$ **В)** $\alpha = 48^\circ$ **Г)** $\alpha = 80^\circ$

11.Петият член на аритметична прогресия е равен на -1**. Да се намери сумата на първите** 9 **члена на прогресията.**

А) -9 **Б)** -2 **В)** 0 **Г)** 9

12. Автомобилна фирма предлага свой нов модел автомобил с три различни двигателя, четири различни варианта на вътрешно обзавеждане и пет различни цвята на купето. Колко различни варианти на автомобила се предлагат на пазара?

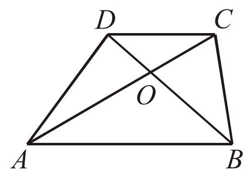
А) 12 **Б)** 15 **В)** 60 **Г)** 80

13. Решенията на системата $\left| \begin{array}{l} x^2 + y^2 = 61 \\ x + y = -1 \end{array} \right.$ **са:**

А) $(-5;-6);\ (-6;-5)$ **Б)** $(5;-6);\ (-6;5)$

В) $(-5;6);\ \ (6;-5)$ **Г)** $(5;6);\ \ (6;5)$

14. На чертежа $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ **е трапец, чиито диагонали се пресичат в точка** O **и лицето на** $\triangle DCO$ **е** 7 **cm²****, а лицето на** $\triangle AOB$ **е** 28 **cm²****. Отношението** $DO : BO$ **е равно на:**

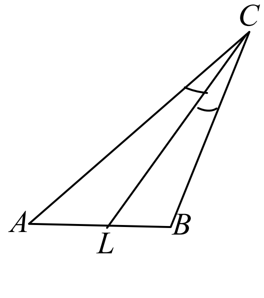


А) $1:2$ **Б)** $1:3$ **В)** $1:4$ **Г)** $4:1$

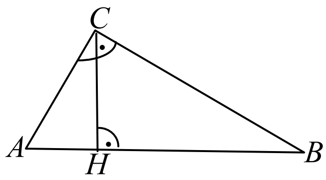
15. В $\triangle ABC$ $AC = 12$ **cm,** $BC = 8$ **cm и** $\sphericalangle ACB = 30^\circ$**. Ако** CL **е ъглополовящата на** $\sphericalangle ACB$**, то лицето на** $\triangle ACL$ **е:**

А) 9,6 **cm²** **Б)** 14,4 **cm²**

В) 16 **cm²** **Г)** 18 **cm²**



16. На чертежа CH **е височина към хипотенузата** AB **на правоъгълния** $\triangle ABC$**. Ако** $AH = 1$ **cm и** $CH = 2$ **cm, лицето на** $\triangle ABC$ **е:**



А) 12 **cm²** **Б)** 10 **cm²** **В)** 6 **cm²** **Г)** 5 **cm²**

17. Радиусът на описаната около $\triangle ABC$ **окръжност е** $17\sqrt{2}$ **и** $\cos\sphericalangle BAC = -\frac{4}{\sqrt{17}}$**.**

Дължината на страната BC **е равна на:**

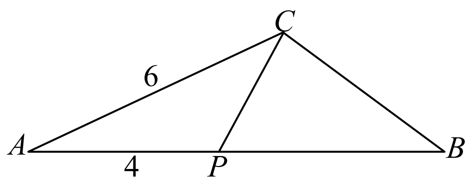
А) $8\sqrt{34}$ **Б)** $4\sqrt{34}$ **В)** $2\sqrt{34}$ **Г)** $\sqrt{34}$

18. Даден е успоредник $ABCD$ **със страна** $AD = 4$ **cm, диагонал** $BD = 4\sqrt{3}$ **cm и** $\angle ADC = 120°$**. Лицето на успоредника е:**

А) $16\sqrt{3}$ **cm²** **Б)** 16 **cm²** **В)** $8\sqrt{3}$ **cm²** **Г)** 8 **cm²**

19. В $\triangle ABC$ $AC = 6$ **cm и** $AB = 9$ **cm. Ако**

точка $P \in AB$ **е такава, че** $AP = 4$ **cm и** $CP = \frac{8}{3}$ **cm,**



то дължината на страната BC **е равна на:**

А) 4 **cm** **Б)** 5 **cm** **В)** 6 **cm** **Г)** 8 **cm**

20. Да се намери радиусът на окръжността, описана около трапец с основи 9 **cm и** 3 **cm и ъгъл при малката основа** $\alpha = 120°$**.**

А) $\sqrt{7}$ **cm** **Б)** 7 **cm** **В)** $\sqrt{21}$ **cm** **Г)** 21 **cm**

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. За геометрична прогресия с частно q **е дадено, че** $q^3 = \frac{1}{8}$**, а сборът** $a_3 + a_5 = 5$**. Да се намери** a_4**.**

22. В правоъгълния $\triangle ABC$ $\left(\sphericalangle ACB = 90°\right)$ $AB = 13$ **и** $\cos\sphericalangle BAC = \frac{12}{13}$**. Намерете радиуса на вписаната в триъгълника окръжност.**

23. Четириъгълникът $ABCD$ **е с лице** $9\,\mathbf{cm}^2$ **и е описан около окръжност с радиус** $1\,$**cm. Ако** $AD = 4\,$**cm и** $CD = 6\,$**cm, намерете дължините на страните** AB **и** BC**.**

24. При каква стойност на α**,** $\alpha \in \left[0°;180°\right]$**, изразът** $1+\cos\left(\alpha+30°\right)$ **приема най-малка стойност?**

25. В кутия са поставени 3 **еднакви топчета – бяло, зелено и червено. По случаен начин се изваждат едно по едно всичките топчета. Каква е вероятността изважданите топчета да се появят в последователност бяло, зелено, червено?**

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори

26. Да се реши уравнението $\sqrt{1+\frac{2}{x}}+4.\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$**.**

27. Като знаете, че числото $484000 = 2^5.5^3.11^2$ **намерете броя на неговите делители, като включите в тях и делителите** 1 **и** 484000**.**

28. В правоъгълния $\triangle ABC\left(\sphericalangle ACB = 90^\circ\right)$**, ъглополовящата** $BL\left(L \in AC\right)$ **и медианата** $CO\left(O \in AB\right)$ **се пресичат в точка** K**. Ако радиусът на окръжността, описана около** $\triangle ABC$**, е с дължина** 4 **и** $BL \perp CO$ **, намерете дължината на отсечката** AK**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0 \quad x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \quad ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$

Формули на Виет $\quad x_1+x_2=-\frac{b}{a} \quad x_1x_2=\frac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $(-\frac{b}{2a};-\frac{D}{4a})$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$; при $k\in\mathbb{N}$

$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$; при $a>0$, $n\geq 2$, $k\geq 2$ и $n, m, k\in\mathbb{N}$

$\log_a b=x \Leftrightarrow a^x=b \qquad \log_a a^x=x \qquad a^{\log_a b}=b$; при $b>0,\ a>0,\ a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=1.2.3\ldots(n-1)n=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)\ldots(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\frac{V_n^k}{P_k}=\frac{n.(n-1)\ldots(n-k+1)}{1.2.3\ldots(k-1)k}$

Вероятност $\quad P(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}} \qquad 0\leq P(A)\leq 1$

Прогресии

Аритметична прогресия: $\quad a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\frac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $\quad a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=\frac{a_nq-a_1}{q-1}=a_1\cdot\frac{q^n-1}{q-1}$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c{}^2 = a_1.b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник: $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$

$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана: $m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$

$m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - nm$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α^0	0^0	30^0	45^0	60^0	90^0
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\mathrm{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\mathrm{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^0-\alpha$	$90^0+\alpha$	$180^0-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\text{tg}\alpha$	$\text{cotg}\alpha$	$-\text{cotg}\alpha$	$-\text{tg}\alpha$
cotg	$-\text{cotg}\alpha$	$\text{tg}\alpha$	$-\text{tg}\alpha$	$-\text{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \qquad \cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\text{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\text{tg}\alpha\pm\text{tg}\beta}{1\mp\text{tg}\alpha\text{tg}\beta} \qquad \text{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\text{cotg}\alpha\text{cotg}\beta\mp1}{\text{cotg}\beta\pm\text{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha \qquad \cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\text{tg}2\alpha=\frac{2\text{tg}\alpha}{1-\text{tg}^2\alpha} \qquad \text{cotg}2\alpha=\frac{\text{cotg}^2\alpha-1}{2\text{cotg}\alpha} \qquad \sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha) \qquad \cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2} \qquad \cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right) \qquad \cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Учебен предмет – математика – 1 септември 2010 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**Г**	2
2	**В**	2
3	**Б**	2
4	**В**	2
5	**Г**	2
6	**А**	2
7	**А**	2
8	**Б**	2
9	**В**	2
10	**В**	2
11	**А**	2
12	**В**	2
13	**Б**	2
14	**А**	2
15	**Б**	2
16	**Г**	2
17	**В**	2
18	**А**	2
19	**А**	2
20	**В**	2
21	2	3
22	2	3
23	$AB = 3\,\text{cm},\ BC = 5\ \text{cm}$	3
24	150°	3
25	$\frac{1}{3!} = \frac{1}{3.2} = \frac{1}{6}$	3
26	$x = \frac{2}{3}$	15
27	$6.4.3 = 72$	15
28	$AK = 2\sqrt{7}$	15

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване на задача 26.

Първи начин:

1.Преобразуване на уравнението $\sqrt{1+\frac{2}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$

до еквивалетното му уравнение $\sqrt{\frac{x+2}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$ ***(2 т.)***

2. Полагане $\sqrt{\frac{x+2}{x}}=t$, $t>0$ ***(2 т.)***

2.Получаване на уравнението $t+\frac{4}{t}=4$ ***(2 т.)***

3. Решаване на уравнението

$t^2+4=4t \Leftrightarrow t^2-4t+4=0 \Leftrightarrow (t-2)^2=0 \Rightarrow t_{1,2}=2.$ ***(3 т.)***

4. Числата $t_{1,2}>0$ ***и следователно са решения на даденото уравнение (2 т.)***

5. От $\sqrt{\frac{x+2}{x}}=2$ ***се получава*** $\frac{x+2}{x}=4 \Leftrightarrow x+2=4x \Leftrightarrow 3x=2 \Rightarrow x=\frac{2}{3}.$ ***(2 т.)***

6. Проверка, че $x=\frac{2}{3}$ ***е корен на даденото уравнение (2 т.)***

Втори начин:

1.Повдигане двете страни на уравнението $\sqrt{1+\frac{2}{x}}+4\sqrt{\frac{x}{x+2}}=4$ ***на***

квадрат и получаване на уравнението $\frac{x+2}{x}+8+16.\frac{x}{x+2}=16$ ***(4 т.)***

2. Свеждане на полученото уравнение до уравнението $9x^2-12x+4=0$ ***(5 т.)***

3. Решаване на уравнението $(3x-2)^2=0$, $x_{1,2}=\frac{2}{3}$ ***(4 т.)***

4. Проверка за $x=\frac{2}{3}$***, че е корен на даденото уравнение (2 т.)***

27. Критерии за оценяване на задача 27.

1.Всички делители на 2^5 ***са*** $2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5$ ***- 6 на брой (3 т.)***

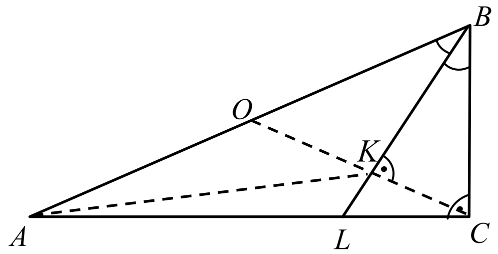
2. Всички делители на 5^3 ***са*** $5^0, 5^1, 5^2, 5^3$ ***- 4 на брой (3 т.)***

3. Всички делители на 11^2 ***са*** $11^0, 11^1, 11^2$ ***- 3 на брой (3 т.)***

4.Броят на всички делители на числото е равен

на произведението $6.4.3=72$ ***(6 т.)***

28. Критерии за оценяване на задача 28.



1***. Определяне центъра на описаната окръжност около*** $\triangle ABC$ ***– средата*** O ***на хипотенузата*** AB ***(2 т.)***

2***. Намиране на дължината на медианата*** $CO = 4$ ***и хипотенузата*** $AB = 8$ ***(2 т.)***

3***. Доказване , че*** $\triangle BOC$ ***е равностранен (*** BK ***височина и ъглополовяща в*** $\triangle BOC$ ***)*** ***(*** 3 ***т.)***

4***. Намиране на дължината на*** BC $BO = BC = 4$ ***(2 т.)***

5***. Намиране на дължината на страната*** AC $AC = \sqrt{8^2 - 4^2} = 4\sqrt{3}$
(или намиране на $BK = 2\sqrt{3}$ ***или намиране на*** $OK = 2$***)*** ***(2 т.)***

6***. Обосноваване , че отсечката*** AK ***се явява медиана в*** $\triangle AOC$ ***(2 т.)***

7***. Прилагане на формулата за медианата за намиране на дължината на отсечката*** $AK = 2\sqrt{7}$ ***(2 т.)***

****Забележка: За намирането на*** AK***, като се приложи косинусова теорема за*** $\triangle AOK$ ***или*** $\triangle ABK$ ***и се прескочат стъпките 6 и 7 ученикът получава 4 точки.***