Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

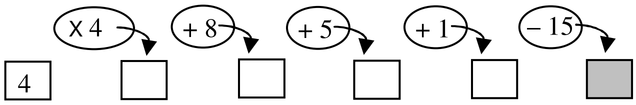
ТЕМА за 2 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Сашо изговорил числата от едно до осем, подредени по азбучен ред. Кое е петото число, което е изговорил Сашо?

A) три **B)** четири **C)** пет **D)** седем **E)** осем

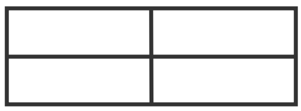
2. Извършете пресмятанията:



Кое е числото в затъмнената клетка?

A) 15 **B)** 8 **C)** 30 **D)** 16 **E)** 14

3. Пребройте правоъгълниците на чертежа.

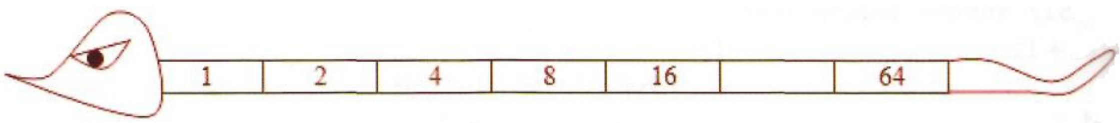


A) 1 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 8 **E)** 9

4. Няколко момичета са подредени в кръг. Мария е петата отляво на Дарина и шестата отдясно на нея. Намерете броя на момичетата.

A) 6 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** 13

5. Върху тялото на змията са написани няколко числа. Кое е липсващото число в празната клетка?



A) 24 **B)** 28 **C)** 32 **D)** 45 **E)** 50

6. От дадените плодове изберете четири с общо тегло 100 грама. Кой плод ще остане?

 слива 32 грама

 ягода 8 грама

 малина 5 грама

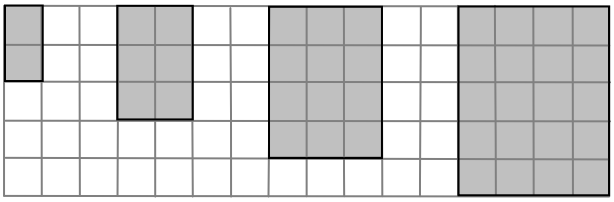
 кайсия 41 грама

 череша 22 грама

A) слива **B)** ягода **C)** малина **D)** кайсия **E)** череша

7. Два бонбона от един вид струват 8 стотинки, а три бонбона от друг вид струват 9 стотинки. С колко стотинки един бонбон от втория вид е по-евтин от един бонбон от първия?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5



8. Открийте закономерността и продължете редицата от правоъгълници. От колко квадратчета е съставен осмият правоъгълник?

A) 90 **B)** 72 **C)** 56 **D)** 45 **E)** 40

9. Днес в училище Антон има четири часа. Той сложил в чантата си ябълка, круша и портокал – по един плод за всяко междучасие. Майка му написала следното указание в какъв ред да яде плодовете: ябълка-круша-портокал. Колко различни указания би могла да напише майката на Антон?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

10. Яна наредила картончета с букви върху първата таблица, но малкото й братче разместило картончетата, както е показано на втората таблица. Под разместване се разбира размяна на местата на две картончета. Намерете колко най-малко размествания трябва да направи Яна, за да получи отново подреждането от първата таблица.

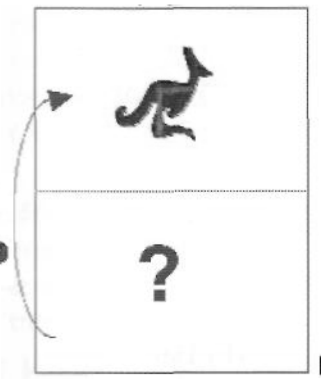
К	**Е**	**Н**
Г	**У**	**Р**
Ч	**Е**	**!**

!	**Ч**	**Е**
Р	**У**	**Г**
Н	**Е**	**К**

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

11. Лист хартия се прегъва по средата, както е показано на чертежа. Кое от нарисуваните кенгурчета трябва да поставите вместо въпросителната, без да го въртите, така че при прегъването двете картинки да съвпаднат?

A) **B)** **C)** **D)** **E)**



12. В датата **01.03.05** (1 март 2005 година) участват в нарастващ ред три последователни нечетни числа, показващи съответно деня, месеца и годината. Намерете колко дати от същия вид **ден.месец.година** има в периода от **01.01.00** (1 януари 2000 година) до **31.12.20** (31 декември 2020 година).

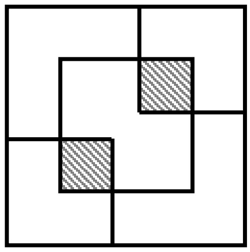
A) 5 **B)** 6 **C)** 15 **D)** 13 **E)** 8

13. Кое число трябва да се постави на мястото на въпросителната, ако всички действия са извършени вярно?

?	**+ 1** ⇨		**– 2** ⇨		**+ 3** ⇨	**6**

A) 9 **B)** 7 **C)** 4 **D)** 0 **E)** 1

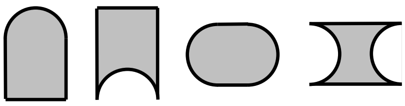
14. В два срещуположни края на даден квадрат със страна 70 *см* са начертани два квадрата със страни по 25 *см*, а в центъра му е начертан квадрат със страна 40 *см* (вижте чертежа, но имайте предвид, че квадратите са начертани с неточни размери). Двата защриховани квадрата са с едни и същи дължини на страните. Колко сантиметра е дължината на страната на всеки от защрихованите квадрати?

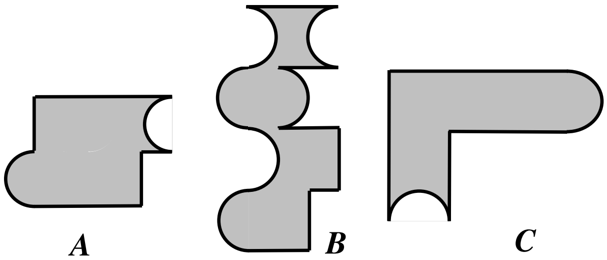


A) 5 **B)** 10 **C)** 15 **D)** 20 **E)** 25

15. Един стенен часовник бие на всеки кръгъл час (в 8:00, 9:00, 10:00 и т.н.). Той бие толкова пъти, колкото е часът (в 8:00 – 8 пъти, в 9:00 – 9 пъти и т.н.). На всеки половин час часовникът бие по веднъж (в 8:30 – веднъж, в 9:30 – веднъж, в 10:30 – веднъж и т.н.). Колко пъти бие часовникът от 6:15 до 12:20?

A) 37 пъти **B)** 44 пъти **C)** 45 пъти **D)** 57 пъти **E)** 63 пъти

16. Дадени са четири части от пъзел:  .



Коя от показаните вляво фигури ***A***, ***B*** и ***C*** е възможно да се нареди, като се използват всичките дадени части?

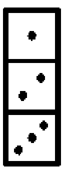
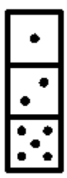
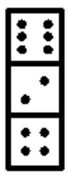
A) само ***A*** и ***B*** **B)** само ***A*** и ***C***

C) само ***B*** и ***C*** **D)** нито една **E)** всички

17. На един площад има 100 души, като 50 от тях са българи, 60 са мъже, а 91 са вегетарианци. Колко най-малко от хората на площада са едновременно българи, мъже и вегетарианци?

A) 1 **B)** 10 **C)** 41 **D)** 50 **E)** 51

18. Тяло е получено чрез залепване на три еднакви зарчета едно над друго така, че всеки две залепени стени са с еднакъв брой точки. Известно е, че сборът от точките върху всеки две срещуположни стени на зарчетата е 7. Кое от посочените по-долу тела е получено по този начин? (телата са погледнати отстрани)

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 2 клас

1. Отг. D). Подреждането на числата от 1 до 8 по азбучен ред е: **Д**ве, **Е**дно, **О**сем, **П**ет, **С**едем, **Т**ри, **Ч**етири, **Ш**ест.

2. Отг. А). $4\times4=16$; $16+8=24$; $24+5=29$; $29+1=30$; $30-15=15$.

3. Отг. Е).

4. Отг. С). Между Дарина и Мария вляво от Дарина има 4 деца, а между Дарина и Мария вдясно от Дарина децата са 5. Следователно всички деца са $4+5+2=11$.

5. Отг. С). Забележете, че всяко число се получава от предходното, като го съберем със себе си (т.е. всяко следващо число се получава от предходното, като го умножим по 2).

6. Отг. В). $32+5+41+22=100$.

7. Отг. А). $8:2=4$ стотинки струва един бонбон от първия вид; $9:3=3$ стотинки струва един бонбон от втория вид; $4-3=1$ стотинка.

8. Отг. В). Първият правоъгълник е съставен от $1\times2=2$ квадратчета, вторият – от $2\times3=6$ квадратчета, третият – от $3\times4=12$ квадратчета и т.н. Следователно осмият правоъгълник ще е съставен от $8\times9=72$.

9. Отг. Е). За първото междучасие има 3 възможности – ябълка, круша или портокал. След като единият плод е вече избран за първото междучасие, за второто остават 2 възможности (един от оставащите два плода). За третото междучасие възможността е единствена (оставащият трети плод). Следователно възможните указания са $3\times2=6$.

10. Отг. В). Само буквата **У** и буквата **Е** от третия ред са на мястото си. Следователно останалите 7 картончета трябва да променят местата си. С едно разместване се сменят местата на две картончета, с две размествания се сменят местата на четири картончета, с три размествания се сменят местата на шест картончета. Следователно в най-добрия случай, ако във всяко от тези три размествания участват различни картончета, то ще остане още едно картонче, на което трябва да се смени мястото. Следователно необходиямият брой размествания е най-малко четири. Ето четири размествания, които решават задачата. Първо разместване: **!** с **К**; второ разместване: **Р** с **Г**; трето разместване: **Ч** с **Е** (буквата **Е** е от първия ред); четвърто разместване: **Ч** с **Н**.

11. Отг. С).

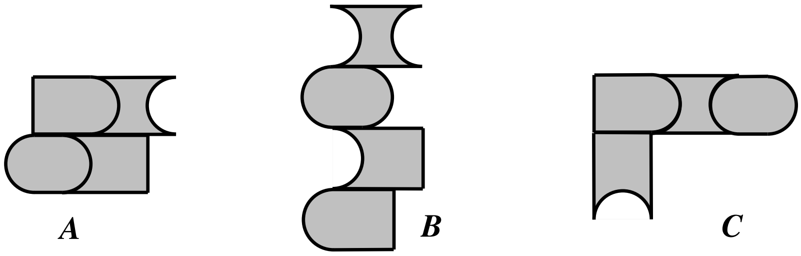
12. Отг. А). Датите с исканото свойство са: 01.03.05, 03.05.07, 05.07.09, 07.09.11 и 09.11.13. Техният брой е 5.

13. Отг. С). Тъй като знаем последния резултат, извършваме обратните действия отзад напред: $6-3=3$; $3+2=5$; $5-1=4$.

14. Отг. В). $25+25+40=90\,см$; $90-70=20\,см$ и 20 *см* е два пъти дължината на страната на всяко от защрихованите квадратчета. Следователно търсената дължина е 10 *см*.

15. Отг. Е). Часовникът бие общо $7+8+9+10+11+12=57$ пъти на кръглите часове от 6:15 до 12:20 и още 6 пъти на половинките (в 6:30, в 7:30, в 8:30, в 9:30, в 10:30 и в 11:30). Общо часовникът бие $57+6=63$ пъти.

16. Отг. E). Всички фигури могат да се получат по показаните начини.



17. Отг. A). Тъй като $100-50=50$, то 50 души не са българи. В "най-лошия" случай, ако всички, които не са българи, са мъже, то можем да заключим, че измежду 60-те мъже поне 10 са българи. Следователно поне 10 българи са мъже. От друга страна $100-91=91$, т.е. 9 не са вегетарианци. Ако тези 9, които не са вегетарианци, са измежду 10-те българи мъже, то поне един от българите мъже е вегетарианец.

18. Отг. D). Да разгледаме тялото **A)** и точките (числата), които се намират върху долните и горните стени на трите зарчета в него. Числото (точките), което е върху долната стена на долното зарче, е същото като числото върху горната стена на средното зарче. То е същото и върху долната стена на горното зарче. Заключаваме, че разглежданото число се появява точно 3 пъти върху долна или горна стена на участващите зарчета в тялото. От друга страна, това число фигурира точно 3 пъти върху всичките 18 стени на трите зарчета и следователно не е възможно да се появи върху лицевата или срещуположната стена на тялото. Върху лицевата стена на тялото **A)** обаче са числата 1, 2 и 3, а върху срещуположната – съответно числата 6, 5 и 4, т.е. всяко от числата 1, 2, 3, 4, 5 и 6 се появява върху лицевата или срещуположната стена на тялото **A**). Следователно разглежданото число също би трябвало да се появи върху лицевата или срещуположната стена на тялото **A**). Заключаваме, че тялото **A)** е невъзможно да се получи по правилата от условието на задачата. Аналогично се разсъждава за телата **B**), **C**) и **E**). Да забележим, че за всяко от тях върху лицевата и срещуположната им стена се намират всички възможни точки от 1 до 6. По този начин не остават стени на зарчета с еднакъв брой точки, които да се залепят. Не е такъв случаят с тялото **D**), върху лицевата и срещуположната стена на което се намират точките 1, 2, 5 и 6. При него залепванията могат да се осъществят по онези стени на трите зарчета, върху които са числата 3 и 4.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

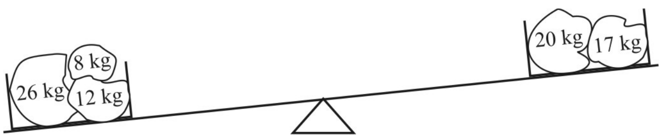
ТЕМА за 3 и 4 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Васко решил за изработи табелка **КЕНГУРУ**. Ако е започнал в четвъртък и всеки ден е рисувал по една буква, в кой ден от седмицата Васко е завършил табелката?

A) понеделник **B)** вторник **C)** сряда **D)** четвъртък **E)** петък

2. Кой камък трябва да се постави вдясно на теглилката, за да се изравни теглото на двете купчини камъни?



A) 

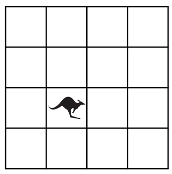
B) 

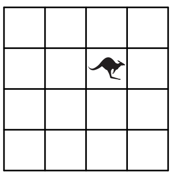
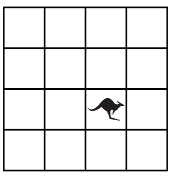
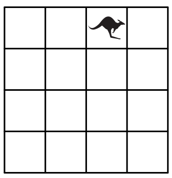
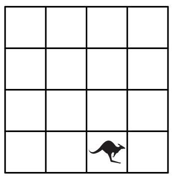
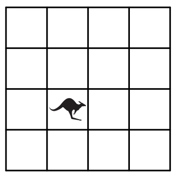
C) 

D) 

E) 

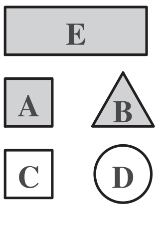
3. В едно от квадратчетата на показаната картинка има фигура на кенгуру. Нина придвижва фигурата от едно квадратче в съседно по следния начин: първо надясно, после нагоре, после наляво, после надолу и накрая надясно. Коя от следните картинки показва къде ще бъде фигурата на кенгуруто накрая?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

4. Симеон се събуди преди час и половина. След три часа и половина той ще се качи на влака, за да отиде при баба си. Колко време преди тръгването на влака се е събудил Симеон?

A) 2 часа **B)** 3 часа и половина **C)** 4 часа **D)** 4 часа и половина **E)** 5 часа



5. Мария описва една от петте показани табелки по следния начин: табелката не е с формата на квадрат; фонът на табелката е затъмнен; табелката е с формата на кръг или на триъгълник. Коя от табелките описва Мария?

A) **A** **B)** **B** **C)** **C** **D)** **D** **E)** **E**

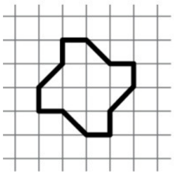
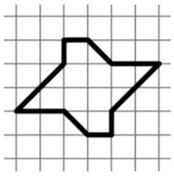
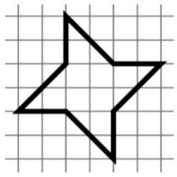
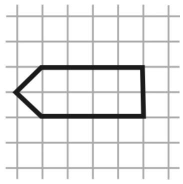
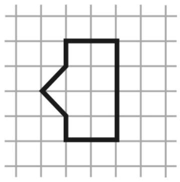
6. Гошко платил 1 лев и 50 стотинки за три шоколадови вафли. Мишо платил 2 лева и 40 стотинки за две кексчета. Колко трябва да плати Иво за една шоколадова вафла и едно кексче?

A) 1 лев и 70 ст. **B)** 1 лев и 90 ст. **C)** 2 лева и 20 ст. **D)** 2 лева и 70 ст. **E)** 3 лева и 90 ст.

7. Един стенен часовник бие на всеки кръгъл час (в 8:00, 9:00, 10:00 и т.н.) толкова пъти, колкото е часът, а на всеки половин час – по веднъж (в 8:30, 9:30, 10:30 и т.н.). Колко пъти бие часовникът от 7:55 до 10:45?

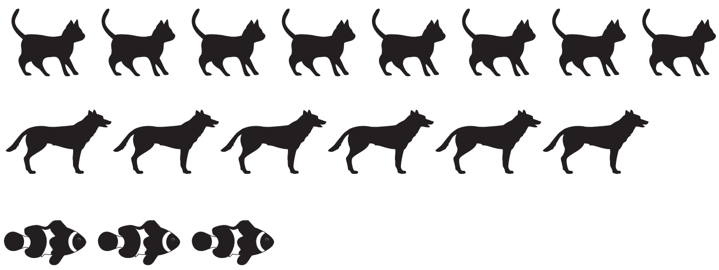
A) 6 пъти **B)** 18 пъти **C)** 27 пъти **D)** 30 пъти **E)** 33 пъти

8. Коя от посочените фигури заема най-голяма площ?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. Един продавач на яйца разполага с кутии за 6 яйца и с кутии за 12 яйца. Колко най-малко кутии трябва да използва продавачът, за да подреди 66 яйца?

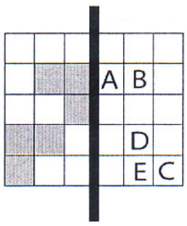
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11



10. Учениците от един квартал притежават поне по един, но най-много по два домашни любимеца. Домашните любимци на всички ученици от квартала са показани на картинката. Учениците с два любимеца са следните: двама притежават по едно куче и по една рибка, а трима – по една котка и по едно куче. Колко са учениците в този квартал?
A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 17

11. Росен има в джоба си 13 монети, всяка от които е от 5 или 10 стотинки. Коя от посочените стойности в стотинки не може да бъде получена от всичките монети на Росен?

A) 80 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 115 **E)** 125



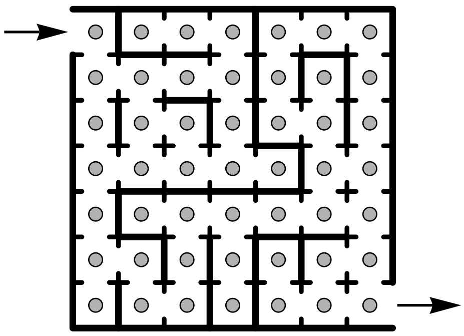
12. Листът, показан на картинката, се прегъва по плътната тъмна линия. Коя буква не се покрива от затъмнено квадратче при това прегъване?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

13. Ана, Мария, Вики, Невена, Боряна и Явор хвърляли зарче последователно един след друг. На всеки се паднало различно число. Числото на Ана било два пъти по-голямо от това на Мария. Числото на Ана било три пъти по-голямо от това на Вики. Числото на Невена било четири пъти по-голямо от това на Боряна. Кое число е хвърлил Явор?
A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

14. При една игра на думи са в сила следните правила: в началото всеки участник започва играта с 10 точки и трябва да отговори на 10 въпроса; за правилен отговор той получава 1 точка, а за грешен отговор му се отнема 1 точка. В края на играта Ралица събрала 14 точки. Колко правилни отговора е дала тя?
A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

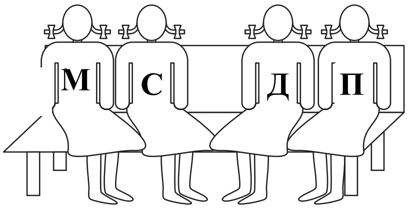
15. На картинката е показан магически лабиринт. Във всяко квадратче на лабиринта има парченце сирене. Мишката Рони влиза в лабиринта и целта й е да излезе с възможно най-много взети парченца сирене. Не се разрешава преминаване два пъти през едно и също квадратче. Колко най-много парченца сирене може да вземе мишката Рони?



A) 17 **B)** 33 **C)** 37 **D)** 41 **E)** 49

16. По време на едно тържество всяка от две еднакви торти е разрязана на четири еднакви части. После всяка от тези части е разрязана на три равни парчета. След като всеки гост на тържеството си взел по едно парче торта, останали три парчета. Колко са били гостите на тържеството?

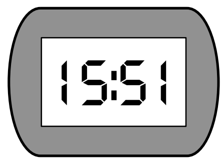
A) 24 **B)** 21 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 13



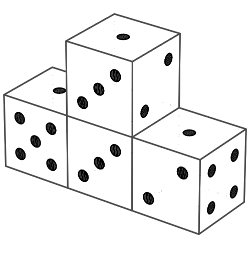
17. Четири приятелки Маша (М), Саша (С), Даша (Д) и Паша (П) седели на една пейка. Първо Маша сменила мястото си с Даша, а после Даша сменила мястото си с Паша, като момичетата се оказали подредени отляво надясно по начина, показан на картинката: Маша, Саша, Даша и Паша. В какъв ред отляво надясно са седели четирите приятелки в началото?

A) Маша, Саша, Даша, Паша **B)** Маша, Даша, Паша, Саша **C)** Даша, Саша, Паша, Маша **D)** Саша, Маша, Даша, Паша **E)** Паша, Маша, Саша, Даша

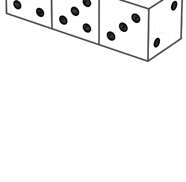
18. Колко пъти в денонощието се появяват едновременно 2 единици и 2 петици върху циферблата на електронния часовник? На картинката е показана една възможност.

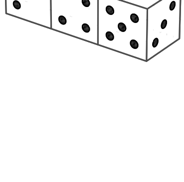


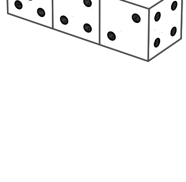
A) 1 **B)** 24 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 12

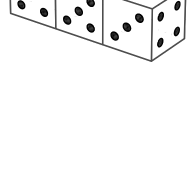


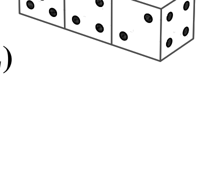
19. На картинката е показана конструкция от 4 еднакви зарчета. За всяко зарче важи правилото, че сборът на точките върху противоположните страни е равен на 7. Как изглежда конструкцията, погледната отзад?

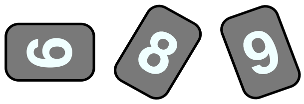

A)


B)


C)


D)

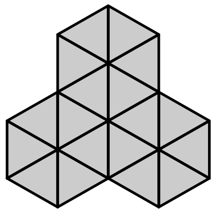

E)

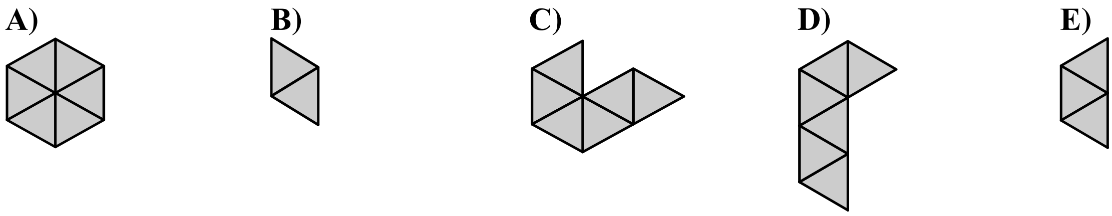


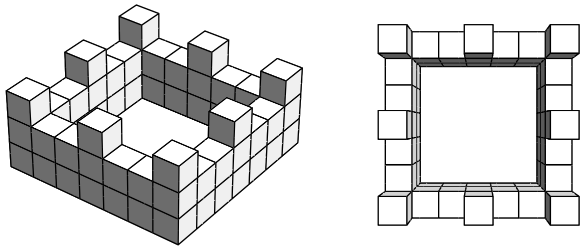
20. С трите карти, показани вляво, могат да се изписват различни числа, например 989 или 986. Колко различни трицифрени числа могат да се изпишат с помощта на трите карти?

A) 4 **B)** 6 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 12

21. Андрея избира една от показаните по-долу 5 фигури и с необходимия брой екземпляри от нея се стреми да конструира фигурата вдясно. С коя от 5-те фигури тя не може да постигне целта си?





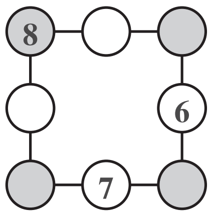


22. На първата картинка е показан замък, построен от еднакви кубчета. С колко кубчета е построен замъкът, ако на втората картинка е показан изглед отгоре?

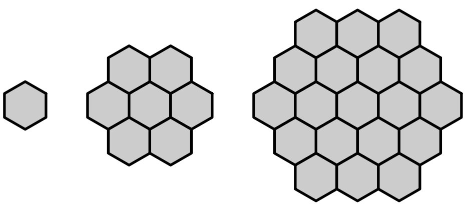
A) 56 **B)** 60 **C)** 64 **D)** 68 **E)** 72

23. Коки поставил цифрите 6, 7 и 8 в три от кръгчетата на картинката. В останалите кръгчета той трябва да постави всяка от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 така, че сумата на цифрите в кръгчетата върху всяка страна на квадрата да е равна на 13. Намерете сумата на цифрите в затъмнените кръгчета.

A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16



24. Силвия съставила три фигури с помощта на шестоъгълници, както е показано на картинката.



Тя продължила да съставя фигури с помощта на шестоъгълници, следвайки същата закономерност. Колко шестоъгълника ще са необходими за петата поред фигура?

A) 37 **B)** 49 **C)** 57 **D)** 61 **E)** 64

<u>РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 3 и 4 клас</u>

1. Отг. C). Думата “КЕНГУРУ” има 7 букви и сряда е седмият ден от четвъртък нататък.

2. Отг. C). $26+12+8=46\,kg$, $20+17=37\,kg$, $46-37=9\,kg$.

3. Отг. B).

4. Отг. E). Час и половина + три часа и половина = 5 часа.

5. Отг. B).

6. Отг. A). Една вафла струва 50 ст., а едно кексче струва 1 лв. 20 ст. Вафлата и кексчето струват общо 1 лв. 70 ст.

7. Отг. D). Часовникът бие общо $8+9+10=27$ пъти на кръглите часове от 7:55 до 10:45 и още 3 пъти на половинките. Общо часовникът бие $27+3=30$ пъти.

8. Отг. C). Фигурата от **A)** съдържа 8 цели квадратчета 4 половинки, т.е. общо 10 цели квадратчета. Фигурата от **B)** съдържа 8 цели квадратчета 6 половинки, т.е. общо 11 цели квадратчета. Фигурата от **C)** съдържа 8 цели квадратчета 8 половинки, т.е. общо 12 цели квадратчета. Фигурата от **D)** съдържа 8 цели квадратчета 2 половинки, т.е. общо 9 цели квадратчета. Фигурата от **E)** съдържа 8 цели квадратчета 2 половинки, т.е. общо 9 цели квадратчета. Заключаваме, че фигурата от **C)** заема най-голяма площ.

9. Отг. B). В 5 от по-големите кутии могат да се поставят 60 яйца. Останалите 6 яйца могат да се поставят в 1 от по-малките кутии. Следователно продавачът трябва да използва най-малко $5+1=6$ кутии.

10. Отг. B). Учениците с по два любимеца са 5 и те притежават общо 5 кучета, 3 котки и 2 рибки. С помощта на картинката заключаваме, че останалите ученици притежават общо 5 котки, 1 куче и 1 рибка, т.е. общо 7 любимеца. Тъй като тези ученици притежават по един любимец, техният брой е точно 7. Следователно учениците в този квартал са $5+7=12$.

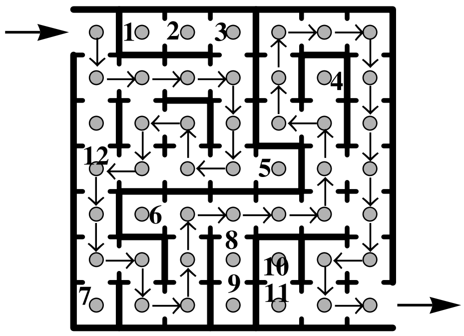
11. Отг. B). Ако заменим монетите от 10 ст. с монети от 5 ст., ще получим най-малко 13 монети от 5 ст. (те са точно 13, когато всички монети в джоба на Росен са от 5 ст.). Но $13.5=65$ ст., което е повече от 60 ст. Останалите стойности могат да се реализират. Така, 80 ст. се получават с 10 монети от 5 ст. и 3 монети от 10 ст., 70 ст. се получават с 12 монети от 5 ст. и 1 монета от 10 ст., 115 ст. се получават с 3 монети от 5 ст. и 10 монети от 10 ст., а 125 ст. се получават от 1 монета от 5 ст. и 12 монети от 10 ст. Във всеки от изброените случаи участващите монети са точно 13.

12. Отг. E).

13. Отг. D). От факта, че числото на Невена е четири пъти по-голямо от това на Боряна, следва, че числото на Невена е 4, а това на Боряна е 1. Тогава от факта, че числото на Ана е три пъти по-голямо от това на Вики, следва единствената възможност, че числото на Ана е 6, а това на Вики е 2. Сега от факта, че числото на Ана е два пъти по-голямо от това на Мария, следва, че числото на Мария е 3. Оставащото число е 5 и следователно то е хвърлено от Явор.

14. Отг. Е). Четирите спечелени точки на Ралица са от 4 правилни отговора. Заключаваме, че останалите 6 отговора са се “неутрализирали”, което означава, че 3 от отговорите са били правилни, а другите 3 са били грешни. Следователно общият брой правилни отговори на Ралица е $4+3=7$.

15. Отг. С).



Квадратчетата, означени с числата от 1 до 11 включително, са “задънени”, т.е. при попадане в тях е невъзможно да се продължи по-нататък, без да се наруши изискването от условието на задачата. Следователно мишката Рони не може да вземе парченцата сирене от тези 11 квадратчета. Ключово е квадратчето, означено с числото 12. До него може да се стигне по два начина: директно надолу от входното квадратче или от квадратчето, разположено вдясно от него. В първия случай е задължително да се продължи надолу, защото ако се отиде в квадратчето вдясно, то със сигурност трябва да се премине повторно през 12 и се нарушава изискването. Но ако се продължи надолу, то тогава е невъзможно преминаването през 13 квадратчета, включващи тези с номера 1, 2, 3 и 5. Заключаваме, че повече парченца сирене могат да се вземат, ако от входа се тръгне вдясно по посока на стрелките. В този случай е невъзможно да се премине през квадратчето, което се намира непосредствено над квадратчето с номер 12. Получаваме, че със сигурност трябва да се пропуснат най-малко $11+1=12$ парченца сирене. Тъй като всички парченца са $7.7=49$, то най-много биха могли да се съберат $49-12=37$ парченца. На картинката с помощта на стрелки е показан маршрут, при който се събират точно 37 парченца сирене.

16. Отг. В). От двете торти са получени $2.4=8$ части, а от тези части са получени общо $8.3=24$ равни парчета. След като са останали 3 парчета, то консумираните са $24-3=21$ и следователно гостите на тържеството са били 21.

17. Отг. С). Ще решим задачата отзад напред. Преди последната смяна подреждането е било **МСПД** и след като Даша сменила мястото си с Паша, се е получило крайното подреждане от картинката **МСДП**. Преди първата смяна подреждането е било **ДСПМ** и след като Маша сменила мястото си с Даша, се е получило подлеждането **МСПД**. Следователно първоначалното подреждане е **ДСПМ**.

18. Отг. С). Часовете, в които се появяват едновременно 2 единици и 2 петици, са: 11:55, 15:15 и 15:51, т.е. появяванията са точно 3.

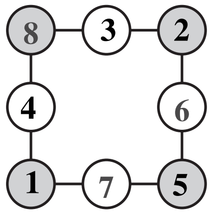
19. Отг. С).

20. Отг. Е). Ако осмицата е фиксирана, останалите две карти могат да се комбинират по $2.2=4$ различни начина: 66, 69, 96 и 99. Тъй като осмицата може да бъде цифра на стотиците, цифра на десетиците или цифра на единиците, то всички възможни трицифрени числа са $4.3=12$, а именно 866, 869, 896, 899, 686, 689, 986, 989, 668, 698, 968 и 998.

21. Отг. D). Ясно е, че с 3 шестоъгълника от вида **A)** е възможно конструирането на фигурата от условието на задачата. С 3 части от вида **B)** може да се конструира шестоъгълника от **A)**, а следователно и фигурата от условието на задачата. С 2 части от вида **E)** също може да се конструрира шестоъгълника от **A)**, а следователно и фигурата от условието. С 3 части от вида **C)** може директно да се конструира фигурата от условието на задачата. Единствено с фигурата от **D)** това не може да се направи.

22. Отг. A). Основата на замъка е квадрат, чиято страна е съставена от 7 кубчета. За долния слой на замъка са използвани $2.7+2.5=14+10=24$ кубчета. Същият брой кубчета е използван и за средния слой. Най-отгоре има 8 кубчета и следователно търсеният брой кубчета е $24+24+8=56$.

23. Отг. E). $8+2+5+1=16$.



24. Отг. D). В средния слой на фигурите има съответно 1, 3, 5, 7, 9 и т.н. шестоъгълника, т.е. в средния слой на фигурите броят на шестоъгълниците са последователните нечетни числа. Броят на слоевете във всяка фигура е равен на броя на шестоъгълниците в средния слой. Така, в първата фигура има 1 слой, във втората фигура има 3 слоя, в третата фигура има 5 слоя, след това 7 слоя, 9 слоя и т.н. За всяка фигура броят на шестоъгълниците в слоевете над средния и в слоевете под средния намалява с 1 в сравнение с предния слой в посока нагоре и в посока надолу. От така забелязаната закономерност следва, че за петата поред фигура има 9 шестоъгълника в средния слой и броят на слоевете е 9. В два от слоевете (тези, непосредствено над и под средния) има по 8 шестоъгълника, в следващите два (в посока нагоре и посока надолу) има по 7 шестоъгълника, в следващите два има по 6 шестоъгълника и в последните два слоя (слоевете стават точно 9) има по 5 шестоъгълника. Общият брой шестоъгълници е $9+16+14+12+10=61$.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

ТЕМА за 5 и 6 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Моторист изминава 28 *км* за 30 минути. Намерете скоростта на моториста в *км/ч*.

A) 28 **B)** 36 **C)** 56 **D)** 58 **E)** 62

2. Васил изработил табелка **ЕВРОПЕЙСКО КЕНГУРУ**. Ако е започнал в сряда и всеки ден е рисувал по една буква, в кой ден от седмицата е завършил Васил табелката?

A) сряда **B)** четвъртък **C)** петък **D)** събота **E)** неделя

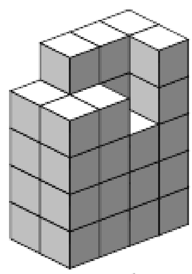
3. Квадратен лист хартия е срязан на две части, като разрезът е по права линия. Коя от посочените фигури не може да се получи в резултат на срязването?

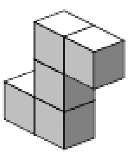
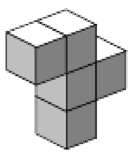
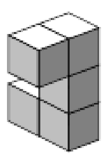
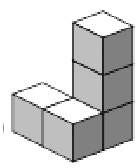
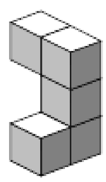
A) квадрат **B)** правоъгълник **C)** правоъгълен триъгълник **D)** петоъгълник **E)** равнобедрен триъгълник

4. Жителите на Лудоград не използват числа, съдържащи цифрата 3. Къщите от дясната страна на една улица в този град са с нечетни номера. Ако първата къща е с номер 1, кой е номерът на петнадесетата къща?

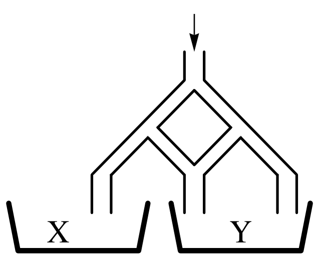
A) 29 **B)** 41 **C)** 43 **D)** 45 **E)** 47

5. Коя от посочените части трябва да се постави на празното място на чертежа, за да се получи правоъгълен паралелепипед?



A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

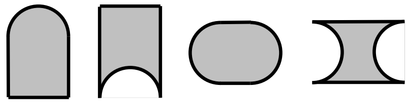
6. В горната тръба от чертежа изсипали 1000 литра вода. Ако на всяко разклонение количеството вода се разделя на две равни части, колко литра вода са се влели в съд Y?



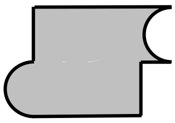
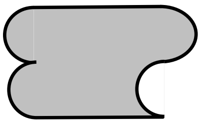
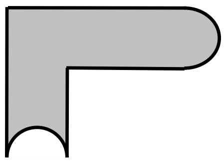
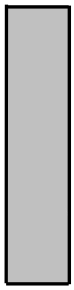
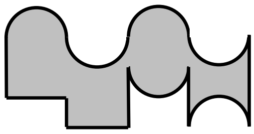
A) 800 **B)** 750 **C)** 666,67 **D)** 660 **E)** 500

7. В датата **01.03.05** (1 март 2005 година) участват в нарастващ ред три нечетни числа, показващи съответно деня, месеца и годината, като трите числа се различават с едно и също число. Намерете колко такива дати от вида **дд.мм.гг** има през 21-ви век.

A) 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

8. Дадени са четири части от пъзел:  .

Коя от посочените фигури не може да бъде наредена, като се използват всички дадени части?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. През деня, в който не лови мишки, котката Лиза изпива 60 *мл* мляко. През деня, в който лови мишки, тя изпива с $\frac{1}{3}$ пъти повече мляко. Последните две седмици котката Лиза хващала мишки през ден. Колко милилитра мляко е изпила Лиза през тези две седмици?

A) 840 **B)** 980 **C)** 1050 **D)** 1120 **E)** 1960

10. Андрей записал една след друга буквите на думата **KANGAROO** в клетките на правоъгълна таблица с размери 2×4, като спазил следните правила:

1) Първата буква **K** може да се запише в произволна клетка на таблицата.

2) Всяка следваща буква трябва да се запише в клетка, която има поне една обща точка с клетката, използвана за предишната буква.

Коя от дадените таблици не е възможно да е била попълнена от Андрей?

A)

N	**G**
A	**A**
K	**R**
O	**O**

B)

K	**A**
N	**O**
O	**G**
R	**A**

C)

O	**O**
K	**R**
A	**A**
G	**N**

D)

K	**A**
N	**G**
O	**O**
R	**A**

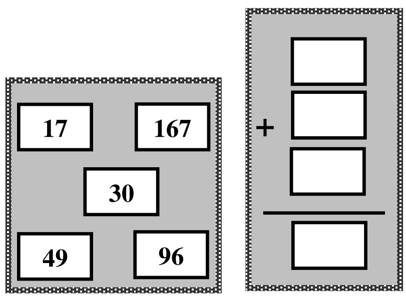
E)

K	**O**
A	**O**
R	**N**
A	**G**

11. В нарастващ ред са записани всички четирицифрени числа, образувани с помощта на цифрите 0, 1, 1, и 2. Намерете разликата на двете числа, между които е записано числото 2011.

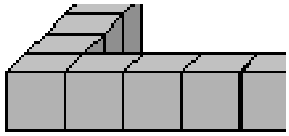
A) 890 **B)** 891 **C)** 900 **D)** 909 **E)** 990

12. Преместете четири от числата от таблото вляво в празните клетки вдясно така, че събирането да е вярно. Кое число ще остане на таблото вляво?



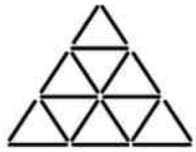
A) 17 **B)** 30 **C)** 49 **D)** 96 **E)** 167

13. Нина подредила ограда около квадратен участък, като използвала 36 еднакви кубчета (част от оградата е показана на чертежа). Още колко кубчета са необходими, за да се запълни квадратният участък?



A) 36 **B)** 49 **C)** 64 **D)** 81 **E)** 100

14. Фигурата на чертежа е получена с помощта на 18 еднакви клечки и съдържа общо 13 триъгълника. Колко триъгълника най-много могат да се "развалят" с премахването само на една клечка?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

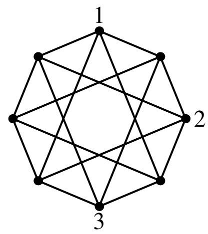
15. Като умножавал дадено число с 301, Павел забравил нулата и умножил числото с 31. Той получил резултат 372. Какъв резултат е трябвало да получи Павел?

A) 3010 **B)** 3612 **C)** 3702 **D)** 3720 **E)** 30 720

16. $3030,303:1,5=?$

A) 2020,202 **B)** 20202,02 **C)** 220,22 **D)** 22,22 **E)** 22,022

17. Дадени са осем точки, които са съединени с отсечки, както е показано на чертежа. Във всяка точка трябва да се запише някое от числата 1, 2, 3 или 4 така, че в краищата на всяка от построените отсечки да стоят различни числа. Три от числата са вече записани. Колко общо ще бъдат четворките?

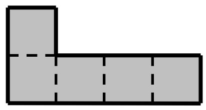


A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

18. В три поредни срещи футболният отбор на "Барселона" отбелязал три гола и получил един гол. Една от срещите била спечелена, другата – загубена, а третата завършила наравно. Какъв е резултатът в спечелената от отбора на "Барселона" среща?

A) $2:0$ **B)** $3:0$ **C)** $1:0$ **D)** $2:1$ **E)** $0:1$

19. Даниел иска да направи квадрат, като използва само парчета, еднакви с показаното на чертежа. Колко най-малко такива парчета са му необходими?

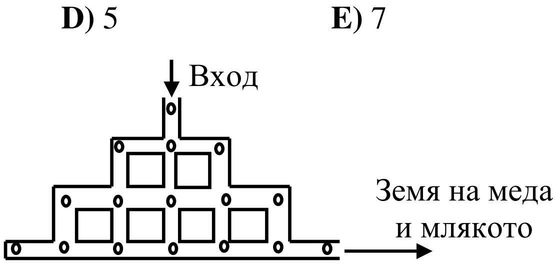


A) 8 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 16 **E)** 20

20. Пипи поканила 10 свои приятели на гости. Тя отворила бонбониера с 80 желирани бонбона. Пипи почерпила всяко от присъстващите момичета, включително Краси и Снежка, с един и същ брой бонбони. Колко момчета са били на гости на Пипи, ако е известно, че те не са искали бонбони и в бонбониерата са останали 3 бонбона?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

21. За да стигне до легендарната Земя на меда и млякото, Хамстерът Сивко трябвало да мине през система от тунели. В тунелите били разпръснати 16 тиквени семки, изобразени с нулички. Колко семки най-много може да събере Хамстерът Сивко, ако не е разрешено повторно преминаване през местата, където са разположени?

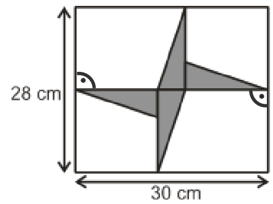


A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

22. Котката Маша има 7 котенца: бяло, черно, сиво, черно-бяло, сиво-бяло, сиво-черно и сиво-черно-бяло. По колко различни начина могат да се изберат 4 от котенцата така, че всеки две от тях да имат общ цвят?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

23. В правоъгълник с размери 30 *cm* и 28 *cm* са разположени четири еднакви правоъгълни триъгълника с катети, успоредни на страните на правоъгълника, както е показано на чертежа. Да се намери лицето на фигурата, образувана от тези триъгълници.

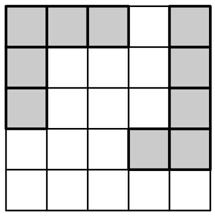


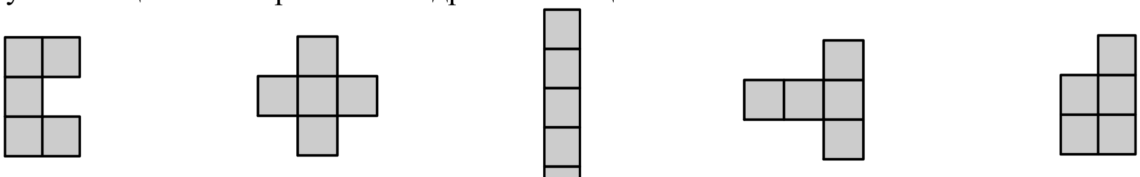
A) 46 cm^2 **B)** 52 cm^2 **C)** 54 cm^2 **D)** 56 cm^2 **E)** 64 cm^2

24. Алекс казал, че Иван е лъжец. Иван казал, че Боби е лъжец. Боби казал, че Иван е лъжец. Тони казал, че Алекс е лъжец. Колко от момчетата са лъжци?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

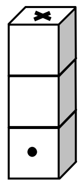
25. Квадратна дъска 5×5 е разделена на 25 единични квадратчета. Фигура, съставена от 5 единични квадратчета, се нарича *пентанимо*. Върху дъската са разположени две пентанима, както е показано. Разполагането е *правилно*, т.е. всяко от квадратчетата на двете пентанима покрива точно едно от квадратчетата на дъската. Кое от пентанимата по-долу (евентуално след завъртане) може да се разположи правилно върху непокритите 15 квадратчета на дъската така, че нито едно от останалите четири пентанима да не може да се разположи правилно върху оставащите непокрити 10 квадратчета на дъската?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

26. На чертежа са дадени три зарчета, залепени едно над друго. Сборът от точките на всеки две залепени стени е 5. На предната стена на долното зарче има една точка, а останалите стени на зарчетата са зацапани и точките не се виждат. Колко са точките на горната стена на най-горното зарче, означена с X, ако сборът от точките на всеки две срещуположни стени на всяко от зарчетата е 7?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

27. Колко пресечни точки най-много могат да имат 4 прави в равнината?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

28. Един месец има 5 съботи и 5 недели, но само 4 понеделника и 4 петъка. Следващият месец има:

A) 5 среди **B)** 5 четвъртъка **C)** 5 петъка **D)** 5 съботи **E)** 5 недели

29. За числата a, b, c и d е изпълнено $0 < a < b < c < d$. Увеличете едно от тези числа с 1 така, че произведението му с останалите три да е възможно най-малко. Кое число трябва да увеличите?

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** друг отговор

30. Намерете броя на всички петцифрени числа, кратни на 5, образувани с помощта само на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 без повторение със следните свойства: числото, образувано от първите две цифри на петцифреното число, се дели на 2; числото, образувано от първите три цифри на петцифреното число, се дели на 3; числото, образувано от първите четири цифри на петцифреното число, се дели на 4.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 10

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 5 и 6 клас

1. Отг. С). Тъй като 1 *ч* = 30 *мин* + 30 *мин*, то за 1 час мотористът ще измине два пъти повече километри, т.е. 56. Следователно скоростта на мотористa е 56 *км/ч*.

2. Отг. С).

3. Отг. А).

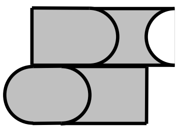
4. Отг. Е). Не може да се използват нечетните числа 3, 13, 23, 31, 33, 35, 37, 39 и 43.

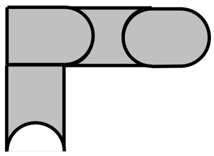
5. Отг. Е).

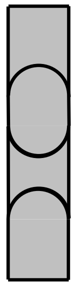
6. Отг. В). На първото разклонение водата се разделя на две части от по 500 литра. От второто разклонение вляво в съд Y ще се влеят 250 литра вода, а от второто разклонение вдясно в съд Y ще се влеят от две места по 250 литра вода, т. е. още 500 литра. В съд Y ще се влеят общо $250+500=750$ литра.

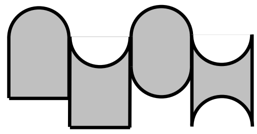
7. Отг. D). Датите с исканато свойство са: 01.03.05, 01.05.09, 01.07.13, 01.09.17, 01.11.21, 03.05.07, 03.07.11, 03.09.15, 03.11.19, 05.07.09, 05.09.13, 05.11.17, 07.09.11, 07.11.15, 09.11.13. Техният брой е 15.

8. Отг. В). Останалите фигури могат да се получат по показаните начини.

А) 

С) 

D) 

Е) 

9. Отг. В). 7 дни котката Лиза е пила по 60 *мл* мляко, т.е. тя е изпила общо $60.7=420$ *мл*, а 7 дни котката Лиза е пила по $60+\frac{1}{3}\cdot 60=80$ *мл*, т.е. тя е изпила общо $80.7=560$ *мл*. Тогава за двете седмици котката Лиза е изпила $420+560=980$ *мл* мляко.

10. Отг. D). В думата **KANGAROO** една от буквите **A** е съседна на **K**, а другата е съседна на **G**. От друга страна, в таблицата **D)** клетката с буквата **A** от долния ред няма обща точка нито с клетката с буквата **K**, нито с клетката с буквата **G**.

11. Отг. В). Числото, стоящо непосредствено преди 2011, е 1210, а следващото число е 2101. Разликата е $2101-1210=891$.

12. Отг. Е). Тъй като всяко събираемо е по-малко от сбора на трите, то сборът вдясно може да бъде само 96 или 167. Лесно се проверява, че със 167 не става, а от друга страна $17+30+49=96$.

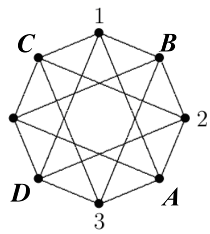
13. Отг. С). Нека страната на квадрата съдържа x единични кубчета. Тогава оградата ще съдържа $2x+2(x+2)=4x+4$ единични кубчета. От равенството $4x+4=36$ намираме $x=8$. Следователно за попълването на квадрата са необходими $8.8=64$ единични кубчета.

14. Отг. D). Триъгълниците на чертежа са три вида: 9 триъгълника със страна една клечка, 3 триъгълника със страна две клечки и 1 триъгълник (големият) със страна три клечки. Ясно е, че с една клечка могат да се "развалят" най-много 2 триъгълника от един и същ вид. Оттук следва (тъй като триъгълниците са три вида), че най-много биха могли да се "развалят" общо 5 триъгълника: 2 от първия вид, 2 от втория и 1 от третия. Но от чертежа се вижда, че коя да е обща клечка за 2 триъгълника от първия вид не е обща за никои 2 триъгълника от втория вид. Следователно максималният брой триъгълници, които биха могли да се "развалят", е 4. Реализацията на 4 е следната: ако се премахне средната клечка от коя да е страна на големия триъгълник, се "развалят" 1 триъгълник от първия вид, 2 триъгълника от втория вид и 1 триъгълник (големият) от третия вид, т.е. общо 4 триъгълника.

15. Отг. B). $372:31=12$ и следователно даденото число е 12. Тогава $12.301=3612$.

16. Отг. A).

17. Отг. D). На чертежа всяка от точките $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ и $\boldsymbol{D}$ е общ край на три отсечки, във вторите краища на които са записани числата 1, 2 и 3. Следователно единствената възможност е във всяка от тези точки да се запише числото 4. Ясно е, че в оставащата осма точка може да се запише кое да е от числата 1, 2 и 3, но не може да се запише 4. Получаваме, че общият брой на четворките е 4.

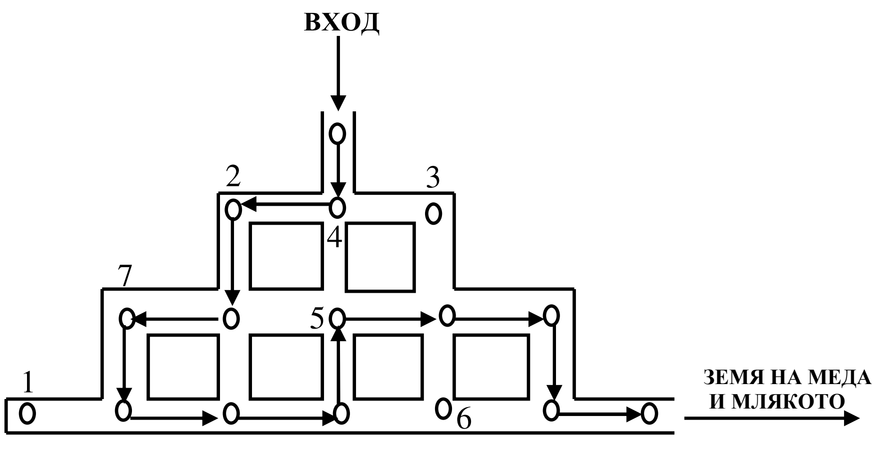


18. Отг. B). Ясно е, че единственият гол, получен от "Барселона" в собствената врата, е в загубената среща (няма как да загубиш един мач, ако не получиш гол). Тогава единствената възможност за резултата в загубената среща е $0:1$. В равния мач не са отбелязани голове, защото в противен случай броят на получените голове от "Барселона" в собствената врата би бил повече от 1. Следователно резултатът от равния мач е $0:0$. За резултата от спечелената среща остава единствената възможност да е $3:0$.

19. Отг. E). Нека x е търсеният брой парчета. Тъй като лицето на дадената част е 5 *кв. ед.*, то лицето на квадрата ще бъде $5x$ *кв. ед.* и числото $5x$ трябва да е точен квадрат (т.е. квадрат на цяло число). От посочените числа единствено при $x=20$ се получава точен квадрат $5.20=100=10^2$. Заключаваме, че само **E)** може да бъде верен отговор. За да се убедим, че наистина е верен отговор, трябва да се посочи реализация. С две парчета може да се направи правоъгълник с размери 5×2. Сега е достатъчно да вземем 10 такива правоъгълника и да ги подредим в 2 колонки от по 5.

20. Отг. C). $80-3=77$ бонбона е раздала Пипи. Но единственият делител на 77, по-голям от 1 и по-малък от 10, е 7. Следователно момичетата са били 7, а момчетата са били $10-7=3$.

21. Отг. B).



При показания маршрут остават 3 несъбрани семки от всичките 16. Несъбрани са крайната долна лява (№ 1), крайната горна дясна (№ 3), както и една междинна (№ 6) от най-долния ред (както е в примера) или една междинна (№ 5) от междинния ред, ако Хамстерът Сивко се беше изкачил към междинния ред от една семка по-нататък (от № 6). Съществуват и други маршрути със събиране на 13 семки, например без събиране на крайната горна лява (№ 2) и крайната горна дясна (№ 3). Ясно е, че семка № 1 изобщо не може да бъде събрана съгласно правилата от условието на задачата. Възможните маршрути могат да се разделят на две групи. В първата група влизат онези, при които семките с номера 2 и 3 не се събират, а във втората – онези, в които само една от семките с номера 2 и 3 се събира (ясно е, че не съществува маршрут, при който е възможно събирането едновременно на семките с номера 2 и 3). В първата група влиза един единствен маршрут: от № 4 към № 5, след това задължително наляво до № 7, слизане на долния ред, движение надясно до № 6, качване на междиния ред, движение надясно, после надолу и веднага надясно към изхода. При втората група съществуват две възможности за движение нататък от семката с № 4: наляво към № 2 или надясно към № 3. По-горе бяха описани маршрутите с преминаване през № 2. Маршрутът през № 3 е аналогичен. Във всичките случаи поне 3 от семките остават несъбрани.

22. Отг. C). Единият начин е да се изберат четирите шарени котенца (т.е. всички без едноцветните). Още три начина се получават, като всяко едно от трите едноцветни котенца се избере заедно с двете двуцветни, имащи същия цвят, и трицветното котенце (например: бяло, черно-бяло, сиво-бяло и сиво-черно-бяло). Всяка друга комбинация от 4 котенца ще съдържа поне 2 едноцветни и следователно няма да отговаря на условието на задачата. Следователно търсеният брой е 4.

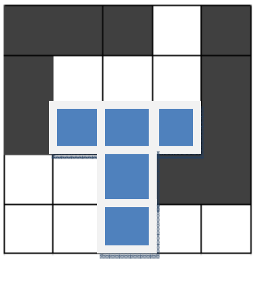
23. Отг. D). Четирите триъгълника могат да се именуват така: ляв, десен, горен и долен. Сборът от дължините на двата по-големи катета на горния и долния триъгълника е 28 *см*. Следователно дължината на единия катет (по-големия) е $a = 28:2 = 14\,см$. Ако b е дължината на другия катет в сантиметри, от чертежа се вижда, че $14 + 14 + b = 30\,см$, откъдето $b = 2\,см$. Тогава лицето на фигурата е $4 \cdot \dfrac{14.2}{2} = 56\,см^2$.

24. Отг. C). Тъй като Боби казал, че Иван е лъжец, а Иван казал, че Боби е лъжец, то един от двамата е лъжец, а другият казва истината.

Случай 1. Нека Боби е лъжец, а Иван казва истината. Тъй като Алекс казал, че Иван е лъжец, то тогава Алекс е лъжец и Тони казва истината. Получаваме, че две от момчетата са лъжци.

Случай 2. Нека Иван е лъжец, а Боби казва истината. Тъй като Алекс казал, че Иван е лъжец, то тогава Алекс казва истината, а Тони е лъжец. Отново точно две от момчетата са лъжци.

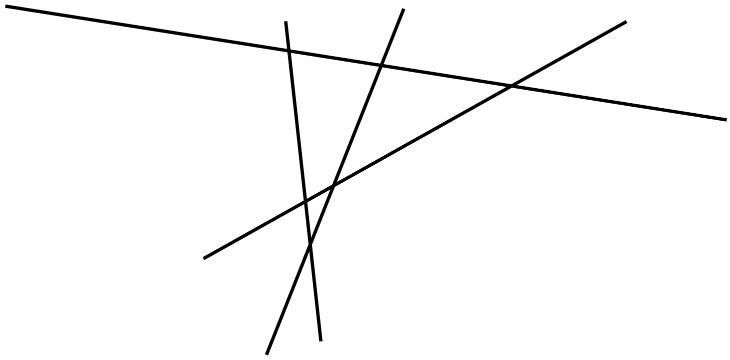
25. Отг. D).



26. Отг. E). Сборът от точките на горната стена на тялото, на долната стена на тялото и на залепените стени е $3.7 = 21$. Тъй като сборът от точките на четирите залепени стени е

$2.5 = 10$, то за сбора от точките на горната и долната стена на тялото остават $21 - 10 = 11$ точки. Но единствената възможност за получаване на 11 е $11 = 5 + 6$. Шестицата на долното зарче е срещу единицата и следователно не може да се намира на долната стена на тялото. Заключаваме, че шестицата е на горната стена на тялото, т.е. $X = 6$.

27. Отг. E). Две прави могат да имат само една пресечна точка. Следователно четири прави могат да имат най-много $\frac{4.3}{2} = 6$ пресечни точки. Ето реализация на 6 пресечни точки:



28. **Отг. A).** За да е изпълнено условието на задачата, месецът трябва да започва в събота и да завършва в неделя. Броят на дните на такъв месец е 4.7 + 2 (петата събота и неделя) = 30 дни. Тогава следващият месец ще започва в понеделник и ще е с 31 дни. Тъй като 4.7 = 28, то 28-ият ден ще бъде неделя, а последните три – понеделник, вторник и сряда. Следователно следващият месец ще има 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди.

29. Отг. D). Ако увеличим a с 1, то $(a+1)bcd = abcd + bcd$. Ако увеличим b с 1, то $a(b+1)cd = abcd + acd$. Ако увеличим c с 1, то $ab(c+1)d = abcd + abd$. Ако увеличим d с 1, то $abc(d+1) = abcd + abc$. В четирите случая към произведението $abcd$ се прибавят произведенията на дадените числа по тройки. От тези произведения по тройки най-малкото е abc. Следователно най-малко произведение ще се получи, когато увеличим числото d с единица.

30. Отг. A). Последната цифра трябва да е 5, за да бъде числото кратно на 5. От признака за делимост на 4 следва, че четирицифреното число, образувано от цифрите 1, 2, 3 и 4, трябва да завършва на 12, на 24 или на 32. Ако петцифреното число завършва на 25, първите три цифри имат сбор, който не е кратен на 3. Следавателно този случай е невъзможен. Ако петцифреното число завършва на 245, за втората позиця не остава четна цифра. Окончателно заключаваме, че не съществува петцифрено число с исканите свойства.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

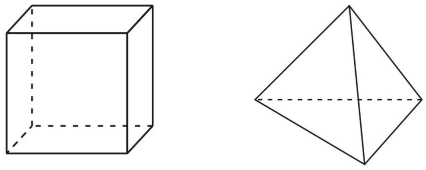
ТЕМА за 7 и 8 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Кой от изразите има най-голяма стойност?

A) 2011^1 **B)** 1^{2011} **C)** 1.2011 **D)** $1+2011$ **E)** $1:2011$

2. Роси си играе с кубчета и правилни триъгълни пирамиди. Ако кубчетата са 5, а пирамидите са 3, то общият брой на стените е:



A) 42 **B)** 48 **C)** 50 **D)** 52 **E)** 56

3. Пешеходна пътека тип зебра се състои от бели и черни ивици, които се редуват, като белите ивици са 8 на брой. Ако пътеката започва и завършва с бяла ивица, а широчината на всяка ивица е 50 *cm*, то дължината на пътеката е:

A) $7\,m$ **B)** $7{,}5\,m$ **C)** $8\,m$ **D)** $8{,}5\,m$ **E)** $9\,m$

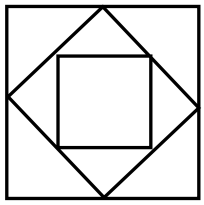
4. Калкулаторът ми е развален: дели вместо да умножава и изважда вместо да събира. Стойността на израза $(12.3)+(4.2)$ според моя калкулатор е:

A) 2 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 28 **E)** 38

5. Цифровият ми часовник току-що престана да показва $20:11$. След колко минути е следващото показание на часовника, което се записва със същите цифри 0, 1, 1 и 2 в някакъв ред?

A) 40 **B)** 49 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 60

6. На фигурата са показани три квадрата. Върховете на средния квадрат са среди на страните на големия квадрат, а върховете на малкия квадрат са среди на страните на средния квадрат. Ако лицето на малкия квадрат е $6\,cm^2$, разликата на лицата на другите два квадрата е:



A) $6\,cm^2$ **B)** $9\,cm^2$ **C)** $12\,cm^2$ **D)** $15\,cm^2$ **E)** $18\,cm^2$

7. Улицата, на която живея, има 17 къщи. Аз живея в последната къща от страната на четните номера и номерът на къщата ми е 12. Братовчед ми живее в последната къща от страната на нечетните номера. Номерът на неговата къща е:

A) 5 **B)** 7 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 21

8. Котаракът Филип уловил 12 риби за 3 дни. Всеки ден броят на уловените риби бил по-голям, отколкото през предния ден. През третия ден Котаракът Филип уловил по-малко риби, отколкото през предните два дни общо. Колко риби е уловил Котаракът Филип през третия ден?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

9. Измежду всички трицифрени числа, сумата от цифрите на които е 8, са избрани най-голямото и най-малкото. Намерете сумата на двете избрани числа.

A) 707 **B)** 907 **C)** 916 **D)** 1000 **E)** 1001

10. Във всяка от клетките на таблица с 3 реда и 3 стълба трябва да се запише по едно цяло число така, че сумата на числата във всеки квадрат от таблицата с размери 2×2 да е равна на 10. Четири от клетките на таблицата са попълнени. Кое от посочените числа може да е равно на сумата на липсващите пет числа?

	2	
1		3
	4	

A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** друг отговор

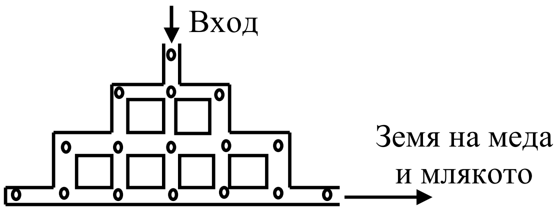
11. $\frac{2011 \,.\, 2{,}011}{201{,}1 \,.\, 20{,}11} = ?$

A) $0{,}01$ **B)** $0{,}1$ **C)** 1 **D)** 10 **E)** 100

12. Мария притежава 9 перли, които тежат: $1г$, $2г$, $3г$, $4г$, $5г$, $6г$, $7г$, $8г$ и $9г$. От тях тя направила 4 пръстена с по две перли всеки и съответни тегла: $17г$, $13г$, $7г$ и $5г$. Намерете теглото в грамове на неизползваната перла.

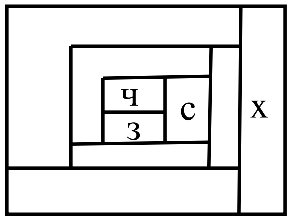
A) $1г$ **B)** $2г$ **C)** $3г$ **D)** $5г$ **E)** $6г$

13. За да стигне до легендарната Земя на меда и млякото, Хамстерът Сивко трябвало да мине през система от тунели. В тунелите били разпръснати 16 тиквени семки, изобразени с нулички. Колко семки най-много може да събере Хамстерът Сивко, ако не е разрешено повторно преминаване през местата, където са разположени семките?



A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

14. Клетките от фигурата са оцветени с един от четирите цвята: червен (ч), зелен (з), син (с) и жълт (ж). Всеки две клетки с допиращи се страни са с различен цвят. Маркирани са цветовете на три от клетките. Цветът на клетката, означена с “x”, е :

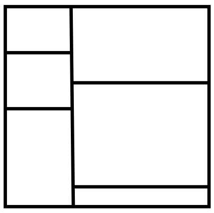


A) червен **B)** син **C)** зелен **D)** жълт **E)** не е възможно да се определи

15. Дадени са осем числа: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 и 16. Кои две от тях могат да се отстранят така, че средното аритметично на останалите шест числа да остане същото както средното аритметично на дадените осем?

A) 12 и 17 **B)** 5 и 17 **C)** 9 и 16 **D)** 10 и 12 **E)** 10 и 14

16. Квадратен лист хартия е разрязан на шест правоъгълни части, както е показано. Сборът от периметрите на тези шест части е 120 *cm*. Намерете лицето на квадратния лист хартия.



A) $48\,cm^2$ **B)** $64\,cm^2$ **C)** $110{,}25\,cm^2$ **D)** $144\,cm^2$ **E)** $225\,cm^2$

17. В три поредни срещи футболният отбор на “Барселона” отбелязал три гола и получил един гол. Една от срещите била спечелена, другата – загубена, а третата завършила наравно. Какъв е резултатът в спечелената от отбора на “Барселона” среща?

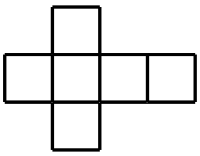
A) $2:0$ **B)** $3:0$ **C)** $1:0$ **D)** $2:1$ **E)** $0:1$

18. Лали начертала в тетрадката си отсечката $AB = 2\,cm$. Колко различни точки C е възможно да отбележи Лали в тетрадката си така, че ΔABC да е правоъгълен и да е с лице $1 cm^2$?

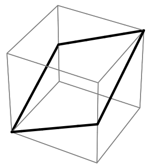
A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

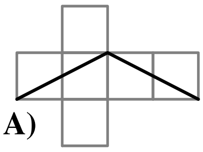
19. Положителното число a е по-малко от 1, а числото b е по-голямо от 1. Кое от следващите числа е с най-голяма стойност?

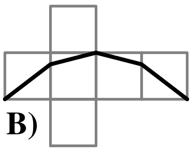
A) $a.b$ **B)** $a+b$ **C)** $a:b$ **D)** b **E)** не е възможно да се определи

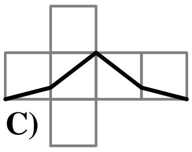


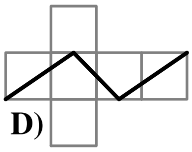
20. Фигурата вляво е развивка на куб, а фигурата вдясно е самият куб, повърхнината на който е разделена на две равни части с помощта на разрязване по черната линия. Коя от фигурите по-долу е развивката на куба след изчертаване на разделящата черна линия?

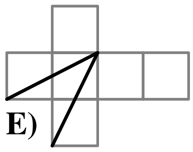



A)


B)


C)

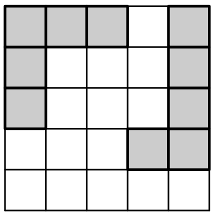

D)

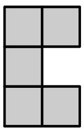

E)

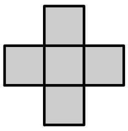
21. Петцифреното число $\overline{24X8Y}$ е кратно на 4, 5 и 9. Намерете сбора на цифрите X и Y.

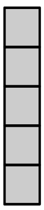
A) 13 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 4

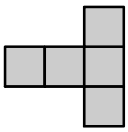
22. Квадратна дъска 5×5 е разделена на 25 единични квадратчета. Фигура, съставена от 5 единични квадратчета, се нарича *пентанимо*. Върху дъската са разположени две пентанима, както е показано. Разполагането е *правилно*, т.е. всяко от квадратчетата на двете пентанима покрива точно едно от квадратчетата на дъската. Кое от пентанимата по-долу (евентуално след завъртане) може да се разположи правилно върху непокритите 15 квадратчета на дъската така, че нито едно от останалите четири пентанима да не може да се разположи правилно върху оставащите непокрити 10 квадратчета на дъската?

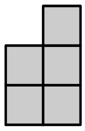



A)


B)


C)

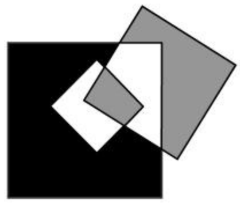

D)


E)

23. Всяко от трите врабчета Сивко, Черко и Белко се намирало в своето гнездо. Сивко казал: "Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Черко, отколкото от Белко." Черко казал: "Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Белко, отколкото от Сивко." Белко казал: "Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Черко, отколкото от Сивко." Като се знае, че две от трите врабчета казват истината, кое от тях е лъжецът?

A) Сивко **B)** Черко **C)** Белко **D)** никои от тях **E)** не може да се определи

24. Квадрат със страна $3\,cm$ е разположен в квадрат със страна $7\,cm$, а квадрат със страна $5cm$ пресича първите два квадрата. Намерете разликата между лицето на черната част и общото лице на сивите части от показаната фигура.



A) $0\,cm^2$ **B)** $10\,cm^2$ **C)** $11\,cm^2$ **D)** $15\,cm^2$ **E)** не е възможно да се определи

25. Митко стрелял няколко пъти по мишената, като улучвал само петицата, осмицата и десятката. При всяко попадение той получавал съответно 5, 8 и 10 точки. Митко успял да събере общо 99 точки, като само 25% от изстрелите му били погрешни. Колко изстрела общо е произвел Митко, ако броят на попаденията в осмицата и десятката бил един и същ?

A) 10 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

26. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е дадено, че $AB = AC$, $\angle BAD = 80°$, $\angle ABC = 75°$ и $\angle ADC = 65°$. Да се намери мярката на $\angle BDC$.

A) 10° **B)** 15° **C)** 20° **D)** 30° **E)** 45°

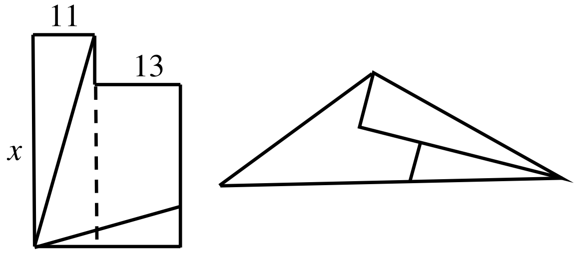
27. Годините на Еми и Стефан са числа, които се записват най-много с по две цифри. Преди 7 години Еми е била на години, които са кратни на 8, а след 8 години тя ще бъде на години, които са кратни на 7. Годините на Стефан преди 8 години са били кратни на 7, а след 7 години Стефан ще бъде на години, които са кратни на 8. Посочете вярното твърдение.

A) Стефан е с 2 години по-възрастен от Еми **B)** Стефан е с 1 година по-възрастен от Еми
C) Стефан и Еми са на една и съща възраст **D)** Стефан е с 1 година по-млад от Еми
E) Стефан е с 2 години по-млад от Еми

28. В израза $\dfrac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ различните букви отговарят на различни ненулеви цифри, а еднаквите букви отговарят на еднакви цифри. Известно е, че стойността на израза е цяло положително число. Коя е най-малката възможна стойност на израза при тези условия?

(A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

29. Дадени са два правоъгълника съответно с широчини 11 и 13, които са залепени по пунктираната линия. Получената фигура е разрязана на три части, както е показано, и с тези части е образуван триъгълник. Да се намери дължината x на левия правоъгълник.



A) 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

30. Намерете броя на наредените двойки естествени числа $(x; y)$, които удовлетворяват уравнението $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{3}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 7 и 8 клас

1. Отг. D). $1+2011>2011=1.2011=2011^1>1=1^{2011}>\dfrac{1}{2011}$.

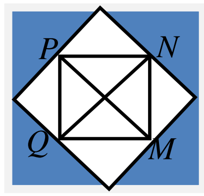
2. Отг. A). 5 кубчета$\times$6 стени = 30 стени и 3 пирамиди $\times$ 4 стени = 12 стени или общо $30+12=42$ стени.

3. Отг. B). Щом белите ивици са 8 и пътеката започва и завършва с бяла ивица, то черните ивици са 7. Следователно ивиците са общо $8+7=15$ и тъй като всяка от тях е с широчина 50 $cm=0,5\,m$, дължината на пътеката е $15.0,5=7,5\,m$.

4. Отг. A). $(12:3)-(4:2)=4-2=2$.

5. Отг. C). Първото възможно показание с цифрите 0, 1, 1 и 2 е $21:01$. От момента, в който часовникът престава да показва $20:11$, до появата на $21:01$ изминават точно 50 минути.

6. Отг. C). Да означим малкия квадрат с $MNPQ$. Страните и диагоналите на $MNPQ$ разделят средния квадрат на 8 равнобедрени правоъгълни триъгълника, които са еднакви. Оттук следва, че лицето на средния по големина квадрат е два пъти по-голямо от лицето на малкия квадрат, т. е. то е равно на $12\,cm^2$. Аналогично лицето на големия квадрат е два пъти по-голямо от лицето на средния, откъдето следва че лицето на големия квадрат е 24 cm^2. Следователно търсената разлика е $24-12=12\text{ cm}^2$.



7. Отг. E). Щом последната къща от страната на четните номера е № 12, то на улицата от страната на четните номера има общо $12:2=6$ къщи. Следователно броят на къщите с нечетни номера е $17-6=11$. Единадесетият поред нечетен номер е 21. Заключаваме, че последната къща от страната на нечетните номера е № 21.

8. Отг. A). Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 6 риби (половината от всичките) или повече от 6, то за първите два дни той щеше да е уловил 6 риби или по-малко от 6. Това противоречи на условието, че през третия ден той е уловил по-малко риби отколкото през първите два дни. Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 4 риби или по-малко от 4, то от една страна през всеки от първите два дни той щеше да е уловил по-малко от 4 риби или общо за двата дни – по-малко от 8. От друга страна, след като всички риби са 12, през първите два дни уловените риби щяха да са 8 или повече. Отново се получава противоречие. Остава единствената възможност през третия ден Котаракът Филип да е уловил 5 риби. Сега с аналогични разсъждения установяваме, че през първия ден Котаракът Филип е уловил 3 риби, а през втория ден – съответно 4 риби.

9. Отг. B). Най-голямото трицифрено число със сума на цифрите 8 е 800, а най-малкото трицифрено число със сума на цифрите е 8 е 107. Търсената сума е $800+107=907$.

10. Отг. E). Да означим числото в централната клетка на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите четири липсващи числа чрез x. Сумата на петте липсващи числа е равна на $20-3x$ и това число дава остатък 2 при деление на 3 за всяко x. Нито едно от посочените числа не дава такъв остатък.

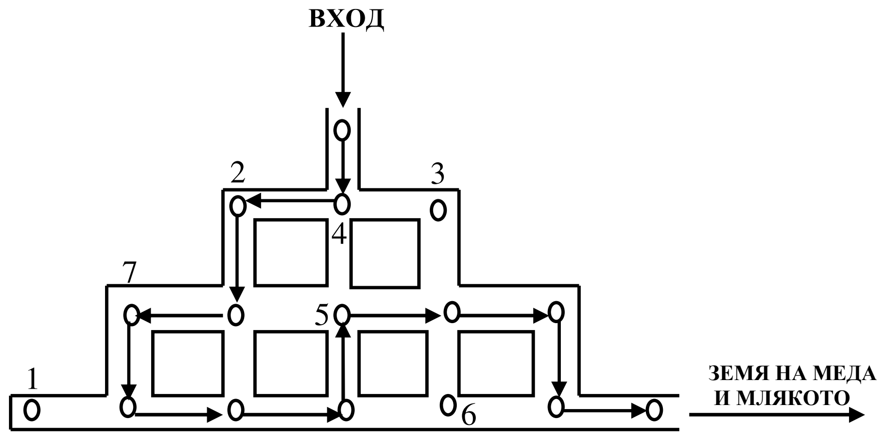
$7-x$	2	$5-x$
1	x	3
$5-x$	4	$3-x$

11. Отг. С). Умножаваме числителя и знаменателя с 1000:

$$\frac{2011.2,011}{201,1.20,11}=\frac{2011.2,011.1000}{201,1.10.20,11.100}=\frac{2011.2011}{2011.2011}=1\,.$$

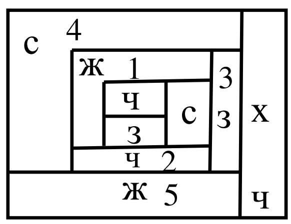
12. Отг. С). $1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=4.10+5=45$. От друга страна $(17+13)+(7+5)=42$ и следователно $45-42=3\,г$.

13. Отг. В).



При показания маршрут остават 3 несъбрани семки от всичките 16. Несъбрани са крайната долна лява (№ 1), крайната горна дясна (№ 3), както и една междинна (№ 6) от най-долния ред (както е в примера) или една междинна (№ 5) от междинния ред, ако Хамстерът Сивко се беше изкачил към междинния ред от една семка по-нататък (от № 6). Съществуват и други маршрути със събиране на 13 семки, например без събиране на крайната горна лява (№ 2) и крайната горна дясна (№ 3). Ясно е, че семка № 1 изобщо не може да бъде събрана съгласно правилата от условието на задачата. Възможните маршрути могат да се разделят на две групи. В първата група влизат онези, при които семките с номера 2 и 3 не се събират, а във втората – онези, в които само една от семките с номера 2 и 3 се събира (ясно е, че не съществува маршрут, при който е възможно събирането едновременно на семките с номера 2 и 3). В първата група влиза един единствен маршрут: от № 4 към № 5, след това задължително наляво до № 7, слизане на долния ред, движение надясно до № 6, качване на междиния ред, движение надясно, после надолу и веднага надясно към изхода. При втората група съществуват две възможности за движение нататък от семката с № 4: наляво към № 2 или надясно към № 3. По-горе бяха описани маршрутите с преминаване през № 2. Маршрутът през № 3 е аналогичен. Във всичките случаи поне 3 от семките остават несъбрани.

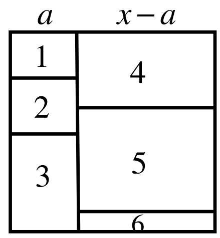
14. Отг. А). Най-напред трябва да се оцвети клетката с № 1. От условието на задачата следва, че нейният цвят е определен еднозначно – жълт. След това е клетката с № 2. Нейният цвят е също еднозначно определен – червен. Следва оцветяване на клетките с № 3 – зелен, с № 4 – син и с № 5 – жълт. За клетката “х” остава да бъде червена.



15. Отг. Е). Средното аритметично на дадените числа е:

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8}=\frac{96}{8}=12\,.$$

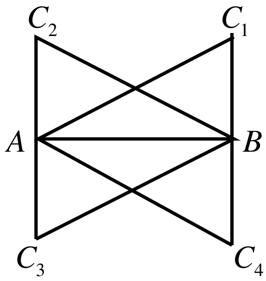
Сумата на дадените осем числа е равна на 8.12, т.е. на произведението на броя на числата и тяхното средно аритметично. Сумата на шест от тези осем числа трябва да е равна на произведението 6.12, след като искаме средното им аритметично да остане същото. Следователно сумата на двете числа, които трябва да се отстранят, е равна на $8.12-6.12=2.12=24$. От дадените числа само двойката 10 и 14 има сума 24.



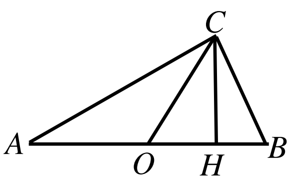
16. Отг. D). В сумата от периметрите на шестте части вертикалната страна на квадрата се повтаря 4 пъти, докато хоризонталната се повтаря 6 пъти. Следователно страната на квадрата се повтаря общо 10 пъти, откъдето заключаваме, че дължината й е $120:10=12\,cm$. Тогава лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

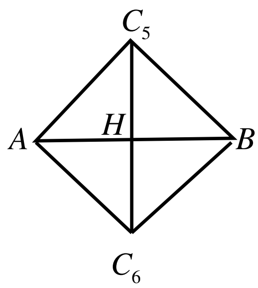
Задачата може да се реши и аналитично. Нека дължината на страната на квадрата е $x\,cm$. Означаваме шестте части с числата от 1 до 6, както е показано. Ако a е дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 1, 2 и 3, то дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 4, 5 и 6 е $x-a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 1, 2 и 3 е равна на $2x+3.2a=2x+6a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 4, 5 и 6 е равна на $2x+3.2(x-a)=2x+6x-6a=8x-6a$. Оттук $120=2x+6a+8x-6a=10x$ и следователно $x=120:10=12\,cm$. Лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

17. Отг. B). Ясно е, че единственият гол, получен от "Барселона" в собствената врата, е в загубената среща (няма как да загубиш един мач, ако не получиш гол). Тогава единствената възможност за резултата в загубената среща е $0:1$. В равния мач не са отбелязани голове, защото в противен случай броят на получените голове от "Барселона" в собствената врата би бил повече от 1. Следователно резултатът от равния мач е $0:0$. За резултата от спечелената среща остава единствената възможност да е $3:0$.



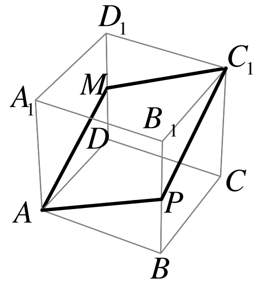
18. Отг. C). Съществуват две възможности за отсечката AB – да е катет или хипотенуза. Ако е катет, то другият катет трябва да е с дължина $1cm$, за да бъде лицето на триъгълника равно на $1cm^2$. Възможните разположения на точката C са четири. На чертежа те са означени с C_1, C_2, C_3 и C_4. Имаме $BC_1=AC_2=AC_3=BC_4=1\,cm$ и $S_{ABC_1}=S_{BAC_2}=S_{BAC_3}=S_{ABC_4}=1\,cm^2$. Ще разгледаме случая, когато AB е хипотенуза. Нека точката C е такава, че ΔABC е неравнобедрен правоъгълен ($\angle ACB=90^0$) и CH ($H\in AB$) е височината към хипотенузата. Ако O е средата на AB, то CO е медиана и следователно $CO=\dfrac{1}{2}AB=1cm$. Тъй като ΔABC е неравнобедрен, то $H\neq O$ и от правоъгълния ΔOHC следва, че $CH<CO=1cm$. Заключаваме, че $S_{ABC}<1\ \ cm^2$. Следователно единствената възможност да бъде изпълнено условието на задачата е ΔABC да е равнобедрен правоъгълен. Сега е ясно, че възможните разположения на точката C са две: C_5 и C_6 (вж. чертежа), като $C_5H=C_6H=1\,cm$. Окончателно, отговорът на задачата е 6.



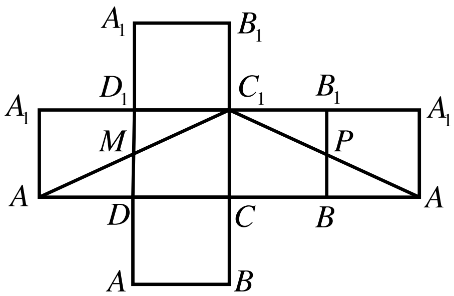


19. Отг. B). Най-голям е сборът $a+b$, защото $a+b>b>a.b>a:b$.

20. Отг. A). Да означим куба с $ABCDA_1B_1C_1D_1$, а с M и P точките, които заедно с A и C_1 задават върховете на четириъгълника, разделящ повърхнината на куба на две равни части. Като се отчете, че точката M е обща за съседните стени DCC_1D_1 и ADD_1A_1, а точката P е обща за съседните стени ABB_1A_1 и BCC_1B_1, след разрязване на куба

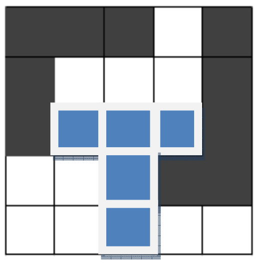


по страните AA_1, AB, A_1B_1, AD, A_1D_1 и B_1C_1 се получава развивката от отговор **A).**

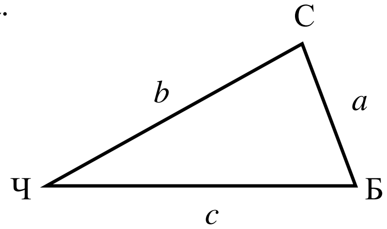


21. Отг. E). Числото трябва да завършва на 0 или 5, за да се дели на 5. Следователно числото завършва на 80 или на 85. От признака за делимост на 4 следва, че числото завършва на 80 (80 се дели на 4, докато 85 не се дели на 4). Следователно $Y=0$. Според признака за делимост на 9 трябва сборът от цифрите на даденото число да се дели на 9. Тъй като $X+Y+2+4+8=X+14$, то числото $X+14$ трябва да се дели на 9. Първото възможно число след 14, което се дели на 9, е 18, откъдето $X=4$. Следващите числа, които се делят на 9, са 27, 36 и т. н., които не дават решения, защото при тях $X \geq 13$, а X е цифра и $X \leq 9$. Така получаваме, че $X+Y=4$.

22. Отг. D).



23. Отг. B). Можем да считаме, че в общия случай гнездата на трите врабчета са върхове на триъгълник. Да означим този триъгълник с ЧБС (Ч е гнездото на Черко, Б е гнездото на Белко, а С е гнездото на Сивко). В частност триъгълникът може да е изроден, т.е. трите гнезда да лежат на една права.



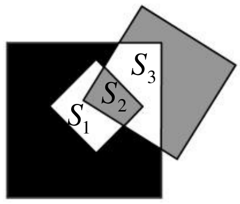
Да означим дължините на страните на триъгълника с a, b и c, както е показано. Тези дължини отговарят на съответните разстояния между гнездата. От твърдението на Сивко следва неравенството $b>2a$, от твърдението на Черко следва неравенството $c>2b$, а от твърдението на Белко – съответно неравенството $c>2a$.

<u>*Случай* 1</u>. Сивко и Черко казват истината, а Белко лъже. Тогава $a<0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c\le a+b<1,5b$. Освен това $c>2b$ и следователно $2b<c<1,5b$ ($b>0$), което е невъзможно.

<u>*Случай* 2</u>. Черко и Белко казват истината, а Сивко лъже. Тогава $b<0,5c$ и $a<0,5c$. С помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c\le a+b<0,5c+0,5c=c$, т.е. $c<c$, което също е невъзможно.

<u>*Случай* 3</u>. Сивко и Белко казват истината, а Черко лъже. Тогава $a<0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c\le a+b<1,5b$, т.е. $c<1,5b$, което не е в противоречие с отрицанието на твърдението на Черко, т.е. с $c\le 2b$. Заключаваме, че единствено възможен е случай 3.

24. Отг. D). Да означим лицата на двете бели части с S_1 и S_3, а лицето на по-малката сива част – с S_2. Лицето $S_ч$ на черната част е разлика от лицето на квадрата със страна 7 и сбора на лицата S_1, S_2 и S_3. Но $S_1=9-S_2$ и тогава:



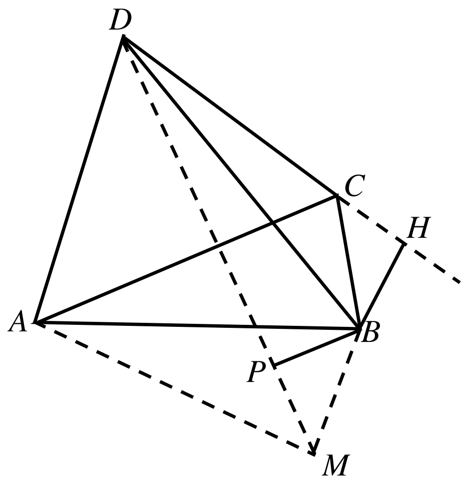
$$S_ч=49-(S_1+S_2+S_3)=49-(9-S_2+S_2+S_3)=40-S_3.$$

За лицето S_C на сивата част имаме $S_C=S_2+(25-S_2-S_3)=25-S_3$. Следователно:

$$S_ч-S_C=(40-S_3)-(25-S_3)=15\ cm^2.$$

25. Отг. D). Нека x е броят на произведените от Митко изстрели и a е броят на попаденията му в осмицата. От условието следва, че броят на попаденията в десятката е също a. Успешните изстрели са 75% от x, т.е. те са $\frac{3}{4}x$. В частност заключаваме, че числото x се дели на 4. Броят на точките от попаденията в осмицата е $8a$, а броят на точките от попаденията в десятката е $10a$. Тъй като попаденията в петицата са $\frac{3}{4}x-2a$, то броят на точките, получени от тези попадения, е $5\left(\frac{3}{4}x-2a\right)$. Следователно $5\left(\frac{3}{4}x-2a\right)+18a=99$, откъдето $5\left(\frac{3}{4}x-2a\right)=9(11-2a)$. Заключаваме, че числото $11-2a$ трябва да се дели на 5. От друга страна $11-2a>0$, което е изпълнено само ако $a=1$, $a=2$, $a=3$, $a=4$ или $a=5$. Единствено при $a=3$ числото $11-2a$ се дели на 5. Така получаваме $x=20$.

26. Отг. B). <u>*Първи начин*</u>. В равнобедрения ΔABC ($AB=AC$) по условие имаме $\angle ABC=75°$, откъдето следва, че и $\angle ACB=75°$, а $\angle BAC=30°$. Тогава $\angle CAD=\angle BAD-\angle BAC=80°-30°=50°$. От ΔACD имаме $\angle ACD=180°-(65°+50°)=65°$, откъдето $AC=AD$. Заключаваме, че $\angle ADB=50°$ и следоваетлно $\angle BDC=65°-50°=15°$.



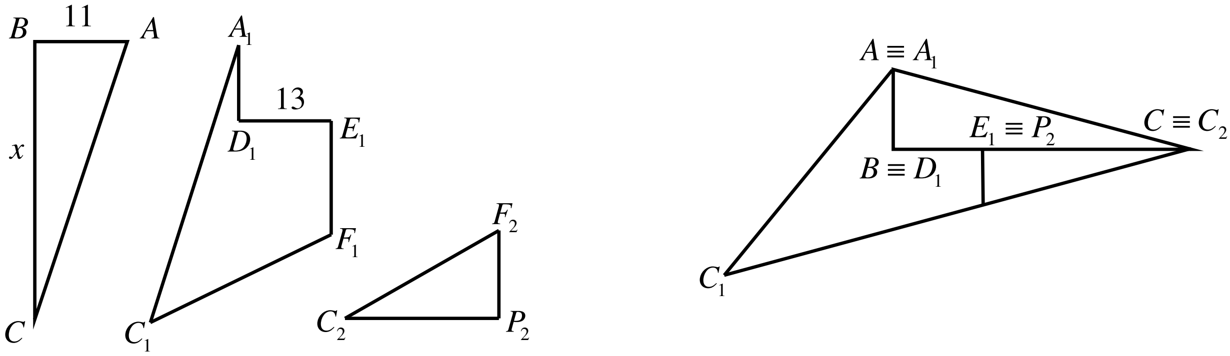
<u>*Втори начин*</u> (за осмокласници). От равенствата $AB=AC=AD$ следва, че точките B, C и D лежат на окръжност с център A и радиус AB. Тъй като $\angle BAC=30°$ е централен ъгъл, то

$\overset{\frown}{BC} = 30^\circ$ и за вписания $\angle BDC$ намираме $\angle BDC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}.30^\circ = 15^\circ$.

27. Отг. А). От условието следва, че догодина годините на Еми ще се делят на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Еми е на 55 години. Аалогично, миналата година годините на Стефан са се деляли на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Стефан е на 57 години. Окончателно заключаваме, че Стефан е с 2 години по-възрастен от Еми.

28. Отг. В). След съкращения получаваме $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} = \frac{K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{M \cdot E}$. Тъй като $K \cdot N \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O \geq 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 1 = 120$ и $M \cdot E \leq 9 \cdot 8 = 72$, то $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E} \geq 2$. От друга страна, при $K = 2,\ N = 3,\ A = 4,\ R = 6,\ O = 1,\ M = 8,\ E = 9$ (и например $G = 7$) стойността на израза $\frac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ е точно 2.

29. Отг. В). Трите части след разрязването са означени съответно с ABC, $A_1C_1F_1E_1D_1$ и $C_2P_2F_2$, като е показан начинът на тяхното свързване в триъгълник. От чертежа се вижда, че $A(A_1)B(D_1) = 11$, $B(D_1)E_1(P_2) = 13$, $E_1(P_2)C(C_2) = 11 + 13 = 24$ и следователно $x = B(D_1)C(C_2) = 13 + 24 = 37$.



30. Отг. D). Нека $(x; y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x \leq y$, то $\frac{1}{y} \leq \frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3} \leq \frac{2}{x}$, откъдето $x \leq 6$. От друга страна $\frac{1}{y} > 0$ и получаваме, че $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, т.е. $x > 3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

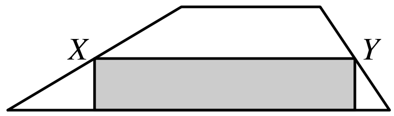
ТЕМА за 9 и 10 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Пешеходна пътека тип зебра се състои от бели и черни ивици, които се редуват, като белите ивици са 8 на брой. Ако пътеката започва и завършва с бяла ивица, а широчината на всяка ивица е 50 *cm*, то дължината на пътеката е:

A) $7\,m$ **B)** $7{,}5\,m$ **C)** $8\,m$ **D)** $8{,}5\,m$ **E)** $9\,m$

2. Точките X и Y са среди на бедрата на трапеца от чертежа. Затъмненият четириъгълник е правоъгълник с лице 13 cm^2. Да се намери лицето на трапеца в кв. сантиметри.

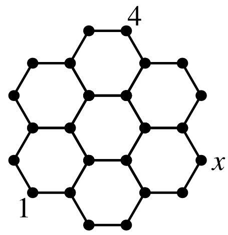


A) 24 **B)** 25 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 28

3. Ако $P = 2.3 + 3.4 + 4.5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ и $R = 1.2 + 2.3 + 3.4$, кое от посочените твърдения е вярното?

A) $Q < P < R$ **B)** $P < Q = R$ **C)** $P < Q < R$ **D)** $R < Q < P$ **E)** $Q = P < R$

4. Върху всяка от точките на фигурата трябва да се запише по едно число така, че сумата от числата в краищата на всяка отсечка да е една и съща. Две от числата са вече написани. На колко е равно числото x?



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** не може да се определи

5. Мартин си спомня, че е разделил числото 2011 с някакво естсетвено число и е получил остатък 1011. За съжаление той не може да си спомни делителя. Със сигурност:

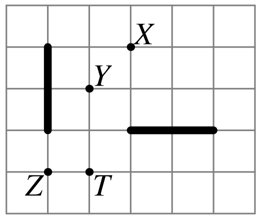
A) делителят е четен **B)** делителят е нечетен **C)** делителят е кратен на 5 **D)** делителят е съставно число **E)** Мартин е допуснал грешка при делението

6. Правоъгълна апликация с лице 360 cm^2 е покрита с цели квадратни плочки с едни и същи размери. Дължината на апликацията е 24 *cm*, а широчината й е 5 плочки. Намерете лицето на една плочка.

A) $1\,cm^2$ **B)** $4\,cm^2$ **C)** $9\,cm^2$ **D)** $16\,cm^2$ **E)** $25\,cm^2$

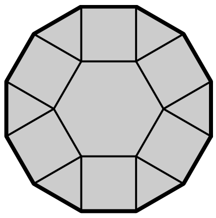
7. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в нарастващ ред. На кое място се намира числото 2011?

A) на 14-то **B)** на 13-то **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 12-то



8. Всяка от двете отсечки на чертежа е получена от другата чрез ротация. Коя от точките X , Y , Z и T е център на такава ротация?

A) само X **B)** само X и Z **C)** само X и T **D)** само T **E)** X , Y , Z и T



9. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?

A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

10. Три еднакви зарчета са поставени едно върху друго така, че сумата на точките върху допиращите се стени е винаги равна на 5. Колко точки има върху горната стена на най-горното зарче, ако върху лявата стена на най-долното зарче има 1 точка? (Зарчетата са истински, т.е. сумата от точките на срещуположните стени е 7.)

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

11. В един месец има 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди, а в предния месец има само 4 недели. Кое от посочените твърдения за следващия месец е вярното?

A) в месеца има точно 4 петъка **B)** в месеца има точно 4 съботи
C) в месеца има 5 недели **D)** в месеца има 5 среди **E)** такава ситуация е невъзможна

12. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?

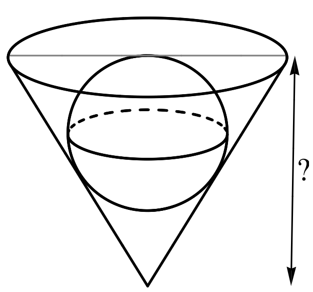
A) Михаел, Фернандо, Себастиан **B)** Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо **D)** Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

13. Ако $9^n+9^n+9^n=3^{2011}$, намерете стойността на n.

A) 1005 **B)** 1006 **C)** 2010 **D)** 2011 **E)** друг отговор

14. Дадени са два съда с формата на куб, първият със страна $a\,cm$, а вторият със страна $(a+10)\,cm$. По-големият съд е пълен с вода, а по-малкият е празен. По-малкият съд се напълва с вода от по-големия, при което в по-големия съд остават 271 литра вода. Колко литра са прелети в по-малкия съд?

A) 243 **B)** 512 **C)** 125 **D)** 1331 **E)** 729

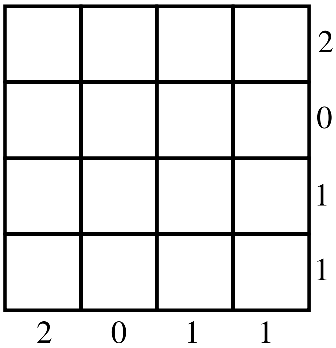


15. Мраморно топче с радиус 15 е поставено в конусовиден съд, като се допира до основата му и до околната му повърхнина. Да се намери дълбочината на съда, ако равнината, прекарана през върха му и диаметър на основата му, отсича от него равностранен триъгълник.

A) $30\sqrt{2}$ **B)** $25\sqrt{3}$ **C)** 45 **D)** 60 **E)** $60(\sqrt{3}-1)$

16. Всички клетки на таблица 4×4 трябва да се оцветят в черно или червено. Броят на черните клетки във всеки ред и всеки стълб е означен с числата съответно вдясно на редовете и с числата съответно под стълбовете. Намерете броя на всички такива оцветявания.

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 9



17. Намерете възможно най-големия брой последователни трицифрени числа, в записа на които участва поне една нечетна цифра.

A) 10 **B)** 100 **C)** 110 **D)** 111 **E)** 221

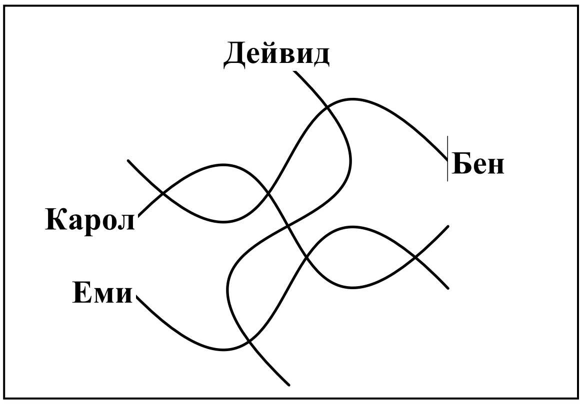
18. Във всяка от клетките на таблица с 3 реда и 3 стълба трябва да се запише по едно цяло число така, че сумата на числата във всеки квадрат от таблицата с размери 2×2 да е равна на 10. Пет от клетките на таблицата са попълнени. Кое от посочените числа може да е равно на сумата на липсващите четири числа?

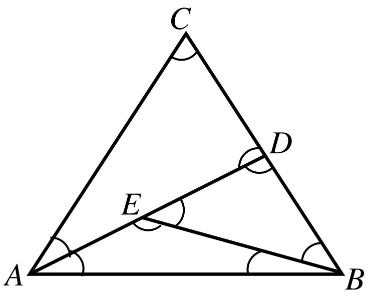
1		0
	2	
4		3

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** не може да се определи

19. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича "Кривата улица". Кой живее на "Кривата улица"?

A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид **E)** не може да се определи от скицата



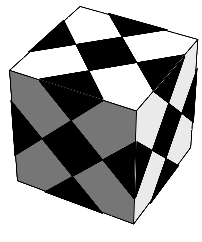


20. Върху страната BC на ΔABC е взета вътрешна точка D, а върху отсечката AD – вътрешна точка E. Намерете възможно най-малкия брой различни стойности, които могат да приемат отбелязаните 9 ъгъла ABE, BAE, AEB, BED, EBD, EDB, ADC, CAD и ACD.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

21. Даден е куб със страна 1 *dm*. От черна хартия са изрязани квадрати, с които са облепени стените на куба по показания начин и всички стени изглеждат по един и същ начин. Намерете лицето на черната част от повърхнината на куба.

A) $37{,}5\,cm^2$ **B)** $150\,cm^2$ **C)** $225\,cm^2$ **D)** $300\,cm^2$ **E)** $375\,cm^2$

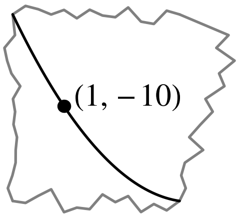


22. Едно петцифрено число е *хладно*, ако се записва с различни цифри и първата му цифра е равна на сумата от останалите четири. Намерете броя на хладните числа.

A) 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

23. Числата x и y са по-големи от 1. Коя от дробите е с най-голяма стойност?

A) $\frac{x}{y+1}$ **B)** $\frac{x}{y-1}$ **C)** $\frac{2x}{2y+1}$ **D)** $\frac{2x}{2y-1}$ **E)** $\frac{3x}{3y+1}$



24. В стандартна правоъгълна координатна система xOy е отбелязана точката $(1;-10)$ върху графиката на функцията $y=ax^2+bx+c$. След това координатните оси и почти цялата графика на функцията са изтрити, като остава изображението от чертежа. Кое от посочените твърдения може да бъде НЕВЯРНО?

A) $a>0$ **B)** $b<0$ **C)** $a+b+c<0$ **D)** $b^2>4ac$ **E)** $c<0$

25. Даден е ΔABC с медиана $CM=3$ ($M\in AB$). Външно за триъгълника са построени квадрати $CBDP$ и $ACQR$. Да се намери дължината на отсечката PQ.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

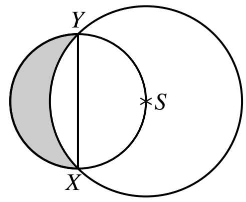
26. Намерете броя на наредените двойки естествени числа $(x;y)$, които удовлетворяват уравнението $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

27. За всяко естествено число $n\geq 2$ с $\langle n\rangle$ означаваме най-голямото просто число, което не надминава n. Намерете броя на целите положителни числа, които са решения на уравнението $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

28. Две окръжности са разположени, както е показано. По-голямата е с център S и радиус r, а отсечката XY е диаметър на по-малката. Намерете лицето на затъмнената част.



A) $\frac{1}{6}\pi r^2$ **B)** $\frac{\sqrt{3}}{12}\pi r^2$ **C)** $\frac{1}{2}r^2$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{4}r^2$ **E)** друг отговор

29. Нека a, b и c са такива цели положителни числа, че $a^2=2b^3=3c^5$. Какъв най-малък брой положителни делители може да има числото abc (включително 1 и abc)?

A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

30. За кои естествени числа n в интервала $0<n<9$ е възможно да се отбележат няколко клетки в таблица 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 да съдържа точно n от отбелязаните клетки?

A) 1 **B)** 1 и 2 **C)** 1, 2 и 3 **D)** 1, 2, 7 и 8 **E)** всички

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 9 и 10 клас

1. Отг. B). Щом белите ивици са 8 броя и с тях започва и завършва пътеката, то черните са 7. Общо ивиците са 15 и следователно цялата пътека е с дължина $15.0,5 = 7,5\,m$.

2. Отг. C). Страната XY на правоъгълника е средна отсечка на трапеца. Тъй като другата страна на правоъгълника е половината от височината на трапеца, то лицето на трапеца е два пъти по-голямо от лицето на правоъгълника, т.е. то е равно на 26 cm^2.

3. Отг. D). Тъй като $P = 38$, $Q = 29$ и $R = 20$, вярното твърдение е **D)**.

4. Отг. A). Ако две отсечки имат общ връх, то в другите им два края трябва да бъде записано едно и също число. Оттук следва, че във всяка точка трябва да бъде записано 1 или 4. При това е изпълнено условието за съгласуваност, т.е. какъвто и път от отсечки да се избере, започващ от 1 и завършващ в 4, броят на точките между 1 и 4 е четен. Сега лесно се получава, че $x = 1$.

5. Отг. E). Ако a (делимо) и $b \neq 0$ (делител) са цели числа, то съществуват единствени цели числа q (частно) и r (остатък) така, че $a = bq + r$. При това $0 \leq r < |b|$. От равенството $a = bq + r$ следва, че $bq = a - r = 2011 - 1011 = 1000$, т.е. $bq = 1000$. Тъй като b и q са цели числа, то с помощта на полученото равенство заключаваме, че $|b| \leq 1000$. От $0 \leq r < |b| \leq 1000$ следва, че $1011 < 1000$, което е невъзможно. Следователно не съществува делител така, че да се получи остатък 1011. Така, единственият верен отговор е **E)**.

6. Отг. C). Ако дължината на страната на една плочка е $x\,cm$, то $24.5x = 360$, откъдето $x = 3$ и следователно лицето на една плочка е 9 cm^2.

7. Отг. E). Записът изглежда така: 1003, 1012, 1021, 1030, 1102, 1111, 1120, 1201, 1210, 1300, 2002, 2011, …

8. Отг. C). Ротация, която преобразува една от отсечките в другата, притежава следното свойство: разстоянията от центъра на ротацията до двата края на една от отсечките са равни на разстоянията от центъра до двата края на другата отсечка. Това свойство е изпълнено само за точките X и T.

9. Отг. C). От условието следва, че всеки от триъгълниците е равнобедрен с ъгъл между бедрата, равен на 60^0. Следователно шестте триъгълника са равностранни със страна 1. Така за обиколката на фигурата получаваме 12.

10. Отг. E). Да разгледаме тялото, образувано от трите зарчета. Сборът от точките на горната стена на тялото, на долната стена на тялото и на залепените стени е $3.7 = 21$. Тъй като сборът от точките на четирите допиращи се стени е $2.5 = 10$, то за сбора от точките на горната и долната стена на тялото остават $21 - 10 = 11$ точки. Но единствената възможност за получаване на 11 е $11 = 5 + 6$. Шестицата на долното зарче е срещу единицата и следователно не може да се намира на долната стена на тялото. Заключаваме, че шестицата е на горната стена на тялото.

11. Отг. B). 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди са възможни само за месец с 31 дни. При това 5-те понеделника са на дати 1, 8, 15, 22 и 29; 5-те вторника са на дати 2, 9, 16, 23 и 30; а 5-те среди са на дати 3, 10, 17, 24 и 31. Ако предният месец има 31 дни, то неделите в него са на дати (отзад напред) 31, 24, 17, 10 и 3, т.е. броят на неделите е 5 и това противоречи на условието на задачата. Заключаваме, че предният месец не може да има 31 дни. Ако предният месец има 30 дни, то неделите в него са на дати 30, 23, 16, 9 и 2, т.е. броят на неделите е отново 5. Остава единствената възможност предният месец да е февруари и годината да не е високосна. В този случай броят на неделите е точно 4. Следователно месецът с 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди е със сигурност март. Следващият месец е април и петъците в него са на дати 2, 9, 16, 23 и 30, т.е. те са 5 на брой и **A)** не е вярно.

Неделите са на дати 4, 11, 18 и 25, т.е. те са 4 на брой и **C)** не е вярно. Средите в разглеждания месец април са на дати 7, 14, 21 и 28, т.е. средите са 4 на брой и **D)** не е вярно. Съботите са на дати 3, 10, 17 и 24, т.е. **B)** е вярно. Ситуацията е възможна и следователно твърдение **E)** не е вярно.

12. Отг. B). Ако двама спортисти разменят местата си четен брой пъти, те ще завършат в реда, в който са били в началото, а ако разменят местата си нечетен брой пъти, ще завършат обратно на реда, в който са били в началото. Оттук следва, че Михаел е завършил след Фернандо и след Себастиан, а Фернандо е завършил преди Себастиан.

13. Отг. A). Имаме $9^n+9^n+9^n=3.9^n=3.\left(3^2\right)^n=3.3^{2n}=3^{2n+1}=3^{2011}$, откъдето $2n+1=2011$ и следователно $n=\dfrac{2011-1}{2}=1005$.

14. Отг. E). Тъй като $a\,cm=0{,}1a\,dm$, от условието имаме $(0{,}1a+1)^3-(0{,}1a)^3=271$, откъдето $0{,}03a^2+0{,}3a+1=271$ и $a^2+10a-9000=0$. Единственият положителен корен на полученото квадратно уравнение е $a=90\,cm=9\,dm$. Следователно прелятото количество вода е $9^3\,dm^3$, т.е. $729\,dm^3$ = 729 литра.

15. Отг. C). От условието следва, че 15 е радиусът на вписаната окръжност в отсечения триъгълник. Тогава височината на този триъгълник, е $15.3=45$.

16. Отг. D).

		X	X	2
				0
X				1
X				1
2	0	1	1	

X			X	2
				0
		X		1
X				1
2	0	1	1	

X		X		2
				0
			X	1
X				1
2	0	1	1	

X		X		2
				0
X				1
			X	1
2	0	1	1	

X			X	2
				0
X				1
		X		1
2	0	1	1	

Съществуват 3 начина за оцветяване на първия стълб. Първият е, когато черните клетки са последните две в стълба (първия чертеж). Вторият е, когато черните клетки са първата и четвъртата в стълба (втори и трети чертеж). Третият е, когато черните клетки са първата и третата в стълба (четвърти и пети чертеж). При първия начин оцветяването на останалите 2 черни клетки е определено еднозначно – единствената възможност е третата и четвъртата клетка на първия ред да са черни (първия чертеж). При втория начин съществуват две възможности за оцветяване на първия ред. При първата възможност втората черна клетка на първия ред е третата поред (втори и четвърти чертеж), а при втората възможност втората

черна клетка на първия ред е четвъртата поред (трети и пети чертеж). Сега оцветяването на четвъртата черна клетка е определено еднозначно. По този начин получаваме точно 5 различни оцветявания, както е показано.

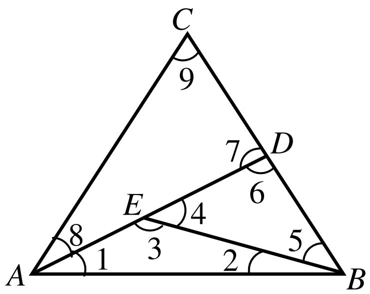
17. Отг. D). Ясно е, че ако цифрата на стотиците е четна, максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е 11. Ако цифрата на стотиците е нечетна, броят на последователните трицифрени числа с тази цифра на стотиците е 100 и те са с исканото свойство (например числата от 500 до 599). Следващото поред естествено число обаче е само с четни цифри. От направените разглеждания следва, че максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е не повече от $100+11=111$. Максималният брой 111 може да се реализира например при цифра на стотиците, равна на 3. Последователните числа са: 289, 290, …, 299, 300, 301, …, 398, 399. Вместо 3 може да се вземе коя да е от цифрите 5, 7 или 9, при което пак се получават 111 последователни естествени числа с поне една нечетна цифра.

18. Отг. D). Да означим липсващото число в първия стълб на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите три липсващи числа чрез x. Сумата на четирите липсващи числа е равна на $x+(7-x)+(x+1)+(4-x)=12$.

1	$7-x$	0
x	2	$x+1$
4	$4-x$	3

19. Отг. C). Две прави улици не могат да се пресичат повече от веднъж. Да допуснем, че улицата, на която живее Карол, е права. Улиците, на които живеят Еми и Бен, не могат да са прави, защото всяка от тях пресича два пъти улицата, на която живее Карол. Но тогава правите улици са най-много две – тази, на която живее Карол, и тази, на която живее Дейвид. Получаваме противоречие и заключаваме, че улицата, на която живее Карол, не е права. Улиците, на които живеят Дейвид, Еми и Бен, са прави, защото кои да е две от тях имат най-много по едно пресичане. Следователно Карол живее на "Кривата улица".

20. Отг. B). Да означим разглежданите ъгли последователно с числата от 1 до 9, както е показано на чертежа. Тъй като $\angle 3$ е външен за ΔEBD, то $\angle 3 > \angle 6$. От друга страна $\angle 6$ е външен за ΔADC и заключаваме, че $\angle 6 > \angle 9$. Следователно $\angle 3 > \angle 6 > \angle 9$. Това показва, че разглежданите 9 ъгъла трябва да приемат поне 3 различни помежду си стойности. Следният пример показва, че различните стойности могат да бъдат точно 3. Нека $\angle 1 = \angle 2 = \angle 5 = \angle 8 = 36^0$. Тогава:



$\angle 3 = 180^0 - (\angle 1 + \angle 2) = 180^0 - 72^0 = 108^0$; $\angle 4 = 180^0 - \angle 3 = 72^0$; $\angle 6 = 180^0 - (\angle 4 + \angle 5) = 72^0$; $\angle 7 = 180^0 - \angle 6 = 108^0$; $\angle 9 = \angle 6 - \angle 8 = 72^0 - 36^0 = 36^0$. Трите различни стойности са 36^0, 72^0 и 108^0.

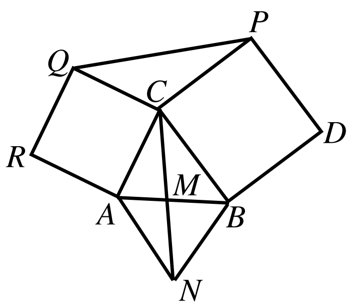
21. Отг. C). На всяка стена на куба има по 1 цял квадрат и по 4 половинки, т.е. черната част на всяка стена има лице, равно на лицето на 3 квадрата. Следователно лицето на черната част от повърхнината на куба е равно на лицето на 18 квадрата. Ако d е дължината на диагонала на квадрата, то $2d = 1\,dm$, откъдето $d = 5\,cm$. Лицето на един квадрат е $\frac{1}{2}d^2 = 12{,}5\,cm^2$, а лицето на черната част от повърхнината на куба е $12{,}5.18 = 225\,\text{cm}^2$.

22. Отг. C). Нулата със сигурност участва в записа на едно хладно число. В противен случай сборът на последните четири цифри е поне $1+2+3+4=10$ и не може да бъде изпълнено условието първата цифра да е равна на сбора на останалите четири. Освен нулата, за останалите три цифри измежду последните четири са възможни 7 случая: 1, 2 и 3 (първа цифра 6); 1, 2 и 4 (първа цифра 7); 1, 2 и 5 (първа цифра 8); 1, 2 и 6 (първа цифра 9); 1, 3 и 4 (първа цифра 8), 1, 3 и 5 (първа цифра 9); 2, 3 и 4 (първа цифра 9). Във всеки един от тези 7 случая съществуват по 24 хладни числа, които се получават, като разместваме местата на четирите последни цифри. Следователно общият брой на всички хладни числа е $24.7=168$.

23. Отг. B). Непосредствено се проверява, че $\frac{x}{y-1}>\frac{2x}{2y-1}>\frac{3x}{3y+1}>\frac{2x}{2y+1}>\frac{x}{y+1}$.

24. Отг. E). От вида на останалата част от параболата можем да направим заключение, че параболата е с формата на "чаша", т.е. $a>0$ и **A)** е винаги вярно. Върхът на параболата се намира надясно от точката $(1;-10)$ и следователно $-\frac{b}{2a}>1>0$, откъдето $b<0$ и **B)** е винаги вярно. Тъй като точката $(1;-10)$ лежи на параболата, то $y(1)=-10$, т.е. $a+b+c=-10<0$ и **C)** е винаги вярно. Освен това върхът на параболата лежи под оста Ox и $a>0$. Заключаваме, че уравнението $y=0$ има два различни реални корена, т.е. $b^2-4ac>0 \Rightarrow b^2>4ac$ и **D)** е винаги вярно. Накрая, функцията $y=2x^2-23x+11$ изпълнява условието на задачата и е пример за това, че твърдението $c<0$ (т.е. **E)**) може и да не е вярно.

25. Отг. E). Нека точката N е върху правата CM така, че M е между C и N, като $CM=MN=3$. Тогава четириъгълникът $ANBC$ е успоредник. Оттук следва, че $BN=AC=QC$, т.е. $BN=QC$. Освен това $\angle CBN=180^0-\angle ACB=\angle QCP$ ($\angle ACQ+\angle BCP=180^0$). Имаме още, че $BC=PC$ и следователно $\Delta CNB\cong\Delta PQC$ по I признак. Заключаваме, че $PQ=CN=2CM=2.3=6$.



26. Отг. D). Нека $(x;y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x\le y$, то $\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3}=\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\le\frac{1}{x}+\frac{1}{x}=\frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3}\le\frac{2}{x}$, откъдето $x\le 6$. От друга страна $\frac{1}{y}>0$ и получаваме, че $\frac{1}{x}<\frac{1}{3}$, т.е. $x>3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.

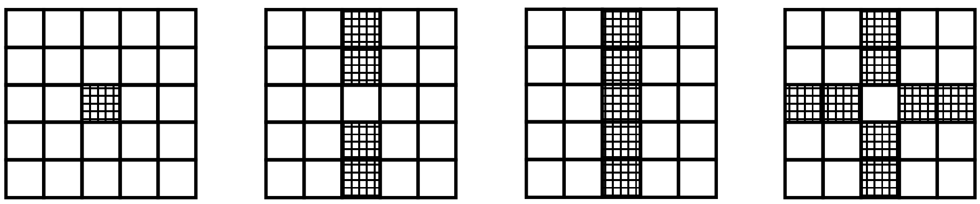
27. Отг. B). Ако $k=1$, то $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 1+1\rangle+\langle 1+2\rangle=2+3=5=\langle 2k+3\rangle$. Следователно $k=1$ е решение на уравнението. При $k\ge 2$ е изпълнено $\langle k+1\rangle\ge 3$, $\langle k+2\rangle\ge 3$ и $\langle 2k+3\rangle\ge 3$, откъдето следва, че простите числа $\langle k+1\rangle$, $\langle k+2\rangle$ и $\langle 2k+3\rangle$ са нечетни. Заключаваме, че равенството $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$ е невъзможно, защото лявата му страна е четно число, а дясната – нечетно.

28. Отг. C). Тъй като ΔXYS е правоъгълен, то $XY=r\sqrt{2}$. Това означава, че отсечката XY е страна на вписан квадрат в по-голямата окръжност. Тогава лицето на по-малкия отрез от големия кръг, който отговаря на хордата XY, е равно на $\frac{1}{4}(\pi r^2 - 2r^2) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2$. За лицето на затъмнената част получаваме:

$$\frac{1}{2}\pi\left(\frac{XY}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{2}r^2\right) = \frac{1}{4}\pi r^2 - \frac{1}{4}\pi r^2 + \frac{1}{2}r^2 = \frac{1}{2}r^2.$$

29. Отг. D). Да предположим, че числото a има прост делител p, различен от 2 и 3. Тогава p ще дели също b и c. Ето защо можем да запишем $a = p^{\alpha}a_1$, $p \nmid a_1$, $b = p^{\beta}b_1$, $p \nmid b_1$ и $c = p^{\gamma}c_1$, $p \nmid c_1$. От $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $p^{2\alpha}a_1^2 = 2p^{3\beta}b_1^3 = 3p^{5\gamma}c_1^5$, което е възможно тогава и само тогава, когато $p^{2\alpha} = p^{3\beta} = p^{5\gamma}$. Но тогава $a_1^2 = 2b_1^3 = 3c_1^5$, което показва, че числата a_1, b_1 и c_1 също удовлетворяват дадените равенства и числото $a_1b_1c_1$ има по-малък брой делители от abc. Тъй като се интересуваме от случая, когато числото abc има най-малък брой делители, можем да считаме, че a няма други прости делители освен 2 и 3. Същото важи за b и c. Затова можем да запишем, че $a = 2^x3^y$, $b = 2^z3^t$ и $c = 2^v3^w$, където x, y, z, t, v и w са цели положителни числа. Сега от $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $2^{2x}3^{2y} = 2^{3z+1}3^{3t} = 2^{5v}3^{5w+1}$. Това е възможно точно когато $2x = 3z + 1 = 5v$ и $2y = 3t = 5w + 1$. От равенството $2x = 5v$ следва, че съществува цяло число $i \ge 0$ така, че $x = 5i$ и следователно $v = 2i$. Сега от равенството $3z + 1 = 5v$ намираме $3z = 10i - 1 = 9i + i - 1$. Това означава, че съществува цяло число $k \ge 0$ така, че $i - 1 = 3k$, т.е. $i = 3k + 1$. Тогава $x = 15k + 5$, $z = 10k + 3$ и $v = 6k + 2$. По същия начин от равенството $2y = 3t$ следва, че съществува цяло число $j \ge 0$, така, че $y = 3j$ и следователно $t = 2j$. Сега от равенството $2y = 5w + 1$ намираме $5w = 6j - 1 = 5j + j - 1$. Това означава, че съществува цяло число $m \ge 0$ така, че $j - 1 = 5m$, т.е. $j = 5m + 1$. Тогава $y = 15m + 3$, $t = 10m + 2$ и $w = 6m + 1$. Получаваме, че $abc = 2^{31k+10}3^{31m+6}$. Оттук следва, че броят на делителите на abc е $(31k + 11)(31m + 7) \ge 77$, като равенство се достига при $k = m = 0$.

30. Отг. E).



Броят на подтаблиците 3×3 е 9. Първите 3 се получават от горните 3 реда на таблицата 5×5: едната подтаблица включва трите стълба отляво надясно, а другите две се получават с преместване на тази подтаблица вдясно на разстояние съответно една и две клетки. Останалите 6 подтаблици могат да се получат от описаните 3 с преместване надолу на една и две клетки. Отбелязаните клетки ще означаваме със защриховане, както е показано. При $n = 1$ е достатъчно да защриховаме централната клетка (вж. първия чертеж) и да забележим, че всяка от 9-те подтаблици 3×3 съдържа централната клетка. При $n = 2$ ще използваме защриховането от втория чертеж. Очевидно централната подтаблица 3×3 съдържа точно две защриховани клетки. Ако придвижим тази подтаблица една клетка наляво или една клетка на надясно, двете защриховани клетки остават в новите подтаблици. Ако придвижим централната таблица една клетка нагоре или една клетка надолу, се появява нова защрихована клетка и в същото време се премахва една защрихована клетка. Следователно в новите подтаблици отново ще има по две защриховани клетки. Тези две подтаблици можем да преместваме наляво или надясно така, както направихме с централната подтаблица и броят на защрихованите клетки ще се запази отново 2. С аналогични разсъждения, като използваме защрихованията съответно на третия и четвъртия чертеж, установяваме, че $n = 3$ и $n = 4$ са също решения на задачата. По-нататък е достатъчно да забележим, че е в сила свойството "дуалност": ако сме доказали твърдението за някое n, т.е. извършили сме защриховане на някои от клетките на таблицата 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 съдържа точно n защриховани клетки, то всяка от подтаблиците ще съдържа $9-n$ незащриховани клетки. Това означава, че ако вместо защриховане на избраните клетки извършим защриховане на останалите клетки в таблицата 5×5, ще получим доказателство на твърдението за $9-n$. Заключаваме, че към решенията на задачата трябва да прибавим още числата $9-1=8$, $9-2=7$, $9-3=6$ и $9-4=5$. Следователно за всички естествени числа n от интервала $0<n<9$ съществува подходящо защриховане така, че да е изпълнено условието на задачата.

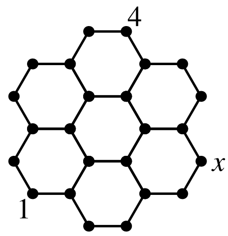
Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

ТЕМА за 11 и 12 клас

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Върху всяка от точките на фигурата трябва да се запише по едно число така, че сумата от числата в краищата на всяка отсечка да е една и съща. Две от числата вече са написани. На колко е равно числото x?



A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** не може да се определи

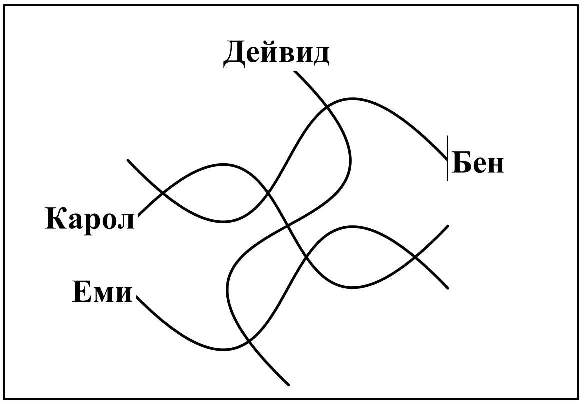
2. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?

A) Михаел, Фернандо, Себастиан **B)** Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо **D)** Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

3. Ако $2^x = 15$ и $15^y = 32$, то xy е равно на:

A) 5 **B)** $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C)** $\log_2 47$ **D)** 7 **E)** $\sqrt{47}$

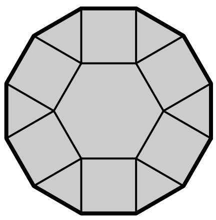
4. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича “Кривата улица”. Кой живее на “Кривата улица”?



A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид
E) не може да се определи от скицата

5. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в намаляващ ред. На кое място се намира числото 2011?

A) на 6-то **B)** на 7-мо **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 10-то

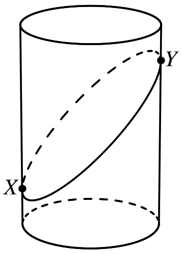


6. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?

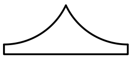
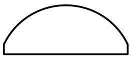
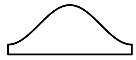
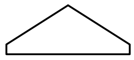
A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

7. Андрей написал на дъската нечетните числа от 1 до 2011 включително, а Боби изтрил кратните на 3. Колко числа са останали на дъската?

A) 335 **B)** 336 **C)** 671 **D)** 1005 **E)** 1006



8. Правоъгълен лист хартия е увит около цилиндър и е направен равнинен разрез през цилиндъра и хартията. Разрезът минава през точките X и Y от чертежа. След това долната част на хартията е разгъната. Коя от посочените фигури може да е разгънатата долна част на хартията?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

9. За четириъгълника $PQRS$ е изпълнено $\angle PSR = \angle PQR = 90°$, $PS = SR$, $ST \perp PQ$ ($T \in PQ$) и $ST = 5$. Лицето на четириъгълника е равно на:

A) 20 **B)** 22,5 **C)** 25 **D)** 27,5 **E)** 30

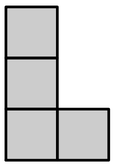
10. Макс и Хюго хвърлят шепа зарове, за да определят кой от двамата трябва да скочи пръв в студеното езеро. Ако не се падне нито една шестица, пръв трябва да е Макс, а ако се падне точно една шестица, пръв трябва да е Хюго. Ако се паднат повече от една шестица, скачането се отлага за друг ден. Колко зарове трябва да хвърлят Макс и Хюго, че шансът на всеки от тях да скочи пръв в езерото да е един и същ?

A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 17

11. С помощта на три правоъгълника, поставени плътно един до друг без застъпване, трябва да се получи по-голям правоъгълник. Единият от дадените правоъгълници има размери 7 на 11, а вторият има размери 4 на 8. Третият правоъгълник е избран с възможно най-голямо лице. На колко е равно това лице?

A) 11 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 56 **E)** 77

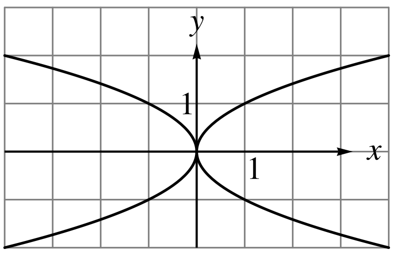
12. Показаната $L-$образна фигура е съставена от 4 квадратчета. По колко начина може да се добави още едно квадратче така, че получената фигура да има ос на симетрия?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 6

13. 48 момчета били на ски-училище. Шестима от тях имали точно по един брат измежду останалите, деветима имали точно по двама братя измежду останалите и четирима имали точно по трима братя измежду останалите. Другите деца нямали братя измежду останалите. От колко семейства са били децата от ски-училището?

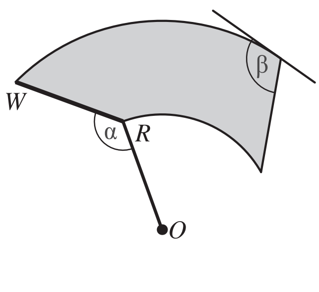
A) 19 **B)** 25 **C)** 31 **D)** 36 **E)** 48



14. Колко от графиките на функциите $y = x^2$, $y = -x^2$, $y = \sqrt{x}$, $y = -\sqrt{x}$, $y = \sqrt{-x}$, $y = -\sqrt{-x}$, $y = \sqrt{|x|}$ и $y = -\sqrt{|x|}$ са включени на чертежа?

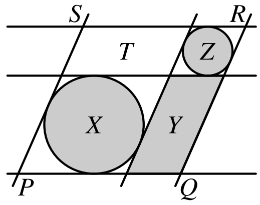
A) нито една **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** всичките 8

15. Чистачката на задното стъкло на автомобил има чистеща част RW и свързваща част OR, които са еднакво дълги и образуват фиксиран ъгъл α, както е показано на чертежа. При въртенето на чистачката около центъра O чистещата част почиства част от стъклото (затъмнената част на чертежа). Намерете ъгъла β между крайното дясно положение на чистещата част и допирателната към кривата (описвана от т. W) в крайното положение на W.



A) $\dfrac{3\pi - \alpha}{2}$ **B)** $\pi - \dfrac{\alpha}{2}$ **C)** $\dfrac{3\pi}{2} - \alpha$ **D)** $\dfrac{\pi}{2} + \alpha$ **E)** $\pi + \dfrac{\alpha}{2}$

16. Трите хоризонтални прави на чертежа са успоредни. Трите наклонени прави също са успоредни. Всяка от окръжностите се допира до четири от правите. Лицата на затъмнените фигури от чертежа са означени съответно с X, Y и Z, както е показано, а W е лицето на успоредника $PQRS$. Ицо иска да намери лицето T на успоредника от чертежа. Колко най-малко от лицата X, Y, Z и W са му необходими, за да пресметне T?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** T не може да се изрази чрез X, Y, Z и W

17. Правилните тетраедри $ABCD$ и $BCDE$ имат обща стена BCD. Нека X е точката, в която правата DE пресича равнината (ABC). Кое от посочените твърдения е вярното?

A) X не съществува, защото DE е успоредна на (ABC) **B)** $X \in \Delta ABC$

C) X и A са от една и съща страна на правата BC, но X е извън ΔABC

D) BC пресича отсечката AX във вътрешна точка и $BC \perp AX$ **E)** друг отговор

18. Шестоъгълникът $PQRSTU$ със страни $PQ = 4$, $QR = 5$, $RS = 6$, $ST = 7$ и $TU = 8$ е описан около окръжност. Да се намери дължината на страната UP.

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** не може да се определи

19. Да се намери сумата на всички цели положителни числа x, по-малки от 100, за всяко от които числото $x^2 - 81$ е кратно на 100.

A) 200 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 81 **E)** 50

20. Братята Андрей и Иван отговорили вярно на въпроса колко са членовете на шахматния им клуб. Андрей казал: "Всички членове на клуба са момчета, освен петима, които са момичета." Иван добавил: "Всяка група от шестима членове на клуба включва най-малко четири момичета." Колко са членовете на клуба?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 18

21. В кутия за лотария са поставени топки и върху всяка от топките е записано по едно цяло положително число. Всички записани числа са различни. Върху 30 от топките е записано число, кратно на 6, върху 20 от топките е записано число, кратно на 7, а върху точно 10 от топките е записано число, кратно на 42. Намерете възможно най-малкия брой топки в кутията.

A) 30 **B)** 40 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 60

22. Дадени са двете безкрайни аритметични прогресии 5; 20; 35;… и 35; 61; 87;… Намерете броя на различните безкрайни аритметични прогресии от цели положителни числа, всяка от които съдържа всички членове на двете дадени прогресии.

A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 26 **E)** безброй много

23. Редицата функции $f_1(x), f_2(x), \dots,$ удовлетворява двете условия: $f_1(x) = x$ и $f_{n+1}(x) = \dfrac{1}{1 - f_n(x)}$ за всяко $n \geq 1$. Да се пресметне $f_{2011}(2011)$.

A) 2011 **B)** $-\dfrac{1}{2010}$ **C)** $\dfrac{2010}{2011}$ **D)** 1 **E)** -2011

24. Кутия съдържа някакъв брой червени и някакъв брой зелени топки. По случаен начин се избират две топки от кутията. Вероятността избраните топки да са с еднакъв цвят е $\dfrac{1}{2}$. Кое от посочените числа е възможно да показва общия брой на топките в кутията?

A) 81 **B)** 101 **C)** 1000 **D)** 2011 **E)** 10001

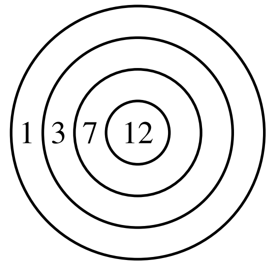
25. Самолетна компания не таксува багажа на даден пътник, ако този багаж не надхвърля определено тегло. За всеки килограм над определеното тегло се заплаща определена такса. Багажът на г-н и г-жа Трип бил общо 60 кг и те платили 3 евро, като всеки от тях платил част от тази сума. Багажът на г-н Уондър бил също 60 кг, но той платил за него 10,5 евро. Да се намери максималното тегло на багажа на един пътник, за който пътникът не заплаща такса.

A) 10 кг **B)** 18 кг **C)** 20 кг **D)** 25 кг **E)** 39 кг

26. В израза $\dfrac{K \cdot A \cdot N \cdot G \cdot A \cdot R \cdot O \cdot O}{G \cdot A \cdot M \cdot E}$ различните букви отговарят на различни ненулеви цифри, а еднаквите букви отговарят на еднакви цифри. Известно е, че стойността на израза е цяло положително число. Коя е най-малката възможна стойност на израза при тези условия?

(A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

27. Робин Худ изстрелял три стрели по мишената, показана на чертежа. Той уцелил при трите изстрела и получил съответни точки съгласно показаните числа в различните кръгове. Колко различни резултата могат да се получат след сумиране на точките?



A) 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

28. Нека a, b и c са такива цели положителни числа, че $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Какъв най-малък брой положителни делители може да има числото abc (включително 1 и abc)?

A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

29. Двадесет различни цели положителни числа са записани в клетките на правоъгълна таблица с размери 4×5 (във всяка клетка по едно число). Всеки две съседни числа (числата в клетки с обща страна) имат общ делител, по-голям от 1. Ако n е най-голямото число в таблицата, да се намери минималната стойност на n.

A) 21 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 40

30. Намерете броя на 4-елементните множества от различни ръбове на даден куб, за които произволни два ръба в множеството нямат общ връх.

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 11 и 12 клас

1. Отг. А). Ако две отсечки имат общ връх, то в другите им два края трябва да бъде записано едно и също число. Оттук следва, че във всяка точка трябва да бъде записано 1 или 4. При това е изпълнено условието за съгласуваност, т.е. какъвто и път от отсечки да се избере, започващ от 1 и завършващ в 4, броят на точките между 1 и 4 е четен. Сега лесно се получава, че $x=1$.

2. Отг. В). Ако двама спортисти разменят местата си четен брой пъти, те ще завършат в реда, в който са били в началото, а ако разменят местата си нечетен брой пъти, ще завършат обратно на реда, в който са били в началото. Оттук следва, че Михаел е завършил след Фернандо и след Себастиан, а Фернандо е завършил преди Себастиан.

3. Отг. А). От равенството $2^x=15$ следва, че $2^{xy}=15^y=32=2^5$, т.е. $2^{xy}=2^5$, откъдето $xy=5$.

4. Отг. С). Две прави улици не могат да се пресичат повече от веднъж. Да допуснем, че улицата, на която живее Карол, е права. Улиците, на които живеят Еми и Бен, не могат да са прави, защото всяка от тях пресича два пъти улицата, на която живее Карол. Но тогава правите улици са най-много две – тази, на която живее Карол, и тази, на която живее Дейвид. Получаваме противоречие и заключаваме, че улицата, на която живее Карол, не е права. Улиците, на които живеят Дейвид, Еми и Бен, са прави, защото кои да е две от тях имат най-много по едно пресичане. Следователно Карол живее на "Кривата улица".

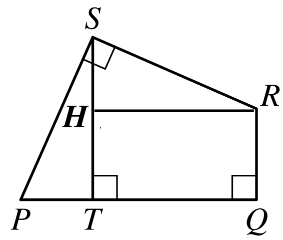
5. Отг. D). Записът изглежда така: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011,…

6. Отг. С). От условието следва, че всеки от триъгълниците е равнобедрен с ъгъл при върха, равен на 60^0. Следователно шестте триъгълника са равностранни със страна 1. Така, за обиколката на фигурата получаваме 12. .

7. Отг. С). Андрей е написал $2010:2+1=1006$ числа. Измежду всеки три последователни нечетни числа (1;3;5), (7;9;11),…, (2005;2007;2009) Боби е изтрил по едно и следователно от всяка от тези групи на дъската са останали по две числа. Броят на тези групи е $(1006-1):3=335$. Заключаваме, че на дъската са останали $2\cdot 335+1=671$ числа.

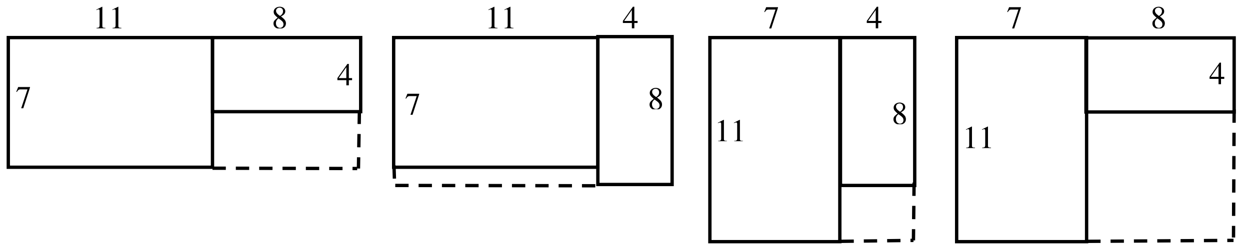
8. Отг. С). Цилиндричната повърхнина може да се параметризира по следния начин: $x=\cos t$, $y=\sin t$, $z=z$, където $t\in\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $z\in\mathbb{R}$. Можем да считаме, че равнината на сечението е $z=x$. При разгъване имаме $z=x=const$ и $y=\sin t$, чиято графика е в **С**).

9. Отг. С). Ако $RH\perp ST$ ($H\in ST$), то $\Delta PTS\cong\Delta SHR$. Нека $PT=x$. Тогава $S_{PQRS}=2S_{PTS}+S_{TQRH}=2\cdot\frac{PT.ST}{2}+HR.TH=$ $=5x+5(5-x)=25$.

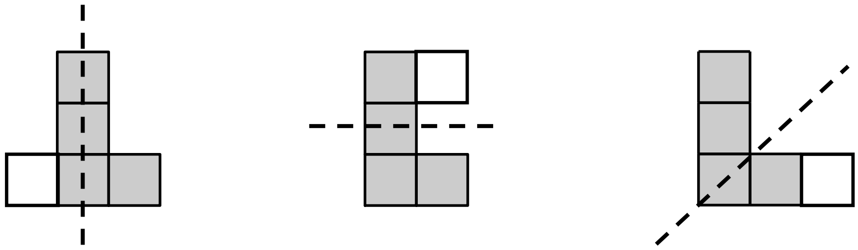


10. Отг. В). Ако броят на заровете е n, то вероятността Макс да скочи пръв в езерото е $\frac{5^n}{6^n}$, а вероятността Хюго да скочи пръв е $\frac{n5^{n-1}}{6^n}$. Оттук $5^n=n5^{n-1}\Rightarrow n=5$.

11. Отг. D). Дадените два правоъгълника трябва да бъда поставени така, че да имат общ връх. Това може да стане по четири различни начина, както е показано. Размерите на третия правоъгълник са съответно 8×3, 11×1, 4×3 и 8×7. Съответните лица са 24, 11, 12 и 56, откъдето следва, че отговорът на задачата е 56.



12. Отг. C).

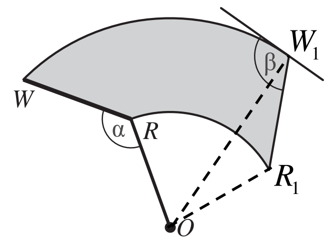


Добавянето на още едно квадратче води до фигура с 5 квадратчета. Ако тази фигура има ос на симетрия, то от двете страни на оста трябва са разположени по 2 квадратчета и половина (не е задължително квадратчетата да са цели). Оттук следва, че със сигурност оста на симетрия трябва да разделя поне едно от квадратчетата на две равни части. От друга страна едно квадратче се разделя на две равни части с права линия по 4 начина: ако правата минава през центъра на квадратчето и е успоредна на една от страните, ако правата минава през центъра на квадратчето и е успоредна на съседна страна, ако правата минава през един от диагоналите или ако правата минава през другия диагонал. С непосредствена проверка за всяко от дадените 4 квадратчета и всяка от възможните 4 прави се установява съществуването на показаните 3 случая.

13. Отг. D). Да преброим децата по семейства. Шестте деца с точно по един брат са от 3 семейства (двама братя във всяко), деветте деца с по двама братя са от 3 семейства (трима братя във всяко) и четирите деца с по трима братя са от 1 семейство. Остават $48-6-9-4=29$ деца, които са от различни семейства. Ето защо семействата са общо $29+3+3+1=36$.

14. Отг. D). На чертежа липсват само графиките на функциите $y=x^2$ и $y=-x^2$. Графиката, която е разположена вляво от ординатната ос, е на функцията $x=-y^2$, а дясната графика е на функцията $x=y^2$. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{x}$, ще получим $x=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{x}$ е горната клонка на дясната графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{x}$, ще получим отново $x=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{x}$ е долната клонка на дясната графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{-x}$, ще получим $x=-y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{-x}$ е горната клонка на лявата графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{-x}$, ще получим отново $x=-y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{-x}$ е долната клонка на лявата графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{|x|}$, ще получим $|x|=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{|x|}$ са горните клонки на лявата и дясната графика от чертежа. Накрая, ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{|x|}$, ще получим отново $|x|=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{|x|}$ са долните клонки на лявата и дясната графика от чертежа.

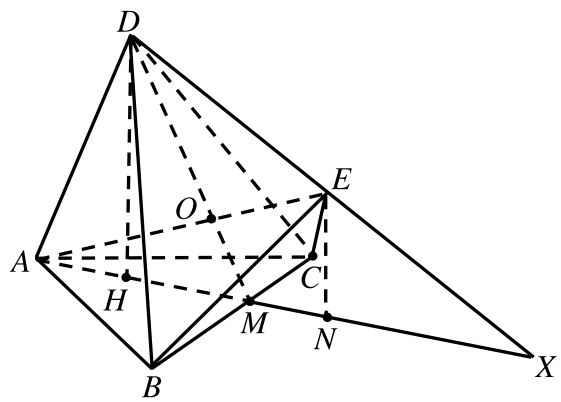
15. Отг. B). Нека крайното дясно положение на точката R е точката R_1, а крайното дясно положение на точката W е точката W_1. Да отбележим, че върхът на търсения ъгъл е точката W_1. От условието следва, че триъгълникът OR_1W_1 е равнобедрен с ъгли $\angle R_1OW_1=\angle OW_1R_1=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)=\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$.



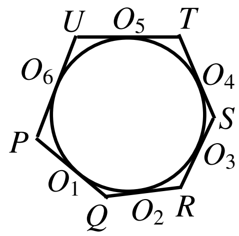
Траекторията на W е дъга от окръжност с център O и радиус $OW=OW_1$. Тъй като радиусът OW_1 е перпендикулярен на допирателната, то $\beta=\frac{\pi}{2}+\angle OW_1R_1=\pi-\frac{\alpha}{2}$.

16. Отг. A). Успоредниците, в които са вписани кръговете с лица X и Z, са ромбове. Това означава, че успоредниците с лица T и Y имат равни страни. Освен това те имат равни ъгли и следователно $Y=T$.

17. Отг. D). Нека O е центърът на ΔBCD. Проекцията на A в равнината (BCD) съвпада с O, защото по условие $ABCD$ е правилен. Аналогично проекцията на E в равнината (BCD) съвпада с O. Оттук следва, че точките A и E са от различни страни на общата стена BCD (те се намират на равни разстояния от O). При това точките A, O и E лежат на една права. Ако M е средата на страната BC,



то $DM\perp BC$ (ΔBCD е равностранен). Тъй като $AM\perp BC$ (ΔABC е също равностранен), проекцията H на D в равнината (ABC) лежи върху AM. Правата DM минава през O и следователно точката O се намира в ΔHMD. Оттук следва, че проекцията на O в равнината (ABC) лежи на правата AM. Заключаваме, че и проекцията N на E в равнината (ABC) лежи на същата права. Но тогава проекцията на правата DE в равнината (ABC) е правата AM. Стигаме до извода, че правата DE пресича (ABC) в точка от правата AM, т.е. точката X лежи на тази права. Така доказваме, че $BC\perp AX$. Ако страните на тетраедрите са с дължина a, то $AM=a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (височина в равностранен триъгълник със страна a) и $DH=AO=EO=a\frac{\sqrt{6}}{3}$ (височина на правилен тетраедър със страна a). От подобието на правоъгълните триъгълници AMO и AEN следва $\dfrac{AM}{AE}=\dfrac{AO}{AN}$, т.е. $\dfrac{a\dfrac{\sqrt{3}}{2}}{2a\dfrac{\sqrt{6}}{3}}=\dfrac{a\dfrac{\sqrt{6}}{3}}{AN}$. Оттук $AN=\dfrac{8}{9}a\sqrt{3}>\dfrac{a\sqrt{3}}{2}=AM$. Така заключаваме, че BC пресича отсечката AX във вътрешна точка и следователно вярното твърдение е **D**).



18. Отг. D). Нека O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 са допирните точки с окръжността съответно на страните PQ, QR, RS, ST, TU и UP. Ако $QO_1=x$, то $PO_1=4-x$ и като използваме, че допирателните отсечки от точка към окръжност са равни, последователно получаваме $QO_2=QO_1=x$, $RO_2=RO_3=5-x$, $SO_3=SO_4=6-(5-x)=1+x$, $TO_4=TO_5=7-(1+x)=6-x$, $UO_5=UO_6=8-(6-x)=2+x$. Тъй като $PO_6=PO_1=4-x$, то $UP=UO_6+PO_6=(2+x)+(4-x)=6$.

19. Отг. A). Ясно е, че всяко от търсените числа x трябва да е нечетно, защото в противен случай числото x^2-81 ще бъде нечетно и не може да е кратно на 100. От нечетността на x следва, че числото x^2-81 се дели на 4. Това дава възможност да сведем задачата до намиране на онези нечетни x, за които числото x^2-81 се дели на 25. Нека x е такова, че 25 дели $x^2-81=(x-9)(x+9)$. Тъй като $(x+9)-(x-9)=18$ и 18 не се дели на 5, то точно едно от числата $x-9$ и $x+9$ трябва да е кратно на 25. Тези числа трябва да са четни и следователно единствените възможности са: $x-9=0$, $x-9=50$, $x+9=50$ и $x+9=100$. Оттук намираме, че $x=9$, $x=59$, $x=41$ и $x=91$. Тогава $9+59+41+91=200$.

20. Отг. B). От условието на задачата следва, че момичетата в клуба са точно 5, а момчетата са поне 2 – самите Андрей и Иван. Ако предположим, че в клуба членува поне още едно момче, то избирайки в шестица трите момчета с произволни други трима членове, ще получим противоречие с твърдението на Иван. Следователно членовете на клуба са точно 7.

21. Отг. B). Има поне 20 топки, върху които е записано число, което е кратно на 6, но не е кратно на 7. Има поне 10 топки, върху които е записано число, което е кратно на 7, но не е кратно на 6. Като вземем предвид и наличието на 10 топки, върху които е записано число, кратно и на 6, и на 7, получаваме, че топките са най-малко 40. Примерът, че в кутията може да има точно 40 топки и да са изпълнени условията на задачата, е очевиден.

22. Отг. C). Нека аритметичната прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ с разлика d изпълнява условието на задачата. Ясно е, че d е цяло положително число, защото не съществува безкрайно намаляваща редица от цели положителни числа. Тъй като $a_m=5$ и $a_n=20$ за някакви цели положителни числа m и n ($n>m$, защото $a_n>a_m$), то $(n-m)d=20-5=15$. Това означава, че d е делител на 15. Аналогично получаваме, че d е делител и на $61-35=26$. Щом d дели взаимно простите числа 15 и 26, то това е възможно само ако $d=1$. Освен това е ясно, че $a_1\le a_m=5$. Оттук получаваме, че има точно пет прогресии, които са решения на задачата: първата прогресия е с $a_1=1$ и $d=1$, втората е с $a_1=2$ и $d=1$, третата е с $a_1=3$ и $d=1$, четвъртата е с $a_1=4$ и $d=1$, а петата прогресия е с $a_1=5$ и $d=1$.

23. Отг. A). От условието последователно получаваме $f_2\left(x\right)=\dfrac{1}{1-x}$, $f_3\left(x\right)=\dfrac{x-1}{x}$, $f_4\left(x\right)=f_1\left(x\right)=x$. При това всяка от функциите е дефинирана за $x=2011$. Тъй като $f_{2011}\left(x\right)=f_{2008}\left(x\right)=\ldots=f_7\left(x\right)=f_4\left(x\right)=f_1\left(x\right)=x$, то $f_{2011}(2011)=f_1(2011)=2011$.

24. Отг. A). Вероятността двете извадени топки да са с различен цвят също е равна на $\dfrac{1}{2}$. Нека в кутията има общо n топки и k от тях да са червени. Тогава вероятността двете извадени топки да са с различен цвят е равна на $\dfrac{C_k^1\cdot C_{n-k}^1}{C_n^2}$. Оттук получаваме $\dfrac{C_k^1\cdot C_{n-k}^1}{C_n^2}=\dfrac{1}{2}\Leftrightarrow 4k^2-4kn+n^2-n=0\Leftrightarrow\left(2k-n\right)^2=n$, т.е. числото n трябва да е точен квадрат на естествено число. От посочените отговори само 81 е точен квадрат. Лесно може да се провери, че ако в кутията има например 36 червени и 45 зелени топки (общо 81), настъпва ситуацията, описана в задачата.

25. Отг. D). Нека x кг е максималното тегло на багажа, за който един пътник не заплаща такса и нека за всеки извънреден килограм се заплаща такса от y евро. От условието за багажа на г-н Уондър следва равенството $\left(60-x\right)y=10{,}5$. Ако багажът на г-жа Трип е a кг, то багажът на г-н Трип е $\left(60-a\right)$ кг и имаме равенството

$$\left(a-x\right)y+\left(60-a-x\right)y=3\Leftrightarrow\left(60-2x\right)y=3.$$

След като разделим двете получени равенства, достигаме до $\dfrac{60-x}{60-2x}=3{,}5\Rightarrow x=25$ кг.

26. Отг. B). След съкращения получаваме $\dfrac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}=\dfrac{K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{M\cdot E}$. Тъй като $K\cdot N\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O\geq 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 1=120$ и $M\cdot E\leq 9\cdot 8=72$, то $\dfrac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}\geq 2$. От друга страна, при $K=2,\ N=3,\ A=4,\ R=6,\ O=1,\ M=8,\ E=9$ (и например $G=7$) стойността на израза $\dfrac{K\cdot A\cdot N\cdot G\cdot A\cdot R\cdot O\cdot O}{G\cdot A\cdot M\cdot E}$ е точно 2.

27. Отг. C). Възможно най-малката сума е $3=1+1+1$, а възможно най-голямата е $36=12+12+12$. Следователно всички възможни суми са измежду числата 3, 4, …,36. Проверката показва, че от тези 34 възможни стойности се реализират сумите $3=1+1+1$, $5=3+1+1$, $7=1+3+3$, $9=1+1+7$, $11=1+3+7$, $13=3+3+7$, $14=1+1+12$, $15=1+7+7$, $16=1+3+12$, $17=3+7+7$, $18=3+3+12$, $20=1+7+12$, $21=7+7+7$, $22=3+7+12$, $25=1+12+12$, $26=7+7+12$, $27=3+12+12$, $31=7+12+12$ и $36=12+12+12$, т.е. точно 19 на брой. Можем да се убедим, че останалите суми не се получават, като например отбележим, че ако 12 участва четен брой пъти, то общата сума е нечетно число, а ако 12 участва нечетен брой пъти, то общата сума е четно число.

28. Отг. D). Да предположим, че числото a има прост делител p, различен от 2 и 3. Тогава p ще дели също b и c. Ето защо можем да запишем $a=p^{\alpha}a_1,\ p\nmid a_1,\ b=p^{\beta}b_1,\ p\nmid b_1$ и

$c = p^{\gamma}c_1$, $p \nmid c_1$. От $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $p^{2\alpha}a_1^2 = 2p^{3\beta}b_1^3 = 3p^{5\gamma}c_1^5$, което е възможно тогава и само тогава, когато $p^{2\alpha} = p^{3\beta} = p^{5\gamma}$. Но тогава $a_1^2 = 2b_1^3 = 3c_1^5$, което показва, че числата a_1, b_1 и c_1 също удовлетворяват дадените равенства и числото $a_1b_1c_1$ има по-малък брой делители от abc. Тъй като се интересуваме от случая, когато числото abc има най-малък брой делители, можем да считаме, че a няма други прости делители освен 2 и 3. Същото важи за b и c. Затова можем да запишем, че $a = 2^x3^y$, $b = 2^z3^t$ и $c = 2^v3^w$, където x, y, z, t, v и w са цели положителни числа. Сега от $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $2^{2x}3^{2y} = 2^{3z+1}3^{3t} = 2^{5v}3^{5w+1}$. Това е възможно точно когато $2x = 3z + 1 = 5v$ и $2y = 3t = 5w + 1$. От равенството $2x = 5v$ следва, че съществува цяло число $i \geq 0$ така, че $x = 5i$ и следователно $v = 2i$. Сега от равенството $3z + 1 = 5v$ намираме $3z = 10i - 1 = 9i + i - 1$. Това означава, че съществува цяло число $k \geq 0$ така, че $i - 1 = 3k$, т.е. $i = 3k + 1$. Тогава $x = 15k + 5,\ z = 10k + 3$ и $v = 6k + 2$. По същия начин от равенството $2y = 3t$ следва, че съществува цяло число $j \geq 0$, така, че $y = 3j$ и следователно $t = 2j$. Сега от равенството $2y = 5w + 1$ намираме $5w = 6j - 1 = 5j + j - 1$. Това означава, че съществува цяло число $m \geq 0$ така, че $j - 1 = 5m$, т.е. $j = 5m + 1$. Тогава $y = 15m + 3,\ t = 10m + 2$ и $w = 6m + 1$. Получаваме, че $abc = 2^{31k+10}3^{31m+6}$. Оттук следва, че броят на делителите на abc е $(31k + 11)(31m + 7) \geq 77$, като равенство се достига при $k = m = 0$.

29. Отг. C). Очевидно $n > 20$, защото единицата не може да участва. Да предположим, че $n \leq 25$. Числата 13, 17, 19 и 23 не могат да участват, защото са взаимно прости с числата от 2 до 25. Освен това, всяко число в таблицата има поне две съседни и следователно числото 11 също не може да участва. Следователно броят на числата, които могат да участват в този случай, е $24 - 5 = 19 < 20$, което е невъзможно. Заключаваме, че $n \geq 26$. Ето пример за $n = 26$:

2	4	8	6	3
12	16	22	18	9
15	10	26	24	21
5	25	20	14	7

30. Отг. C). Да означим куба по стандартния начин с $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В едно множество с исканото свойство не може да има три ръба, които са два по два кръстосани. В противен случай четвъртият ръб ще има със сигурност общ връх с някой от трите. В това се убеждаваме, като разгледаме например ръбовете AB, DD_1 и B_1C_1, които са два по два кръстосани. Директно се вижда, че всеки от останалите 9 ръба BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, A_1B_1, C_1D_1 и D_1A_1 има общ връх с някой от избраните три. След като в едно множество с исканото свойство няма три ръба, които са два по два кръстосани, можем да считаме, че четирите ръба лежат в две срещуположни стени. Двойките срещуположни стени в един куб са точно 3 на брой. С помощта на една двойка срещуположни стени можем да определим точно 4 множества с исканото свойство. За да се убедим, че е така, достатъчно е да разгледаме например стените $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$. Възможните множества с ръбове в тези стени са: $\{AB, CD, A_1B_1, C_1D_1\}$, $\{AB, CD, B_1C_1, D_1A_1\}$, $\{BC, DA, B_1C_1, D_1A_1\}$ и $\{BC, DA, A_1B_1, C_1D_1\}$. Следователно общият броя множества с исканото свойство е $4.3 = 12$. Някои от тези множества обаче се повтарят. В разглеждания пример само второто и четвъртото множество не се получават от друга двойка срещуположни стени. В същото време първото множество се получава и от двойката срещуположни стени (ABB_1A_1) и (CDD_1C_1), а третото множество – съответно и от двойката срещуположни стени (BCC_1B_1) и (ADD_1A_1). Така, от всяка двойка срещуположни стени се получават 2 множества, които не могат са получат от друга двойка срещуположни стени, както и 2 множества, всяко от които се получава от още точно една друга двойка срещуположни стени. Следователно общият брой множества е $6 + \frac{1}{2} \cdot 6 = 9$. Всъщност, множествата с исканото свойство са:

$\{AB, A_1B_1, CC_1, DD_1\}$, $\{BC, B_1C_1, DD_1, AA_1\}$, $\{CD, C_1D_1, AA_1, BB_1\}$, $\{DA, D_1A_1, BB_1, CC_1\}$, $\{AB, CD, B_1C_1, A_1D_1\}$, $\{BC, DA, C_1D_1, B_1A_1\}$, $\{AB, CD, A_1B_1, C_1D_1\}$, $\{BC, DA, B_1C_1, D_1A_1\}$, $\{AA_1, BB_1, CC_1, DD_1\}$. Един възможен начин за проверка е следният. В едно множество участват 4 ръба, които се определят от 8 различни върха. От друга страна броят на всички върхове на куба е 8. Следователно във всяко множество трябва да фигурират и осемте върха и то точно по веднъж.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

ТЕМА за 3 и 4 клас
(специални образователни потребности)

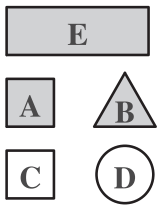
След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Васко решил за изработи табелка **КЕНГУРУ**. Ако е започнал в четвъртък и всеки ден е рисувал по една буква, в кой ден от седмицата е завършил Васко табелката?

A) понеделник **B)** вторник **C)** сряда **D)** четвъртък **E)** петък

2. Симеон се събуди преди час и половина. След три часа и половина той ще се качи на влака, за да отиде при баба си. Колко време преди тръгването на влака се е събудил Симеон?

A) 2 часа **B)** 3 часа и половина **C)** 4 часа **D)** 4 часа и половина **E)** 5 часа



3. Мария описва една от петте показани табелки по следния начин: табелката не е с формата на квадрат; фонът на табелката е затъмнен; табелката е с формата на кръг или на триъгълник. Коя от табелките описва Мария?

A) **A** **B)** **B** **C)** **C** **D)** **D** **E)** **E**

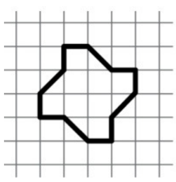
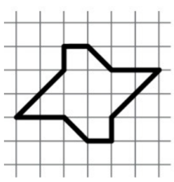
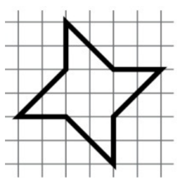
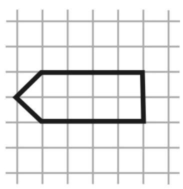
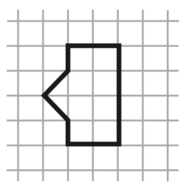
4. Гошко платил 1 лев и 50 стотинки за три шоколадови вафли. Мишо платил 2 лева и 40 стотинки за две кексчета. Колко трябва да плати Иво за една шоколадова вафла и едно кексче?

A) 1 лев и 70 ст. **B)** 1 лев и 90 ст. **C)** 2 лева и 20 ст. **D)** 2 лева и 70 ст. **E)** 3 лева и 90 ст.

5. Един стенен часовник бие на всеки кръгъл час (в 8:00, 9:00, 10:00 и т.н.) толкова пъти, колкото е часът, а на всеки половин час – по веднъж (в 8:30, 9:30, 10:30 и т.н.). Колко пъти бие часовникът от 7:55 до 10:45?

A) 6 пъти **B)** 18 пъти **C)** 27 пъти **D)** 30 пъти **E)** 33 пъти

6. Коя от посочените фигури заема най-голяма площ?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

7. Един продавач на яйца разполага с кутии за 6 яйца и с кутии за 12 яйца. Колко най-малко кутии трябва да използва продавачът, за да подреди 66 яйца?

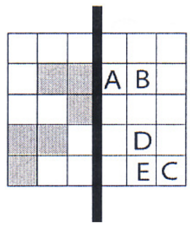
A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 9 **E)** 11

8. Учениците от един квартал притежават поне по един, но най-много по два домашни любимеца. Домашните любимци на всички ученици от квартала са 8 котки, 6 кучета и 3 рибки. Учениците с два любимеца са следните: двама притежават по едно куче и по една рибка, а трима – по една котка и по едно куче. Колко са учениците в този квартал?

A) 11 **B)** 12 **C)** 13 **D)** 14 **E)** 17

9. Росен има в джоба си 13 монети, всяка от които е от 5 или 10 стотинки. Коя от посочените стойности в стотинки не може да бъде получена от всичките монети на Росен?

A) 80 **B)** 60 **C)** 70 **D)** 115 **E)** 125



10. Листът, показан на картинката, се прегъва по плътната тъмна линия. Коя буква не се покрива от затъмнено квадратче при това прегъване?

A) A **B)** B **C)** C **D)** D **E)** E

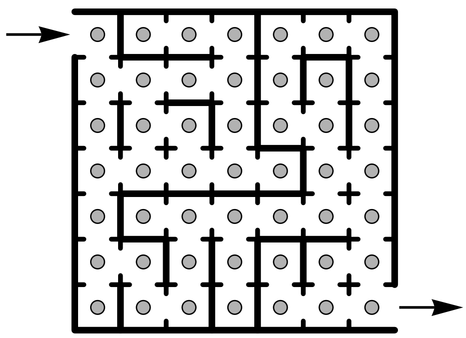
11. Ана, Мария, Вики, Невена, Боряна и Явор хвърляли зарче последователно един след друг. На всеки се паднало различно число. Числото на Ана било два пъти по-голямо от това на Мария. Числото на Ана било три пъти по-голямо от това на Вики. Числото на Невена било четири пъти по-голямо от това на Боряна. Кое число е хвърлил Явор?

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

12. При една игра на думи са в сила следните правила: в началото всеки участник започва играта с 10 точки и трябва да отговори на 10 въпроса; за правилен отговор той получава 1 точка, а за грешен отговор му се отнема 1 точка. В края на играта Ралица събрала 14 точки. Колко правилни отговора е дала тя?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** 7

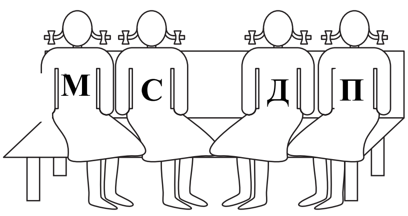
13. На картинката е показан магически лабиринт. Във всяко квадратче на лабиринта има парченце сирене. Мишката Рони влиза в лабиринта и целта й е да излезе с възможно най-много взети парченца сирене. Не се разрешава преминаване два пъти през едно и също квадратче. Колко най-много парченца сирене може да вземе мишката Рони?



A) 17 **B)** 33 **C)** 37 **D)** 41 **E)** 49

14. По време на едно тържество всяка от две еднакви торти е разрязана на четири еднакви части. После всяка от тези части е разрязана на три равни парчета. След като всеки гост на тържеството си взел по едно парче торта, останали три парчета. Колко са били гостите на тържеството?

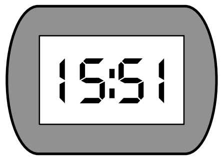
A) 24 **B)** 21 **C)** 18 **D)** 27 **E)** 13



15. Четири приятелки Маша (М), Саша (С), Даша (Д) и Паша (П) седели на една пейка. Първо Маша сменила мястото си с Даша, а после Даша сменила мястото си с Паша, като момичетата се оказали подредени отляво надясно по начина, показан на картинката: Маша, Саша, Даша и Паша. В какъв ред отляво надясно са седели четирите приятелки в началото?

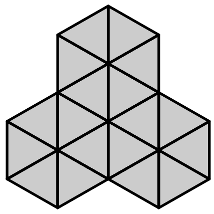
A) Маша, Саша, Даша, Паша **B)** Маша, Даша, Паша, Саша **C)** Даша, Саша, Паша, Маша **D)** Саша, Маша, Даша, Паша **E)** Паша, Маша, Саша, Даша

16. Колко пъти в денонощието се появяват едновременно 2 единици и 2 петици върху циферблата на електронния часовник? На картинката е показана една възможност.

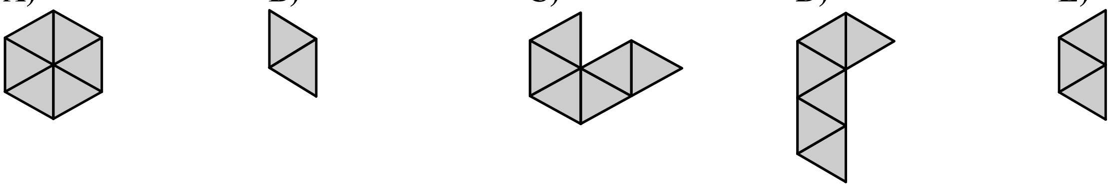


A) 1 **B)** 24 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 12

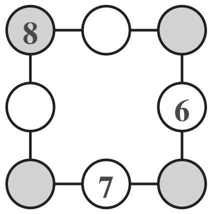
17. Андрея избира една от показаните по-долу 5 фигури и с необходимия брой екземпляри от нея се стреми да конструира фигурата вдясно. С коя от 5-те фигури тя не може да постигне целта си?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

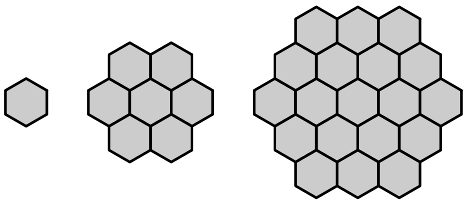


18. Коки поставил цифрите 6, 7 и 8 в три от кръгчетата на картинката. В останалите кръгчета той трябва да постави всяка от цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 така, че сумата на цифрите в кръгчетата върху всяка страна на квадрата да е равна на 13. Намерете сумата на цифрите в затъмнените кръгчета.



A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

19. Силвия съставила три фигури с помощта на шестоъгълници, както е показано на картинката.



Тя продължила да съставя фигури с помощта на шестоъгълници, следвайки същата закономерност. Колко шестоъгълника ще са необходими за петата поред фигура?

A) 37 **B)** 49 **C)** 57 **D)** 61 **E)** 64

20. Котката Маша има 7 котенца: бяло, черно, сиво, черно-бяло, сиво-бяло, сиво-черно и сиво-черно-бяло. По колко различни начина могат да се изберат 4 от котенцата така, че всеки две от тях да имат общ цвят?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

<u>РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 3 и 4 клас (СОП)</u>

1. Отг. C). Думата “КЕНГУРУ” има 7 букви и сряда е седмият ден от четвъртък нататък.

2. Отг. E). час и половина + три часа и половина = 5 часа

3. Отг. B).

4. Отг. A). Една вафла струва 50 ст., а едно кексче струва 1 лв. 20 ст. Вафлата и кексчето струват общо 1 лв. 70 ст.

5. Отг. D). Часовникът бие общо $8+9+10=27$ пъти на кръглите часове от 7:55 до 10:45 и още 3 пъти на половинките. Общо часовникът бие $27+3=30$ пъти.

6. Отг. C). Фигурата от **A)** съдържа 8 цели квадратчета 4 половинки, т.е. общо 10 цели квадратчета. Фигурата от **B)** съдържа 8 цели квадратчета 6 половинки, т.е. общо 11 цели квадратчета. Фигурата от **C)** съдържа 8 цели квадратчета 8 половинки, т.е. общо 12 цели квадратчета. Фигурата от **D)** съдържа 8 цели квадратчета 2 половинки, т.е. общо 9 цели квадратчета. Фигурата от **E)** съдържа 8 цели квадратчета 2 половинки, т.е. общо 9 цели квадратчета. Заключаваме, че фигурата от **C)** заема най-голяма площ.

7. Отг. B). В 5 от по-големите кутии могат да се поставят 60 яйца. Останалите 6 яйца могат да се поставят в 1 от по-малките кутии. Следователно продавачът трябва да използва най-малко $5+1=6$ кутии.

8. Отг. B). Учениците с по два любимеца са 5 и те притежават общо 5 кучета, 3 котки и 2 рибки. С помощта на картинката заключаваме, че останалите ученици притежават общо 5 котки, 1 куче и 1 рибка, т.е. общо 7 любимеца. Тъй като тези ученици притежават по един любимец, техният брой е точно 7. Следователно учениците в този квартал са $5+7=12$.

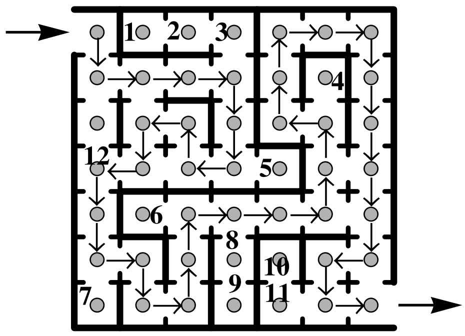
9. Отг. B). Ако заменим монетите от 10 ст. с монети от 5 ст., ще получим най-малко 13 монети от 5 ст. (те са точно 13, когато всички монети в джоба на Росен са от 5 ст.). Но $13.5=65$ ст., което е повече от 60 ст. Останалите стойности могат да се реализират. Така, 80 ст. се получават с 10 монети от 5 ст. и 3 монети от 10 ст., 70 ст. се получават с 12 монети от 5 ст. и 1 монета от 10 ст., 115 ст. се получават с 3 монети от 5 ст. и 10 монети от 10 ст., а 125 ст. се получават от 1 монета от 5 ст. и 12 монети от 10 ст. Във всеки от изброените случаи участващите монети са точно 13.

10. Отг. E).

11. Отг. D). От факта, че числото на Невена е четири пъти по-голямо от това на Боряна, следва, че числото на Невена е 4, а това на Боряна е 1. Тогава от факта, че числото на Ана е три пъти по-голямо от това на Вики, следва единствената възможност, че числото на Ана е 6, а това на Вики е 2. Сега от факта, че числото на Ана е два пъти по-голямо от това на Мария, следва, че числото на Мария е 3. Оставащото число е 5 и следователно то е хвърлено от Явор.

12. Отг. Е). Четирите спечелени точки на Ралица са от 4 правилни отговора. Заключаваме, че останалите 6 отговора са се "неутрализирали", което означава, че 3 от отговорите са били правилни, а другите 3 са били грешни. Следователно общият брой правилни отговори на Ралица е $4+3=7$.

13. Отг. С).



Квадратчетата, означени с числата от 1 до 11 включително, са "задъдени", т.е. при попадане в тях е невъзможно да се продължи по-нататък без да се наруши изискването от условието на задачата. Следователно мишката Рони не може да вземе парченцата сирене от тези 11 квадратчета. Ключово е квадратчето, означено с числото 12. До него може да се стигне по два начина: директно надолу от входното квадратче или от квадратчето, разположено вдясно от него. В първия случай е задължително да се продължи надолу, защото ако се отиде в квадратчето вдясно, то със сигурност трябва да се премине повторно през 12 и се нарушава изискването. Но ако се продължи надолу, то тогава е невъзможно преминаването през 13 квадратчета, включващи тези с номера 1, 2, 3 и 5. Заключаваме, че повече парченца сирене могат да се вземат, ако от входа се тръгне вдясно по посока на стрелките. В този случай е невъзможно да се премине през квадратчето, което се намира непосредствено над квадратчето с номер 12. Получаваме, че със сигурност трябва да се пропуснат най-малко $11+1=12$ парченца сирене. Тъй като всички парченца са $7.7=49$, то най-много биха могли да се съберат $49-12=37$ парченца. На картинката с помощта на стрелки е показан маршрут, при който се събират точно 37 парченца сирене.

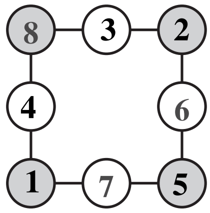
14. Отг. В). От двете торти са получени $2.4=8$ части, а от тези части са получени общо $8.3=24$ равни парчета. След като са останали 3 парчета, то консумираните са $24-3=21$ и следователно гостите на тържеството са били 21.

15. Отг. С). Ще решим задачата отзад напред. Преди последната смяна подреждането е било **МСПД** и след като Даша сменила мястото си с Паша, се е получило крайното подреждане от картинката **МСДП**. Преди първата смяна подреждането е било **ДСПМ** и след като Маша сменила мястото си с Даша, се е получило подлеждането **МСПД**. Следователно първоначалното подреждане е **ДСПМ**.

16. Отг. С). Часовете, в които се появяват едновременно 2 единици и 2 петици, са: 11:55, 15:15 и 15:51, т.е. появяванията са точно 3.

17. Отг. D). Ясно е, че с 3 шестоъгълника от вида **А)** е възможно конструирането на фигурата от условието на задачата. С 3 части от вида **В)** може да се конструира шестоъгълника от **А)**, а следователно и фигурата от условието на задачата. С 2 части от вида **Е)** също може да се конструрира шестоъгълника от **А)**, а следователно и фигурата от условието. С 3 части от вида **С)** може директно да се конструира фигурата от условието на задачата. Единствено с фигурата от **D)** това не може да се направи.

18. Отг. E). $8+2+5+1=16$.



19. Отг. D). В средния слой на фигурите има съответно 1, 3, 5, 7, 9 и т.н. шестоъгълника, т.е. в средния слой на фигурите броят на шестоъгълниците са последователните нечетни числа. Броят на слоевете във всяка фигура е равен на броя на шестоъгълниците в средния слой. Така, в първата фигура има 1 слой, във втората фигура има 3 слоя, в третата фигура има 5 слоя, след това 7 слоя, 9 слоя и т.н. За всяка фигура броят на шестоъгълниците в слоевете над средния и в слоевете под средния намалява с 1 в сравнение с предния слой в посока нагоре и в посока надолу. От така забелязаната закономерност следва, че за петата поред фигура има 9 шестоъгълника в средния слой и броят на слоевете е 9. В два от слоевете (тези, непосредствено над и под средния) има по 8 шестоъгълника, в следващите два (в посока нагоре и посока надолу) има по 7 шестоъгълника, в следващите два има по 6 шестоъгълника и в последните два слоя (слоевете стават точно 9) има по 5 шестоъгълника. Общият брой шестоъгълници е $9+16+14+12+10=61$.

20. Отг. C). Единият начин е да се изберат четирите шарени котенца (т.е. всички без едноцветните). Още три начина се получават, като всяко едно от трите едноцветни котенца се избере заедно с двете двуцветни, имащи същия цвят, и трицветното котенце (например: бяло, черно-бяло, сиво-бяло и сиво-черно-бяло). Всяка друга комбинация от 4 котенца ще съдържа поне 2 едноцветни и следователно няма да отговаря на условието на задачата. Следователно търсеният брой е 4.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

ТЕМА за 5 и 6 клас
(специални образователни потребности)

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

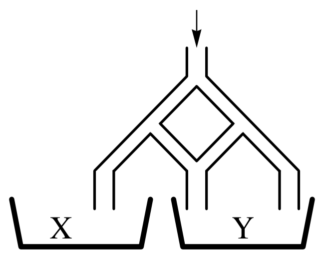
1. Моторист изминава 28 *км* за 30 минути. Намерете скоростта на моториста в *км*/*ч*.
A) 28 **B)** 36 **C)** 56 **D)** 58 **E)** 62

2. Васил изработил табелка **ЕВРОПЕЙСКО КЕНГУРУ**. Ако е започнал в сряда и всеки ден е рисувал по една буква, в кой ден от седмицата е завършил Васил табелката?
A) сряда **B)** четвъртък **C)** петък **D)** събота **E)** неделя

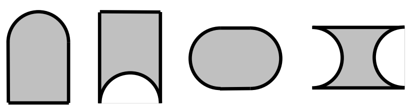
3. Квадратен лист хартия е срязан на две части, като разрезът е по права линия. Коя от посочените фигури не може да се получи в резултат на срязването?
A) квадрат **B)** правоъгълник **C)** правоъгълен триъгълник **D)** петоъгълник **E)** равнобедрен триъгълник

4. Жителите на Лудоград не използват числа, съдържащи цифрата 3. Къщите от дясната страна на една улица в този град са с нечетни номера. Ако първата къща е с номер 1, кой е номерът на петнадесетата къща?
A) 29 **B)** 41 **C)** 43 **D)** 45 **E)** 47

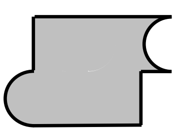
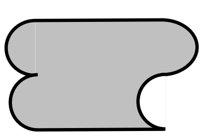
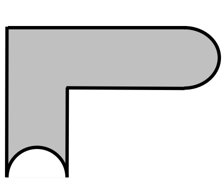
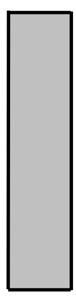
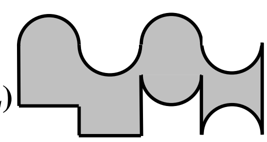
5. В горната тръба от чертежа изсипали 1000 литра вода. Ако на всяко разклонение количеството вода се разделя на две равни части, колко литра вода са се влели в съд Y?
A) 800 **B)** 750 **C)** 666,67 **D)** 660 **E)** 500



6. В датата **01.03.05** (1 март 2005 година) участват в нарастващ ред три нечетни числа, показващи съответно деня, месеца и годината, като трите числа се различават с едно и също число. Намерете колко такива дати от вида **дд.мм.гг** има през 21-ви век.
A) 5 **B)** 6 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

7. Дадени са четири части от пъзел:  .

Коя от посочените фигури не може да бъде наредена, като се използват всички дадени части?

A)  **B)**  **C)**  **D)**  **E)** 

8. През деня, в който не лови мишки, котката Лиза изпива 60 *мл* мляко. През деня, в който лови мишки, тя изпива с $\frac{1}{3}$ пъти повече мляко. Последните две седмици котката Лиза хващала мишки през ден. Колко милилитра мляко е изпила Лиза през тези две седмици?

A) 840 **B)** 980 **C)** 1050 **D)** 1120 **E)** 1960

9. Андрей записал една след друга буквите на думата **KANGAROO** в клетките на правоъгълна таблица с размери 2×4, като спазил следните правила:

1) Първата буква **K** може да се запише в произволна клетка на таблицата.

2) Всяка следваща буква трябва да се запише в клетка, която има поне една обща точка с клетката, използвана за предишната буква.

Коя от дадените таблици не е възможно да е била попълнена от Андрей?

A)

N	G
A	A
K	R
O	O

B)

K	A
N	O
O	G
R	A

C)

O	O
K	R
A	A
G	N

D)

K	A
N	G
O	O
R	A

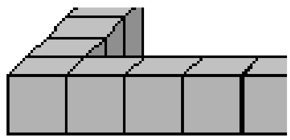
E)

K	O
A	O
R	N
A	G

10. В нарастващ ред са записани всички четирицифрени числа, образувани с помощта на цифрите 0, 1, 1, и 2. Намерете разликата на двете числа, между които е записано числото 2011.

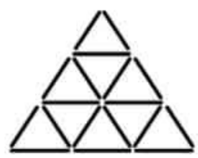
A) 890 **B)** 891 **C)** 900 **D)** 909 **E)** 990

11. Нина подредила ограда около квадратен участък, като използвала 36 еднакви кубчета (част от оградата е показана на чертежа). Още колко кубчета са необходими, за да се запълни квадратният участък?



A) 36 **B)** 49 **C)** 64 **D)** 81 **E)** 100

12. Фигурата на чертежа е получена с помощта на 18 еднакви клечки и съдържа общо 13 триъгълника. Колко триъгълника най-много могат да се "развалят" с премахването само на една клечка?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

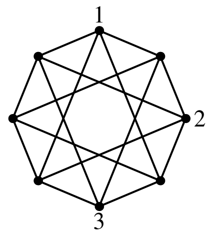
13. Като умножавал дадено число с 301, Павел забравил нулата и умножил числото с 31. Той получил резултат 372. Какъв резултат е трябвало да получи Павел?

A) 3010 **B)** 3612 **C)** 3702 **D)** 3720 **E)** 30 720

14. $3030,303:1,5=?$

A) 2020,202 **B)** 20202,02 **C)** 220,22 **D)** 22,22 **E)** 22,022

15. Дадени са осем точки, които са съединени с отсечки, както е показано на чертежа. Във всяка точка трябва да се запише някое от числата 1, 2, 3 или 4 така, че в краищата на всяка от построените отсечки да стоят различни числа. Три от числата са вече записани. Колко общо ще бъдат четворките?



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** 5

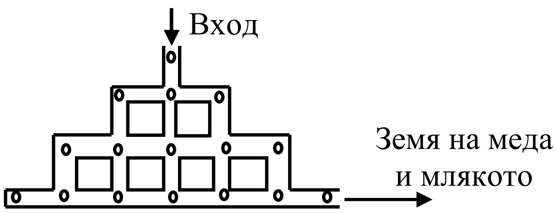
16. В три поредни срещи футболният отбор на "Барселона" отбелязал три гола и получил един гол. Една от срещите била спечелена, другата – загубена, а третата завършила наравно. Какъв е резултатът в спечелената от отбора на "Барселона" среща?

A) $2:0$ **B)** $3:0$ **C)** $1:0$ **D)** $2:1$ **E)** $0:1$

17. Пипи поканила 10 свои приятели на гости. Тя отворила бонбониера с 80 желирани бонбона. Пипи почерпила всяко от присъстващите момичета, включително Краси и Снежка, с един и същ брой бонбони. Колко момчета са били на гости на Пипи, ако е известно, че те не са искали бонбони и в бонбониерата са останали 3 бонбона?

A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 7

18. За да стигне до легендарната Земя на меда и млякото, Хамстерът Сивко трябвало да мине през система от тунели. В тунелите били разпръснати 16 тиквени семки, изобразени с нулички. Колко семки най-много може да събере Хамстерът Сивко, ако не е разрешено повторно преминаване през местата, където са разположени?



A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

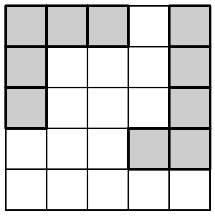
19. Котката Маша има 7 котенца: бяло, черно, сиво, черно-бяло, сиво-бяло, сиво-черно и сиво-черно-бяло. По колко различни начина могат да се изберат 4 от котенцата така, че всеки две от тях да имат общ цвят?

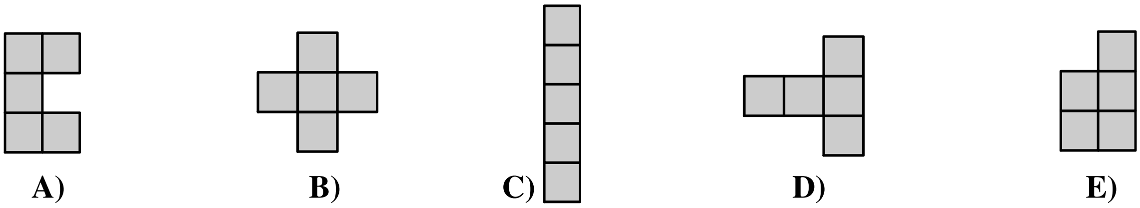
A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 7

20. Алекс казал, че Иван е лъжец. Иван казал, че Боби е лъжец. Боби казал, че Иван е лъжец. Тони казал, че Алекс е лъжец. Колко от момчетата са лъжци?

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** 4

21. Квадратна дъска 5×5 е разделена на 25 единични квадратчета. Фигура, съставена от 5 единични квадратчета, се нарича *пентанимо*. Върху дъската са разположени две пентанима, както е показано. Разполагането е *правилно*, т.е. всяко от квадратчетата на двете пентанима покрива точно едно от квадратчетата на дъската. Кое от пентанимата по-долу (евентуално след завъртане) може да се разположи правилно върху непокритите 15 квадратчета на дъската така, че нито едно от останалите четири пентанима да не може да се разположи правилно върху оставащите непокрити 10 квадратчета на дъската?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

22. Колко пресечни точки най-много могат да имат 4 прави в равнината?

A) 1 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

23. Един месец има 5 съботи и 5 недели, но само 4 понеделника и 4 петъка. Следващият месец има:

A) 5 среди **B)** 5 четвъртъка **C)** 5 петъка **D)** 5 съботи **E)** 5 недели

24. За числата a, b, c и d е изпълнено $0 < a < b < c < d$. Увеличете едно от тези числа с 1 така, че произведението му с останалите три да е възможно най-малко. Кое число трябва да увеличите?

A) a **B)** b **C)** c **D)** d **E)** друг отговор

25. Намерете броя на всички петцифрени числа, кратни на 5, образувани с помощта само на цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 без повторение със следните свойства: числото, образувано от първите две цифри на петцифреното число, се дели на 2; числото, образувано от първите три цифри на петцифреното число, се дели на 3; числото, образувано от първите четири цифри на петцифреното число, се дели на 4.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 5 **E)** 10

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 5 и 6 клас (СОП)

1. Отг. C). Тъй като 1 *ч* = 30 *мин* + 30 *мин*, то за 1 час мотористът ще измине два пъти повече километри, т.е. 56. Следователно скоростта на моториста е 56 *км/ч*.

2. Отг. C).

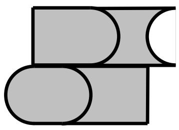
3. Отг. A).

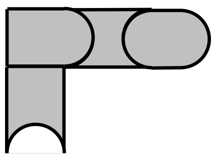
4. Отг. E). Не може да се използват нечетните числа 3, 13, 23, 31, 33, 35, 37, 39 и 43.

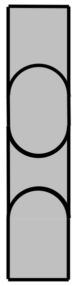
5. Отг. B). На първото разклонение водата се разделя на две части от по 500 литра. От второто разклонение вляво в съд Y ще се влеят 250 литра вода, а от второто разклонение вдясно в съд Y ще се влеят от две места по 250 литра вода, т. е. още 500 литра. В съд Y ще се влеят общо $250+500=750$ литра.

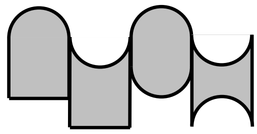
6. Отг. D). Датите с исканато свойство са: 01.03.05, 01.05.09, 01.07.13, 01.09.17, 01.11.21, 03.05.07, 03.07.11, 03.09.15, 03.11.19, 05.07.09, 05.09.13, 05.11.17, 07.09.11, 07.11.15, 09.11.13. Техният брой е 15.

7. Отг. B). Останалите фигури могат да се получат по показаните начини.

A) 

C) 

D) 

E) 

8. Отг. B). 7 дни котката Лиза е пила по 60 *мл* мляко, т.е. тя е изпила общо $60.7=420\,мл$, а 7 дни котката Лиза е пила по $60+\frac{1}{3}\cdot 60=80\,мл$, т.е. тя е изпила общо $80.7=560\,мл$. Тогава за двете седмици котката Лиза е изпила $420+560=980\,мл$ мляко.

9. Отг. D). В думата **KANGAROO** една от буквите **A** е съседна на **K**, а другата е съседна на **G**. От друга страна, в таблицата **D)** клетката с буквата **A** от долния ред няма обща точка нито с клетката с буквата **K**, нито с клетката с буквата **G**.

10. Отг. B). Числото, стоящо непосредствено преди 2011, е 1210, а следващото число е 2101. Разликата е $2101-1210=891$.

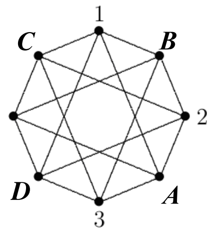
11. Отг. C). Нека страната на квадрата съдържа x единични кубчета. Тогава оградата ще съдържа $2x+2(x+2)=4x+4$ единични кубчета. От равенството $4x+4=36$ намираме $x=8$. Следователно за попълването на квадрата са необходими $8.8=64$ единични кубчета.

12. Отг. D). Триъгълниците на чертежа са три вида: 9 триъгълника със страна една клечка, 3 триъгълника със страна две клечки и 1 триъгълник (големият) със страна три клечки. Ясно е, че с една клечка могат да се "развалят" най-много 2 триъгълника от един и същ вид. Оттук следва (тъй като триъгълниците са три вида), че най-много биха могли да се "развалят" общо 5 триъгълника: 2 от първия вид, 2 от втория и 1 от третия. Но от чертежа се вижда, че коя да е обща клечка за 2 триъгълника от първия вид не е обща за никои 2 триъгълника от втория вид. Следователно максималният брой триъгълници, които биха могли да се "развалят", е 4. Реализацията на 4 е следната: ако се премахне средната клечка от коя да е страна на големия триъгълник, се "развалят" 1 триъгълник от първия вид, 2 триъгълника от втория вид и 1 триъгълник (големият) от третия вид, т.е. общо 4 триъгълника.

13. Отг. B). $372:31=12$ и следователно даденото число е 12. Тогава $12.301=3612$.

14. Отг. A).

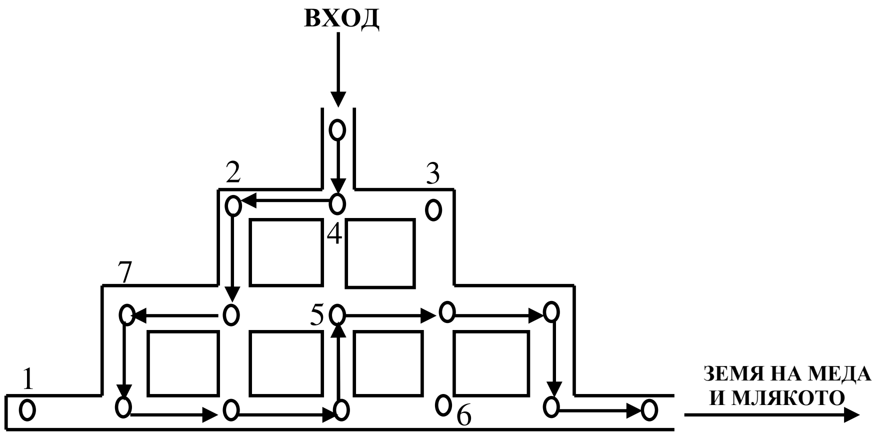
15. Отг. D). На чертежа всяка от точките ***A***, ***B***, ***C*** и ***D*** е общ край на три отсечки, във вторите краища на които са записани числата 1, 2 и 3. Следователно единствената възможност е във всяка от тези точки да се запише числото 4. Ясно е, че в оставащата осма точка може да се запише кое да е от числата 1, 2 и 3, но не може да се запише 4. Получаваме, че общият брой на четворките е 4.



16. Отг. B). Ясно е, че единственият гол, получен от "Барселона" в собствената врата, е в загубената среща (няма как да загубиш един мач, ако не получиш гол). Тогава единствената възможност за резултата в загубената среща е $0:1$. В равния мач не са отбелязани голове, защото в противен случай броят на получените голове от "Барселона" в собствената врата би бил повече от 1. Следователно резултатът от равния мач е $0:0$. За резултата от спечелената среща остава единствената възможност да е $3:0$.

17. Отг. C). $80-3=77$ бонбона е раздала Пипи. Но единственият делител на 77, по-голям от 1 и по-малък от 10, е 7. Следователно момичетата са били 7, а момчетата са били $10-7=3$.

18. Отг. B).



При показания маршрут остават 3 несъбрани семки от всичките 16. Несъбрани са крайната долна лява (№ 1), крайната горна дясна (№ 3), както и една междинна (№ 6) от най-долния ред (както е в примера) или една междинна (№ 5) от междинния ред, ако Хамстерът Сивко се беше изкачил към междинния ред от една семка по-нататък (от № 6). Съществуват и други маршрути със събиране на 13 семки, например без събиране на крайната горна лява (№ 2) и крайната горна дясна (№ 3). Ясно е, че семка № 1 изобщо не може да бъде събрана съгласно правилата от условието на задачата. Възможните маршрути могат да се разделят на две групи. В първата група влизат онези, при които семките с номера 2 и 3 не се събират, а във втората – онези, в които само една от семките с номера 2 и 3 се събира (ясно е, че не съществува маршрут, при който е възможно събирането едновременно на семките с номера 2 и 3). В първата група влиза един единствен маршрут: от № 4 към № 5, след това задължително наляво до № 7, слизане на долния ред, движение надясно до № 6, качване на междиния ред, движение надясно, после надолу и веднага надясно към изхода. При втората група съществуват две възможности за движение нататък от семката с № 4: наляво към № 2 или надясно към № 3. По-горе бяха описани маршрутите с преминаване през № 2. Маршрутът през № 3 е аналогичен. Във всичките случаи поне 3 от семките остават несъбрани.

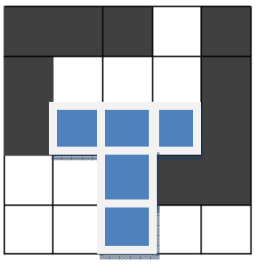
19. Отг. C). Единият начин е да се изберат четирите шарени котенца (т.е. всички без едноцветните). Още три начина се получават, като всяко едно от трите едноцветни котенца се избере заедно с двете двуцветни, имащи същия цвят, и трицветното котенце (например: бяло, черно-бяло, сиво-бяло и сиво-черно-бяло). Всяка друга комбинация от 4 котенца ще съдържа поне 2 едноцветни и следователно няма да отговаря на условието на задачата. Следователно търсеният брой е 4.

20. Отг. C). Тъй като Боби казал, че Иван е лъжец, а Иван казал, че Боби е лъжец, то един от двамата е лъжец, а другият казва истината.

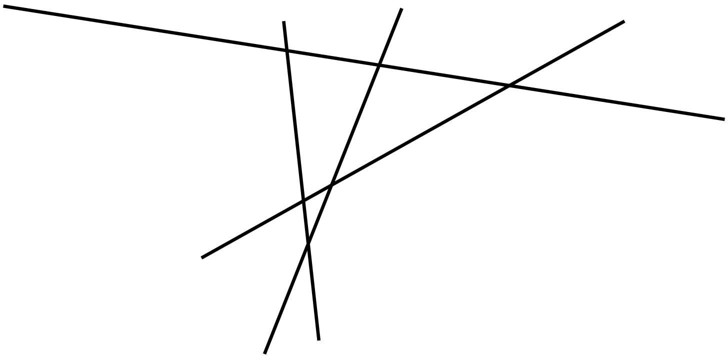
<u>Случай</u> 1. Нека Боби е лъжец, а Иван казва истината. Тъй като Алекс казал, че Иван е лъжец, то тогава Алекс е лъжец и Тони казва истината. Получаваме, че две от момчетата са лъжци.

<u>Случай</u> 2. Нека Иван е лъжец, а Боби казва истината. Тъй като Алекс казал, че Иван е лъжец, то тогава Алекс казва истината, а Тони е лъжец. Отново точно две от момчетата са лъжци.

21. Отг. D).



22. Отг. E). Две прави могат да имат само една пресечна точка. Следователно четири прави могат да имат най-много $\frac{4.3}{2}=6$ пресечни точки. Ето реализация на 6 пресечни точки:



23. Отг. A). За да е изпълнено условието на задачата, месецът трябва да започва в събота и да завършва в неделя. Броят на дните на такъв месец е 4.7 + 2 (петата събота и неделя) = 30 дни. Тогава следващият месец ще започва в понеделник и ще е с 31 дни. Тъй като 4.7 = 28, то 28-ият ден ще бъде неделя, а последните три – понеделник, вторник и сряда. Следователно следващият месец ще има 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди.

24. Отг. D). Ако увеличим a с 1, то $(a+1)bcd = abcd + bcd$. Ако увеличим b с 1, то $a(b+1)cd = abcd + acd$. Ако увеличим c с 1, то $ab(c+1)d = abcd + abd$. Ако увеличим d с 1, то $abc(d+1) = abcd + abc$. В четирите случая към произведението $abcd$ се прибавят произведенията на дадените числа по тройки. От тези произведения по тройки най-малкото е abc. Следователно най-малко произведение ще се получи, когато увеличим числото d с единица.

25. Отг. А). Последната цифра трябва да е 5, за да бъде числото кратно на 5. От признака за делимост на 4 следва, че четирицифреното число, образувано от цифрите 1, 2, 3 и 4, трябва да завършва на 12, на 24 или на 32. Ако петцифреното число завършва на 25, първите три цифри имат сбор, който не е кратен на 3. Следавателно този случай е невъзможен. Ако петцифреното число завършва на 245, за втората позиця не остава четна цифра. Окончателно заключаваме, че не съществува петцифрено число с исканите свойства.

Международно състезание “Европейско Кенгуру”

19 март 2011 г.

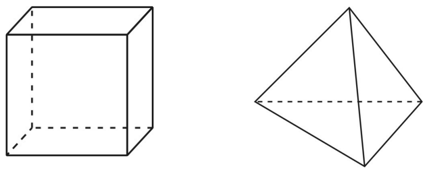
ТЕМА за 7 и 8 клас
(специални образователни потребности)

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Кой от изразите има най-голяма стойност?

A) 2011^1 **B)** 1^{2011} **C)** 1.2011 **D)** $1+2011$ **E)** $1:2011$

2. Роси си играе с кубчета и правилни триъгълни пирамиди. Ако кубчетата са 5, а пирамидите са 3, то общият брой на стените е:



A) 42 **B)** 48 **C)** 50 **D)** 52 **E)** 56

3. Пешеходна пътека тип зебра се състои от бели и черни ивици, които се редуват, като белите ивици са 8 на брой. Ако пътеката започва и завършва с бяла ивица, а широчината на всяка ивица е 50 *cm*, то дължината на пътеката е:

A) $7\,m$ **B)** $7,5\,m$ **C)** $8\,m$ **D)** $8,5\,m$ **E)** $9\,m$

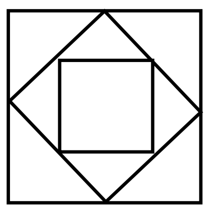
4. Калкулаторът ми е развален: дели вместо да умножава и изважда вместо да събира. Стойността на израза $(12.3)+(4.2)$ според моя калкулатор е:

A) 2 **B)** 6 **C)** 12 **D)** 28 **E)** 38

5. Цифровият ми часовник току-що престана да показва $20:11$. След колко минути е следващото показание на часовника, което се записва със същите цифри 0, 1, 1 и 2 в някакъв ред?

A) 40 **B)** 49 **C)** 50 **D)** 51 **E)** 60

6. На фигурата са показани три квадрата. Върховете на средния квадрат са среди на страните на големия квадрат, а върховете на малкия квадрат са среди на страните на средния квадрат. Ако лицето на малкия квадрат е $6\,cm^2$, разликата на лицата на другите два квадрата е:



A) $6\,cm^2$ **B)** $9\,cm^2$ **C)** $12\,cm^2$ **D)** $15\,cm^2$ **E)** $18\,cm^2$

7. Улицата, на която живея, има 17 къщи. Аз живея в последната къща от страната на четните номера и номерът на къщата ми е 12. Братовчед ми живее в последната къща от страната на нечетните номера. Номерът на неговата къща е:

A) 5 **B)** 7 **C)** 13 **D)** 17 **E)** 21

8. Котаракът Филип уловил 12 риби за 3 дни. Всеки ден броят на уловените риби бил по-голям, отколкото през предния ден. През третия ден Котаракът Филип уловил по-малко риби, отколкото през предните два дни общо. Колко риби е уловил Котаракът Филип през третия ден?

A) 5 **B)** 6 **C)** 7 **D)** 8 **E)** 9

9. Измежду всички трицифрени числа, сумата от цифрите на които е 8, са избрани най-голямото и най-малкото. Намерете сумата на двете избрани числа.

A) 707 **B)** 907 **C)** 916 **D)** 1000 **E)** 1001

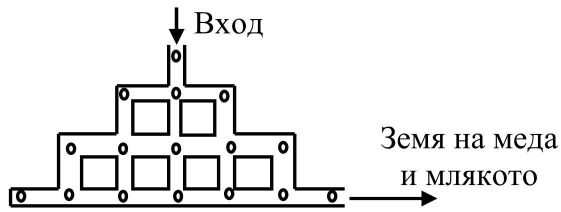
10. $\dfrac{2011.2,011}{201,1.20,11} = ?$

A) 0,01 **B)** 0,1 **C)** 1 **D)** 10 **E)** 100

11. Мария притежава 9 перли, които тежат: $1г$, $2г$, $3г$, $4г$, $5г$, $6г$, $7г$, $8г$ и $9г$. От тях тя направила 4 пръстена с по две перли всеки и съответни тегла: $17г$, $13г$, $7г$ и $5г$. Намерете теглото в грамове на неизползваната перла.

A) $1г$ **B)** $2г$ **C)** $3г$ **D)** $5г$ **E)** $6г$

12. За да стигне до легендарната Земя на меда и млякото, Хамстерът Сивко трябвало да мине през система от тунели. В тунелите били разпръснати 16 тиквени семки, изобразени с нулички. Колко семки най-много може да събере Хамстерът Сивко, ако не е разрешено повторно преминаване през местата, където са разположени семките?

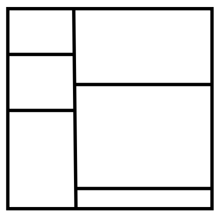


A) 12 **B)** 13 **C)** 14 **D)** 15 **E)** 16

13. Дадени са осем числа: 17, 13, 5, 10, 14, 9, 12 и 16. Кои две от тях могат да се отстранят така, че средното аритметично на останалите шест числа да остане същото както средното аритметично на дадените осем?

A) 12 и 17 **B)** 5 и 17 **C)** 9 и 16 **D)** 10 и 12 **E)** 10 и 14

14. Квадратен лист хартия е разрязан на шест правоъгълни части, както е показано. Сборът от периметрите на тези шест части е 120 cm. Намерете лицето на квадратния лист хартия.



A) $48\,cm^2$ **B)** $64\,cm^2$ **C)** $110,25\,cm^2$ **D)** $144\,cm^2$ **E)** $225\,cm^2$

15. В три поредни срещи футболният отбор на "Барселона" отбелязал три гола и получил един гол. Една от срещите била спечелена, другата – загубена, а третата завършила наравно. Какъв е резултатът в спечелената от отбора на "Барселона" среща?

A) $2:0$ **B)** $3:0$ **C)** $1:0$ **D)** $2:1$ **E)** $0:1$

16. Лали начертала в тетрадката си отсечката $AB = 2\,cm$. Колко различни точки C е възможно да отбележи Лали в тетрадката си така, че ΔABC да е правоъгълен и да е с лице $1\,cm^2$?

A) 2 **B)** 4 **C)** 6 **D)** 8 **E)** 10

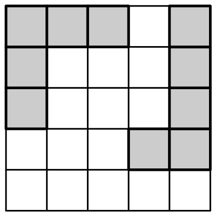
17. Положителното число a е по-малко от 1, а числото b е по-голямо от 1. Кое от следващите числа е с най-голяма стойност?

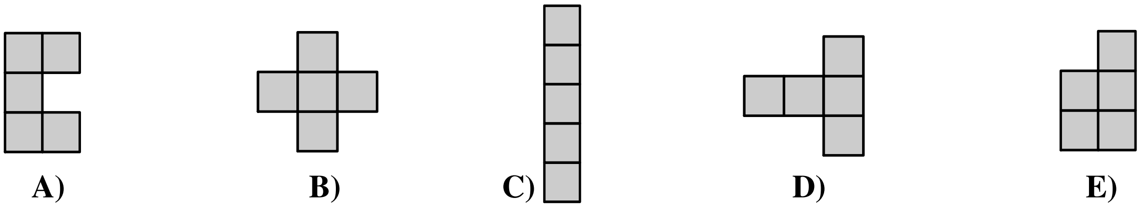
A) $a.b$ **B)** $a+b$ **C)** $a:b$ **D)** b **E)** не е възможно да се определи

18. Петцифреното число $\overline{24X8Y}$ е кратно на 4, 5 и 9. Намерете сбора на цифрите X и Y.

A) 13 **B)** 10 **C)** 9 **D)** 5 **E)** 4

19. Квадратна дъска 5×5 е разделена на 25 единични квадратчета. Фигура, съставена от 5 единични квадратчета, се нарича *пентанимо*. Върху дъската са разположени две пентанима, както е показано. Разполагането е *правилно*, т.е. всяко от квадратчетата на двете пентанима покрива точно едно от квадратчетата на дъската. Кое от пентанимата по-долу (евентуално след завъртане) може да се разположи правилно върху непокритите 15 квадратчета на дъската така, че нито едно от останалите четири пентанима да не може да се разположи правилно върху оставащите непокрити 10 квадратчета на дъската?





A) **B)** **C)** **D)** **E)**

20. Всяко от трите врабчета Сивко, Черко и Белко се намирало в своето гнездо. Сивко казал: “Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Черко, отколкото от Белко.” Черко казал: “Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Белко, отколкото от Сивко.” Белко казал: “Аз съм на повече от два пъти по-голямо разстояние от Черко, отколкото от Сивко.” Като се знае, че две от трите врабчета казват истината, кое от тях е лъжецът?

A) Сивко **B)** Черко **C)** Белко **D)** никои от тях **E)** не може да се определи

21. Митко стрелял няколко пъти по мишената, като улучвал само петицата, осмицата и десятката. При всяко попадение той получавал съответно 5, 8 и 10 точки. Митко успял да събере общо 99 точки, като само 25% от изстрелите му били погрешни. Колко изстрела общо е произвел Митко, ако броят на попаденията в осмицата и десятката бил един и същ?

A) 10 **B)** 12 **C)** 16 **D)** 20 **E)** 24

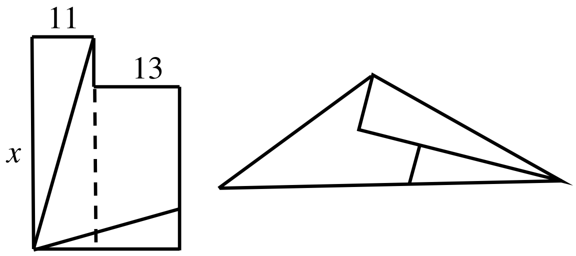
22. За изпъкналия четириъгълник $ABCD$ е дадено, че $AB = AC$, $\angle BAD = 80°$, $\angle ABC = 75°$ и $\angle ADC = 65°$. Да се намери мярката на $\angle BDC$.

A) 10° **B)** 15° **C)** 20° **D)** 30° **E)** 45°

23. Годините на Еми и Стефан са числа, които се записват най-много с по две цифри. Преди 7 години Еми е била на години, които са кратни на 8, а след 8 години тя ще бъде на години, които са кратни на 7. Годините на Стефан преди 8 години са били кратни на 7, а след 7 години Стефан ще бъде на години, които са кратни на 8. Посочете вярното твърдение.

A) Стефан е с 2 години по-възрастен от Еми **B)** Стефан е с 1 година по-възрастен от Еми
C) Стефан и Еми са на една и съща възраст **D)** Стефан е с 1 година по-млад от Еми
E) Стефан е с 2 години по-млад от Еми

24. Дадени са два правоъгълника съответно с широчини 11 и 13, които са залепени по пунктираната линия. Получената фигура е разрязана на три части, както е показано, и с тези части е образуван триъгълник. Да се намери дължината x на левия правоъгълник.



A) 36 **B)** 37 **C)** 38 **D)** 39 **E)** 40

25. Намерете броя на наредените двойки естествени числа $(x; y)$, които удовлетворяват уравнението $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 7 и 8 клас (СОП)

1. Отг. D). $1+2011>2011=1.2011=2011^1>1=1^{2011}>\frac{1}{2011}$.

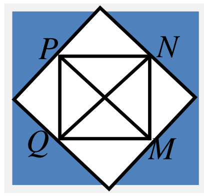
2. Отг. A). 5 кубчета×6 стени = 30 стени и 3 пирамиди × 4 стени = 12 стени или общо $30+12=42$ стени.

3. Отг. B). Щом белите ивици са 8 и пътеката започва и завършва с бяла ивица, то черните ивици са 7. Следователно ивиците са общо $8+7=15$ и тъй като всяка от тях е с широчина $50\ cm=0{,}5\ m$, дължината на пътеката е $15.0{,}5=7{,}5\ m$.

4. Отг. A). $(12:3)-(4:2)=4-2=2$.

5. Отг. C). Първото възможно показание с цифрите 0, 1, 1 и 2 е $21:01$. От момента, в който часовникът престава да показва $20:11$, до появата на $21:01$ изминават точно 50 минути.

6. Отг. C). Да означим малкия квадрат с $MNPQ$. Страните и диагоналите на $MNPQ$ разделят средния квадрат на 8 равнобедрени правоъгълни триъгълника, които са еднакви. Оттук следва, че лицето на средния по големина квадрат е два пъти по-голямо от лицето на малкия квадрат, т. е. то е равно на $12\,cm^2$. Аналогично лицето на големия квадрат е два пъти по-голямо от лицето на средния, откъдето следва че лицето на големия квадрат е $24\ cm^2$. Следователно търсената разлика е $24-12=12\ \mathrm{cm}^2$.



7. Отг. E). Щом последната къща от страната на четните номера е № 12, то на улицата от страната на четните номера има общо $12:2=6$ къщи. Следователно броят на къщите с нечетни номера е $17-6=11$. Единадесетият поред нечетен номер е 21. Заключаваме, че последната къща от страната на нечетните номера е № 21.

8. Отг. A). Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 6 риби (половината от всичките) или повече от 6, то за първите два дни той щеше да е уловил 6 риби или по-малко от 6. Това противоречи на условието, че през третия ден той е уловил по-малко риби отколкото през първите два дни. Ако допуснем, че през третия ден Котаракът Филип е уловил 4 риби или по-малко от 4, то от една страна през всеки от първите два дни той щеше да е уловил по-малко от 4 риби или общо за двата дни – по-малко от 8. От друга страна, след като всички риби са 12, през първите два дни уловените риби щяха да са 8 или повече. Отново се получава противоречие. Остава единствената възможност през третия ден Котаракът Филип да е уловил 5 риби. Сега с аналогични разсъждения установяваме, че през първия ден Котаракът Филип е уловил 3 риби, а през втория ден – съответно 4 риби.

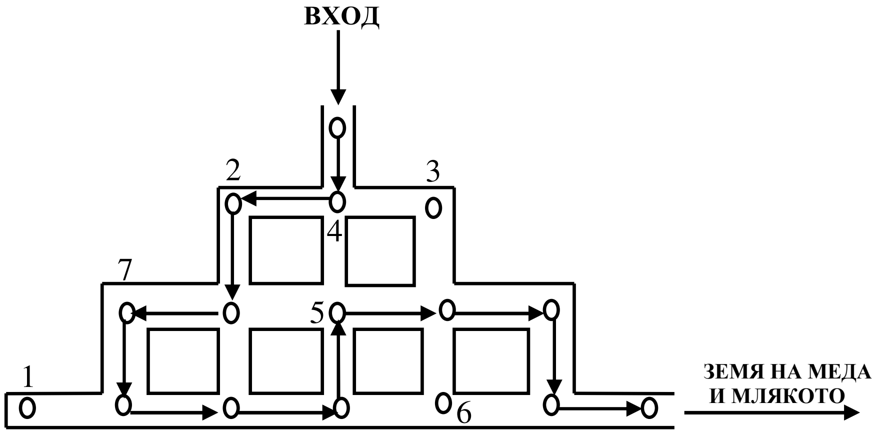
9. Отг. B). Най-голямото трицифрено число със сума на цифрите 8 е 800, а най-малкото трицифрено число със сума на цифрите е 8 е 107. Търсената сума е $800+107=907$.

10. Отг. C). Умножаваме числителя и знаменателя с 1000:

$$\frac{2011.2{,}011}{201{,}1.20{,}11}=\frac{2011.2{,}011.1000}{201{,}1.10.20{,}11.100}=\frac{2011.2011}{2011.2011}=1.$$

11. Отг. C). $1+2+3+4+5+6+7+8+9=(1+9)+(2+8)+(3+7)+(4+6)+5=4.10+5=45$. От друга страна $(17+13)+(7+5)=42$ и следователно $45-42=3\,г$.

12. Отг. В).

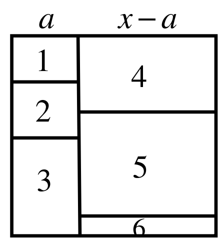


При показания маршрут остават 3 несъбрани семки от всичките 16. Несъбрани са крайната долна лява (№ 1), крайната горна дясна (№ 3), както и една междинна (№ 6) от най-долния ред (както е в примера) или една междинна (№ 5) от междинния ред, ако Хамстерът Сивко се беше изкачил към междинния ред от една семка по-нататък (от № 6). Съществуват и други маршрути със събиране на 13 семки, например без събиране на крайната горна лява (№ 2) и крайната горна дясна (№ 3). Ясно е, че семка № 1 изобщо не може да бъде събрана съгласно правилата от условието на задачата. Възможните маршрути могат да се разделят на две групи. В първата група влизат онези, при които семките с номера 2 и 3 не се събират, а във втората – онези, в които само една от семките с номера 2 и 3 се събира (ясно е, че не съществува маршрут, при който е възможно събирането едновременно на семките с номера 2 и 3). В първата група влиза един единствен маршрут: от № 4 към № 5, след това задължително наляво до № 7, слизане на долния ред, движение надясно до № 6, качване на междиния ред, движение надясно, после надолу и веднага надясно към изхода. При втората група съществуват две възможности за движение нататък от семката с № 4: наляво към № 2 или надясно към № 3. По-горе бяха описани маршрутите с преминаване през № 2. Маршрутът през № 3 е аналогичен. Във всичките случаи поне 3 от семките остават несъбрани.

13. Отг. Е). Средното аритметично на дадените числа е:

$$\frac{17+13+5+10+14+9+12+16}{8}=\frac{96}{8}=12\,.$$

Сумата на дадените осем числа е равна на 8.12, т.е. на произведението на броя на числата и тяхното средно аритметично. Сумата на шест от тези осем числа трябва да е равна на произведението 6.12, след като искаме средното им аритметично да остане същото. Следователно сумата на двете числа, които трябва да се отстранят, е равна на $8.12-6.12=2.12=24$. От дадените числа само двойката 10 и 14 има сума 24.

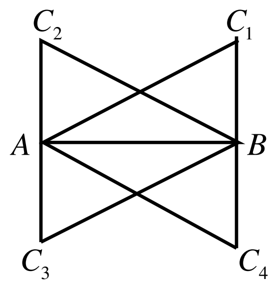


14. Отг. D). В сумата от периметрите на шестте части вертикалната страна на квадрата се повтаря 4 пъти, докато хоризонталната се повтаря 6 пъти. Следователно страната на квадрата се повтаря общо 10 пъти, откъдето заключаваме, че дължината й е $120:10=12\,cm$. Тогава лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

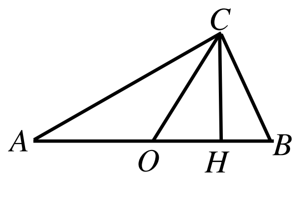
Задачата може да се реши и аналитично. Нека дължината на страната на квадрата е $x\,cm$. Означаваме шестте части с числата от 1 до 6, както е показано. Ако a е дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 1, 2 и 3, то дължината в сантиметри на всяка от хоризонталните страни на правоъгълниците 4, 5 и 6 е $x-a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 1, 2 и 3 е равна на

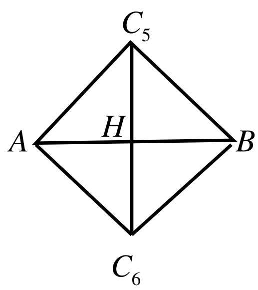
$2x+3.2a=2x+6a$. Сумата от периметрите на правоъгълниците 4, 5 и 6 е равна на $2x+3.2(x-a)=2x+6x-6a=8x-6a$. Оттук $120=2x+6a+8x-6a=10x$ и следователно $x=120:10=12\,cm$. Лицето на квадрата е $12.12=144\,cm^2$.

15. Отг. В). Ясно е, че единственият гол, получен от "Барселона" в собствената врата, е в загубената среща (няма как да загубиш един мач, ако не получиш гол). Тогава единствената възможност за резултата в загубената среща е $0:1$. В равния мач не са отбелязани голове, защото в противен случай броят на получените голове от "Барселона" в собствената врата би бил повече от 1. Следователно резултатът от равния мач е $0:0$. За резултата от спечелената среща остава единствената възможност да е $3:0$.



16. Отг. С). Съществуват две възможности за отсечката AB – да е катет или хипотенуза. Ако е катет, то другият катет трябва да е с дължина $1cm$, за да бъде лицето на триъгълника равно на $1cm^2$. Възможните разположения на точката C са четири. На чертежа те са означени с C_1, C_2, C_3 и C_4. Имаме $BC_1=AC_2=AC_3=BC_4=1cm$ и $S_{ABC_1}=S_{BAC_2}=S_{BAC_3}=S_{ABC_4}=1cm^2$. Ще разгледаме случая, когато AB е хипотенуза. Нека точката C е такава, че ΔABC е неравнобедрен правоъгълен ($\angle ACB=90^0$) и CH ($H\in AB$) е височината към хипотенузата. Ако O е средата на AB, то CO е медиана и следователно $CO=\frac{1}{2}AB=1cm$. Тъй като ΔABC е неравнобедрен, то $H\neq O$ и от правоъгълния ΔOHC следва, че $CH<CO=1cm$. Заключаваме, че $S_{ABC}<1\ cm^2$. Следователно единствената възможност да бъде изпълнено условието на задачата е ΔABC да е равнобедрен правоъгълен. Сега е ясно, че възможните разположения на точката C са две: C_5 и C_6 (вж. чертежа), като $C_5H=C_6H=1cm$. Окончателно, отговорът на задачата е 6.

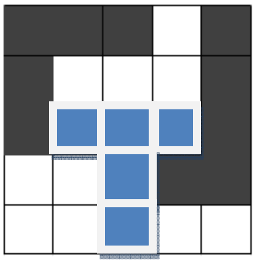




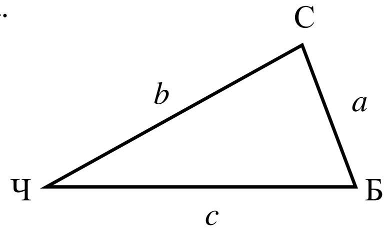
17. Отг. В). Най-голям е сборът $a+b$, защото $a+b>b>a.b>a:b$.

18. Отг. Е). Числото трябва да завършва на 0 или 5, за да се дели на 5. Следователно числото завършва на 80 или на 85. От признака за делимост на 4 следва, че числото завършва на 80 (80 се дели на 4, докато 85 не се дели на 4). Следователно $Y=0$. Според признака за делимост на 9 трябва сборът от цифрите на даденото число да се дели на 9. Тъй като $X+Y+2+4+8=X+14$, то числото $X+14$ трябва да се дели на 9. Първото възможно число след 14, което се дели на 9, е 18, откъдето $X=4$. Следващите числа, които се делят на 9, са 27, 36 и т. н., които не дават решения, защото при тях $X\geq 13$, а X е цифра и $X\leq 9$. Така получаваме, че $X+Y=4$.

19. Отг. D).



20. Отг. B). Можем да считаме, че в общия случай гнездата на трите врабчета са върхове на триъгълник. Да означим този триъгълник с ЧБС (Ч е гнездото на Черко, Б е гнездото на Белко, а С е гнездото на Сивко). В частност триъгълникът може да е изроден, т.е. трите гнезда да лежат на една права.



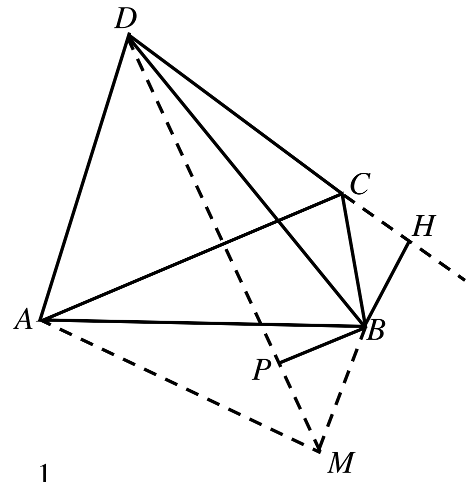
Да означим дължините на страните на триъгълника с a, b и c, както е показано. Тези дължини отговарят на съответните разстояния между гнездата. От твърдението на Сивко следва неравенството $b > 2a$, от твърдението на Черко следва неравенството $c > 2b$, а от твърдението на Белко – съответно неравенството $c > 2a$.

<u>*Случай* 1</u>. Сивко и Черко казват истината, а Белко лъже. Тогава $a < 0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 1,5b$. Освен това $c > 2b$ и следователно $2b < c < 1,5b$ ($b > 0$), което е невъзможно.

<u>*Случай* 2</u>. Черко и Белко казват истината, а Сивко лъже. Тогава $b < 0,5c$ и $a < 0,5c$. С помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 0,5c + 0,5c = c$, т.е. $c < c$, което също е невъзможно.

<u>*Случай* 3</u>. Сивко и Белко казват истината, а Черко лъже. Тогава $a < 0,5b$ и с помощта на неравенството на триъгълника заключаваме, че $c \le a + b < 1,5b$, т.е. $c < 1,5b$, което не е в противоречие с отрицанието на твърдението на Черко, т.е. с $c \le 2b$. Заключаваме, че единствено възможен е случай 3.

21. Отг. D). Нека x е броят на произведените от Митко изстрели и a е броят на попаденията му в осмицата. От условието следва, че броят на попаденията в десятката е също a. Успешните изстрели за 75% от x, т.е. те са $\frac{3}{4}x$. В частност заключаваме, че числото x се дели на 4. Броят на точките от попаденията в осмицата е $8a$, а броят на точките от попаденията в десятката е $10a$. Тъй като попаденията в петицата са $\frac{3}{4}x - 2a$, то броят на точките, получени от тези попадения, е $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right)$. Следователно $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right) + 18a = 99$, откъдето $5\left(\frac{3}{4}x - 2a\right) = 9(11 - 2a)$. Заключаваме, че числото $11 - 2a$ трябва да се дели на 5. От друга страна $11 - 2a > 0$, което е изпълнено само ако $a = 1$, $a = 2$, $a = 3$, $a = 4$ или $a = 5$. Единствено при $a = 3$ числото $11 - 2a$ се дели на 5. Така получаваме $x = 20$.

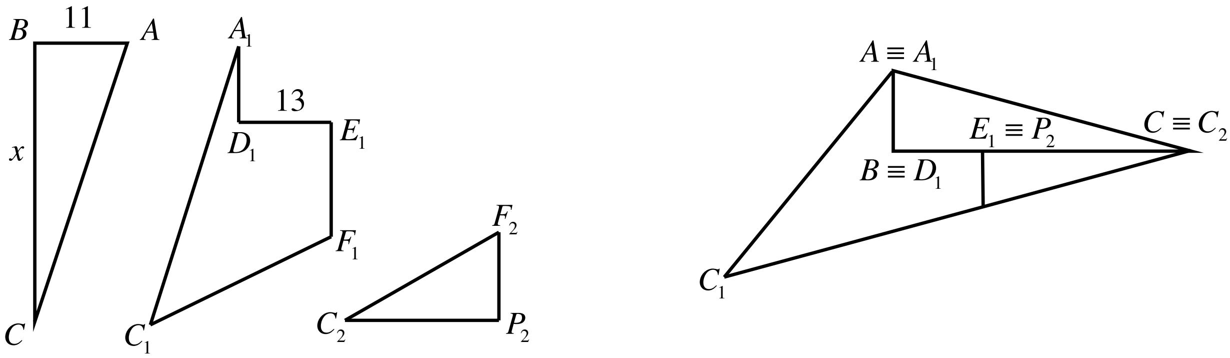


22. Отг. В). <u>*Първи начин*</u>. В равнобедрения ΔABC ($AB = AC$) по условие имаме $\angle ABC = 75^\circ$, откъдето следва, че и $\angle ACB = 75^\circ$, а $\angle BAC = 30^\circ$. Тогава $\angle CAD = \angle BAD - \angle BAC = 80^\circ - 30^\circ = 50^\circ$. От ΔACD имаме $\angle ACD = 180^\circ - (65^\circ + 50^\circ) = 65^\circ$, откъдето $AC = AD$. Заключаваме, че $\angle ADB = 50^\circ$ и следоваетлно $\angle BDC = 65^\circ - 50^\circ = 15^\circ$.

<u>*Втори начин*</u> (за осмокласници). От равенствата $AB = AC = AD$ следва, че точките B, C и D лежат на окръжност с център A и радиус AB. Тъй като $\angle BAC = 30^\circ$ е централен ъгъл, то $\overset{\frown}{BC} = 30^\circ$ и за вписания $\angle BDC$ намираме $\angle BDC = \frac{1}{2}\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}.30^\circ = 15^\circ$.

23. Отг. А). От условието следва, че догодина годините на Еми ще се делят на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Еми е на 55 години. Аалогично, миналата година годините на Стефан са се деляли на 7 и 8, а значи и на 56, откъдето следва, че сега Стефан е на 57 години. Окончателно заключаваме, че Стефан е с 2 години по-възрастен от Еми.

24. Отг. В). Трите части след разрязването са означени съответно с ABC, $A_1C_1F_1E_1D_1$ и $C_2P_2F_2$, като е показан начинът на тяхното свързване в триъгълник. От чертежа се вижда, че $A(A_1)B(D_1) = 11$, $B(D_1)E_1(P_2) = 13$, $E_1(P_2)C(C_2) = 11 + 13 = 24$ и следователно $x = B(D_1)C(C_2) = 13 + 24 = 37$.



25. Отг. D). Нека $(x; y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x \le y$, то $\frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3} \le \frac{2}{x}$, откъдето $x \le 6$. От друга страна $\frac{1}{y} > 0$ и получаваме, че $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, т.е. $x > 3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.

Международно състезание "Европейско Кенгуру"

19 март 2011 г.

ТЕМА за 9 и 10 клас
(специални образователни потребности)

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Пешеходна пътека тип зебра се състои от бели и черни ивици, които се редуват, като белите ивици са 8 на брой. Ако пътеката започва и завършва с бяла ивица, а широчината на всяка ивица е 50 *cm*, то дължината на пътеката е:

A) $7\,m$ **B)** $7{,}5\,m$ **C)** $8\,m$ **D)** $8{,}5\,m$ **E)** $9\,m$

2. Ако $P = 2.3 + 3.4 + 4.5$, $Q = 2^2 + 3^2 + 4^2$ и $R = 1.2 + 2.3 + 3.4$, кое от посочените твърдения е вярното?

A) $Q < P < R$ **B)** $P < Q = R$ **C)** $P < Q < R$ **D)** $R < Q < P$ **E)** $Q = P < R$

3. Мартин си спомня, че е разделил числото 2011 с някакво естсетвено число и е получил остатък 1011. За съжаление той не може да си спомни делителя. Със сигурност:

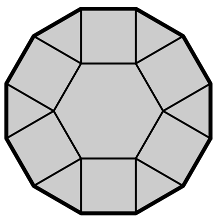
A) делителят е четен **B)** делителят е нечетен **C)** делителят е кратен на 5 **D)** делителят е съставно число **E)** Мартин е допуснал грешка при делението

4. Правоъгълна апликация с лице 360 cm^2 е покрита с цели квадратни плочки с едни и същи размери. Дължината на апликацията е 24 *cm*, а широчината й е 5 плочки. Намерете лицето на една плочка.

A) $1\,cm^2$ **B)** $4\,cm^2$ **C)** $9\,cm^2$ **D)** $16\,cm^2$ **E)** $25\,cm^2$

5. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в нарастващ ред. На кое място се намира числото 2011?

A) на 14-то **B)** на 13-то **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 12-то



6. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?

A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

7. Три еднакви зарчета са поставени едно върху друго така, че сумата на точките върху допиращите се стени е винаги равна на 5. Колко точки има върху горната стена на най-горното зарче, ако върху лявата стена на най-долното зарче има 1 точка? (Зарчетата са истински, т.е. сумата от точките на срещуположните стени е 7.)

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

8. В един месец има 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди, а в предния месец има само 4 недели. Кое от посочените твърдения за следващия месец е вярното?

A) в месеца има точно 4 петъка **B)** в месеца има точно 4 съботи **C)** в месеца има 5 недели **D)** в месеца има 5 среди **E)** такава ситуация е невъзможна

9. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?

A) Михаел, Фернандо, Себастиан
B) Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо
D) Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

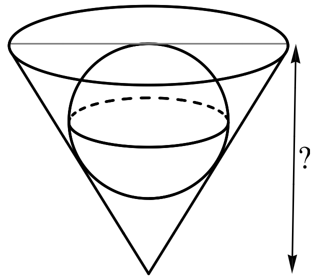
10. Ако $9^n + 9^n + 9^n = 3^{2011}$, намерете стойността на n.

A) 1005 **B)** 1006 **C)** 2010 **D)** 2011 **E)** друг отговор

11. Дадени са два съда с формата на куб, първият със страна $a\,cm$, а вторият със страна $(a+10)\,cm$. По-големият съд е пълен с вода, а по-малкият е празен. По-малкият съд се напълва с вода от по-големия, при което в по-големия съд остават 271 литра вода. Колко литра са прелети в по-малкия съд?

A) 243 **B)** 512 **C)** 125 **D)** 1331 **E)** 729

12. Мраморно топче с радиус 15 е поставено в конусовиден съд, като се допира до основата му и до околната му повърхнина. Да се намери дълбочината на съда, ако равнината, прекарана през върха му и диаметър на основата му, отсича от него равностранен триъгълник.



A) $30\sqrt{2}$ **B)** $25\sqrt{3}$ **C)** 45

D) 60 **E)** $60(\sqrt{3}-1)$

13. Всички клетки на таблица 4×4 трябва да се оцветят в черно или червено. Броят на черните клетки във всеки ред и всеки стълб е означен с числата съответно вдясно на редовете и с числата съответно под стълбовете. Намерете броя на всички такива оцветявания.

				2
				0
				1
				1
2	0	1	1	

A) 0 **B)** 1 **C)** 3 **D)** 5 **E)** 9

14. Намерете възможно най-голямия брой последователни трицифрени числа, в записа на които участва поне една нечетна цифра.

A) 10 **B)** 100 **C)** 110 **D)** 111 **E)** 221

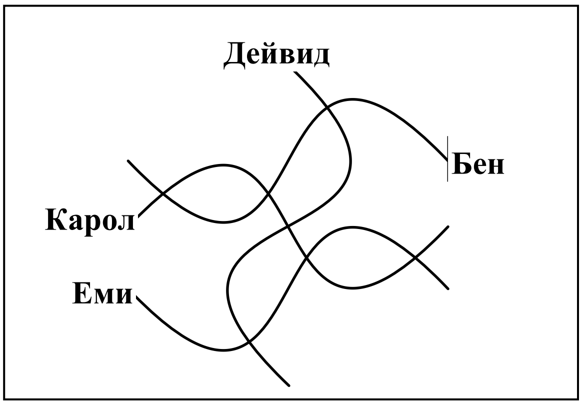
15. Във всяка от клетките на таблица с 3 реда и 3 стълба трябва да се запише по едно цяло число така, че сумата на числата във всеки квадрат от таблицата с размери 2×2 да е равна на 10. Пет от клетките на таблицата са попълнени. Кое от посочените числа може да е равно на сумата на липсващите четири числа?

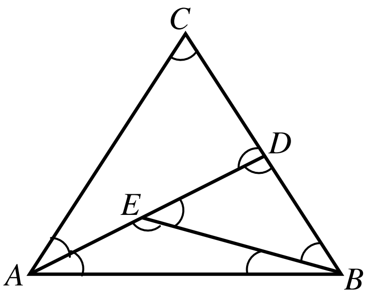
1		0
	2	
4		3

A) 9 **B)** 10 **C)** 11 **D)** 12 **E)** не може да се определи

16. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича "Кривата улица". Кой живее на "Кривата улица"?

A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид **E)** не може да се определи от скицата





17. Върху страната BC на ΔABC е взета вътрешна точка D, а върху отсечката AD – вътрешна точка E. Намерете възможно най-малкия брой различни стойности, които могат да приемат отбелязаните 9 ъгъла ABE, BAE, AEB, BED, EBD, EDB, ADC, CAD и ACD.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

18. Едно петцифрено число е *хладно*, ако се записва с различни цифри и първата му цифра е равна на сумата от останалите четири. Намерете броя на хладните числа.

A) 72 **B)** 144 **C)** 168 **D)** 216 **E)** 288

19. Числата x и y са по-големи от 1. Коя от дробите е с най-голяма стойност?

A) $\frac{x}{y+1}$ **B)** $\frac{x}{y-1}$ **C)** $\frac{2x}{2y+1}$ **D)** $\frac{2x}{2y-1}$ **E)** $\frac{3x}{3y+1}$

20. Правилните тетраедри $ABCD$ и $BCDE$ имат обща стена BCD. Нека X е точката, в която правата DE пресича равнината (ABC). Кое от посочените твърдения е вярното?

A) X не съществува, защото DE е успоредна на (ABC) **B)** $X \in \Delta ABC$

C) X и A са от една и съща страна на правата BC, но X е извън ΔABC

D) BC пресича отсечката AX във вътрешна точка и $BC \perp AX$ **E)** друг отговор

21. Даден е ΔABC с медиана $CM = 3$ ($M \in AB$). Външно за триъгълника са построени квадрати $CBDP$ и $ACQR$. Да се намери дължината на отсечката PQ.

A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 5 **E)** 6

22. Намерете броя на наредените двойки естествени числа $(x; y)$, които удовлетворяват уравнението $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

23. За всяко естествено число $n \geq 2$ с $\langle n \rangle$ означаваме най-голямото просто число, което не надминава n. Намерете броя на целите положителни числа, които са решения на уравнението $\langle k+1 \rangle + \langle k+2 \rangle = \langle 2k+3 \rangle$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

24. Намерете броя на 4-елементните множества от различни ръбове на даден куб, за които произволни два ръба в множеството нямат общ връх.

A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18

25. За кои естествени числа n в интервала $0 < n < 9$ е възможно да се отбележат няколко клетки в таблица 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 да съдържа точно n от отбелязаните клетки?

A) 1 **B)** 1 и 2 **C)** 1, 2 и 3 **D)** 1, 2, 7 и 8 **E)** всички

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 9 и 10 клас (СОП)

1. Отг. B). Щом белите ивици са 8 броя и с тях започва и завършва пътеката, то черните са 7. Общо ивиците са 15 и следователно цялата пътека е с дължина $15.0,5 = 7,5\,m$.

2. Отг. D). Тъй като $P = 38$, $Q = 29$ и $R = 20$, вярното твърдение е **D**).

3. Отг. E). Ако a (делимо) и $b \neq 0$ (делител) са цели числа, то съществуват единствени цели числа q (частно) и r (остатък) така, че $a = bq + r$. При това $0 \le r < |b|$. От равенството $a = bq + r$ следва, че $bq = a - r = 2011 - 1011 = 1000$, т.е. $bq = 1000$. Тъй като b и q са цели числа, то с помощта на полученото равенство заключаваме, че $|b| \le 1000$. От $0 \le r < |b| \le 1000$ следва, че $1011 < 1000$, което е невъзможно. Следователно не съществува делител така, че да се получи остатък 1011. Така, единственият верен отговор е **E**).

4. Отг. C). Ако дължината на страната на една плочка е $x\,cm$, то $24.5x = 360$, откъдето $x = 3$ и следователно лицето на една плочка е 9 cm^2.

5. Отг. E). Записът изглежда така: 1003, 1012, 1021, 1030, 1102, 1111, 1120, 1201, 1210, 1300, 2002, 2011, …

6. Отг. C). От условието следва, че всеки от триъгълниците е равнобедрен с ъгъл между бедрата, равен на 60^0. Следователно шестте триъгълника са равностранни със страна 1. Така за обиколката на фигурата получаваме 12.

7. Отг. E). Да разгледаме тялото, образувано от трите зарчета. Сборът от точките на горната стена на тялото, на долната стена на тялото и на залепените стени е $3.7 = 21$. Тъй като сборът от точките на четирите допиращи се стени е $2.5 = 10$, то за сбора от точките на горната и долната стена на тялото остават $21 - 10 = 11$ точки. Но единствената възможност за получаване на 11 е $11 = 5 + 6$. Шестицата на долното зарче е срещу единицата и следователно не може да се намира на долната стена на тялото. Заключаваме, че шестицата е на горната стена на тялото.

8. Отг. B). 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди са възможни само за месец с 31 дни. При това 5-те понеделника са на дати 1, 8, 15, 22 и 29; 5-те вторника са на дати 2, 9, 16, 23 и 30; а 5-те среди са на дати 3, 10, 17, 24 и 31. Ако предният месец има 31 дни, то неделите в него са на дати (отзад напред) 31, 24, 17, 10 и 3, т.е. броят на наделите е 5 и това противоречи на условието на задачата. Заключаваме, че предният месец не може да има 31 дни. Ако предният месец има 30 дни, то неделите в него са на дати 30, 23, 16, 9 и 2, т.е. броят на неделите е отново 5. Остава единствената възможност предният месец да е февруари и годината да не е високосна. В този случай броят на неделите е точно 4. Следователно месецът с 5 понеделника, 5 вторника и 5 среди е със сигурност март. Следващият месец е април и петъците в него са на дати 2, 9, 16, 23 и 30, т.е. те са 5 на брой и **A)** не е вярно. Неделите са на дати 4, 11, 18 и 25, т.е. те са 4 на брой и **C)** не е вярно. Средите в разглеждания месец април са на дати 7, 14, 21 и 28, т.е. средите са 4 на брой и **D)** не е вярно. Съботите са на дати 3, 10, 17 и 24, т.е. **B)** е вярно. Ситуацията е възможна и следователно твърдение **E)** не е вярно.

9. Отг. B). Ако двама спортисти разменят местата си четен брой пъти, те ще завършат в реда, в който са били в началото, а ако разменят местата си нечетен брой пъти, ще завършат обратно на реда, в който са били в началото. Оттук следва, че Михаел е завършил след Фернандо и след Себастиан, а Фернандо е завършил преди Себастиан.

10. Отг. А). Имаме $9^n + 9^n + 9^n = 3.9^n = 3.\left(3^2\right)^n = 3.3^{2n} = 3^{2n+1} = 3^{2011}$, откъдето $2n+1 = 2011$ и следователно $n = \dfrac{2011-1}{2} = 1005$.

11. Отг. Е). Тъй като $a\,cm = 0{,}1a\;dm$, от условието имаме $(0{,}1a+1)^3 - (0{,}1a)^3 = 271$, откъдето $0{,}03a^2 + 0{,}3a + 1 = 271$ и $a^2 + 10a - 9000 = 0$. Единственият положителен корен на полученото квадратно уравнение е $a = 90\,cm = 9\,dm$. Следователно прелятото количество вода е $9^3\,dm^3$, т.е. 729 dm^3 = 729 литра.

12. Отг. C). От условието следва, че 15 е радиусът на вписаната окръжност в осното сечение. Тогава височината на осното сечение, което е равностранен триъгълник, е $15.3 = 45$.

13. Отг. D).

		X	X	2
				0
X				1
X				1
2	0	1	1	

X			X	2
				0
		X		1
X				1
2	0	1	1	

X		X		2
				0
			X	1
X				1
2	0	1	1	

X		X		2
				0
X				1
			X	1
2	0	1	1	

X			X	2
				0
X				1
		X		1
2	0	1	1	

Съществуват 3 начина за оцветяване на първия стълб. Първият е, когато черните клетки са последните две в стълба (първия чертеж). Вторият е, когато черните клетки са първата и четвъртата в стълба (втори и трети чертеж). Третият е, когато черните клетки са първата и третата в стълба (четвърти и пети чертеж). При първия начин оцветяването на останалите 2 черни клетки е определено еднозначно – единствената възможност е третата и четвъртата клетка на първия ред да са черни (първия чертеж). При втория начин съществуват две възможности за оцветяване на първия ред. При първата възможност втората черна клетка на първия ред е третата поред (втори и четвърти чертеж), а при втората възможност втората черна клетка на първия ред е четвъртата поред (трети и пети чертеж). Сега оцветяването на четвъртата черна клетка е опеделено еднозначно. По този начин получаваме точно 5 различни оцветявания, както е показано.

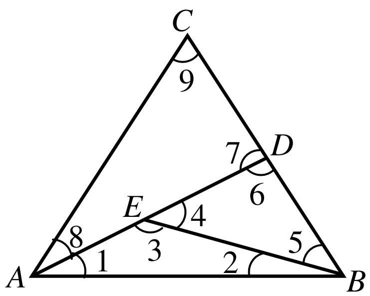
14. Отг. D). Ясно е, че ако цифрата на стотиците е четна, максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е 11. Ако цифрата на стотиците е нечетна, броят на последователните трицифрени числа с тази цифра на стотиците е 100 и те са с исканото свойство (например числата от 500 до 599). Следващото поред естествено число обаче е само с четни цифри. От направените разглеждания следва, че максималният брой последователни числа с поне една нечетна цифра е не повече от $100+11=111$. Максималният брой 111 може да се реализира например при цифра на стотиците, равна на 3. Последователните числа са: 289, 290, …, 299, 300, 301, …, 398, 399. Вместо 3 може да се вземе коя да е от цифрите 5, 7 или 9, при което пак се получават 111 последователни естествени числа с поне една нечетна цифра.

15. Отг. D). Да означим липсващото число в първия стълб на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите три липсващи числа чрез x. Сумата на четирите липсващи числа е равна на $x+(7-x)+(x+1)+(4-x)=12$.

1	$7-x$	0
x	2	$x+1$
4	$4-x$	3

16. Отг. C). Две прави улици не могат да се пресичат повече от веднъж. Да допуснем, че улицата, на която живее Карол, е права. Улиците, на които живеят Еми и Бен, не могат да са прави, защото всяка от тях пресича два пъти улицата, на която живее Карол. Но тогава правите улици са най-много две – тази, на която живее Карол, и тази, на която живее Дейвид. Получаваме противоречие и заключаваме, че улицата, на която живее Карол, не е права. Улиците, на които живеят Дейвид, Еми и Бен, са прави, защото кои да е две от тях имат най-много по едно пресичане. Следователно Карол живее на “Кривата улица”.

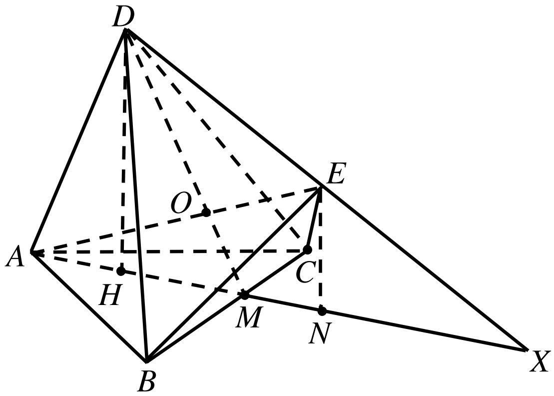
17. Отг. B). Да означим разглежданите ъгли последователно с числата от 1 до 9, както е показано на чертежа. Тъй като $\angle3$ е външен за ΔEBD, то $\angle3>\angle6$. От друга страна $\angle6$ е външен за ΔADC и заключаваме, че $\angle6>\angle9$. Следователно $\angle3>\angle6>\angle9$. Това показва, че разглежданите 9 ъгъла трябва да приемат поне 3 различни помежду си стойности. Следният пример показва, че различните стойности могат да бъдат точно 3. Нека $\angle1=\angle2=\angle5=\angle8=36^0$. Тогава:



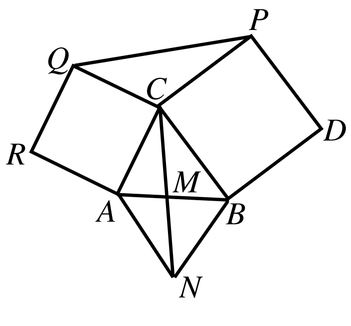
$\angle3=180^0-(\angle1+\angle2)=180^0-72^0=108^0$; $\angle4=180^0-\angle3=72^0$; $\angle6=180^0-(\angle4+\angle5)=72^0$; $\angle7=180^0-\angle6=108^0$; $\angle9=\angle6-\angle8=72^0-36^0=36^0$. Трите различни стойности са 36^0, 72^0 и 108^0.

18. Отг. C). Нулата със сигурност участва в записа на едно хладно число. В противен случай сборът на последните четири цифри е поне $1+2+3+4=10$ и не може да бъде изпълнено условието първата цифра да е равна на сбора на останалите четири. Освен нулата, за останалите три цифри измежду последните четири са възможни 7 случая: 1, 2 и 3 (първа цифра 6); 1, 2 и 4 (първа цифра 7); 1, 2 и 5 (първа цифра 8); 1, 2 и 6 (първа цифра 9); 1, 3 и 4 (първа цифра 8), 1, 3 и 5 (първа цифра 9); 2, 3 и 4 (първа цифра 9). Във всеки един от тези 7 случая съществуват по 24 хладни числа, които се получават, като разместваме местата на четирите последни цифри. Следователно общият брой на всички хладни числа е $24.7=168$.

19. Отг. B). Непосредствено се проверява, че $\frac{x}{y-1}>\frac{2x}{2y-1}>\frac{3x}{3y+1}>\frac{2x}{2y+1}>\frac{x}{y+1}$.



20. Отг. D). Нека O е центърът на ΔBCD. Проекцията на A в равнината (BCD) съвпада с O, защото по условие $ABCD$ е правилен. Аналогично проекцията на E в равнината (BCD) съвпада с O. Оттук следва, че точките A и E са от различни страни на общата стена BCD (те се намират на равни разстояния от O). При това точките A, O и E лежат на една права. Ако M е средата на страната BC, то $DM \perp BC$ (ΔBCD е равностранен). Тъй като $AM \perp BC$ (ΔABC е също равностранен), проекцията H на D в равнината (ABC) лежи върху AM. Правата DM минава през O и следователно точката O се намира в ΔHMD. Оттук следва, че проекцията на O в равнината (ABC) лежи на правата AM. Заключаваме, че и проекцията N на E в равнината (ABC) лежи на същата права. Но тогава проекцията на правата DE в равнината (ABC) е правата AM. Стигаме до извода, че правата DE пресича (ABC) в точка от правата AM, т.е. точката X лежи на тази права. Така доказваме, че $BC \perp AX$. Ако страните на тетраедрите са с дължина a, то $AM = a\frac{\sqrt{3}}{2}$ (височина в равностранен триъгълник със страна a) и $DH = AO = EO = a\frac{\sqrt{6}}{3}$ (височина на правилен тетраедър със страна a). От подобието на правоъгълните триъгълници AMO и AEN следва $\frac{AM}{AE} = \frac{AO}{AN}$, т.е. $\frac{a\frac{\sqrt{3}}{2}}{2a\frac{\sqrt{6}}{3}} = \frac{a\frac{\sqrt{6}}{3}}{AN}$. Оттук $AN = \frac{8}{9}a\sqrt{3} > \frac{a\sqrt{3}}{2} = AM$. Така заключаваме, че BC пресича отсечката AX във вътрешна точка и следователно вярното твърдение е **D)**.



21. Отг. E). Нека точката N е върху правата CM така, че M е между C и N, като $CM = MN = 3$. Тогава четириъгълникът $ANBC$ е успоредник. Оттук следва, че $BN = AC = QC$, т.е. $BN = QC$. Освен това $\angle CBN = 180^0 - \angle ACB = \angle QCP$ ($\angle ACQ + \angle BCP = 180^0$). Имаме още, че $BC = PC$ и следователно $\Delta CNB \cong \Delta PQC$ по I признак. Заключаваме, че $PQ = CN = 2CM = 2.3 = 6$.

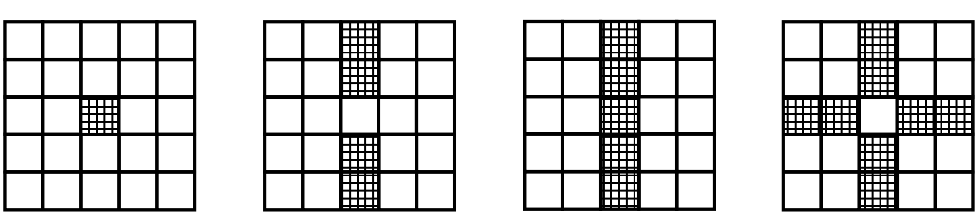
22. Отг. D). Нека $(x; y)$ е решение на даденото уравнение. Ако $x \le y$, то $\frac{1}{y} \le \frac{1}{x}$ и следователно $\frac{1}{3} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \le \frac{1}{x} + \frac{1}{x} = \frac{2}{x}$, т.е. $\frac{1}{3} \le \frac{2}{x}$, откъдето $x \le 6$. От друга страна $\frac{1}{y} > 0$ и получаваме, че $\frac{1}{x} < \frac{1}{3}$, т.е. $x > 3$. Като даваме на x последователно стойности 4, 5 и 6, намираме решенията $(4;12)$ и $(6;6)$. Тъй като x и y участват симетрично в уравнението, заключаваме, че и $(12;4)$ е решение. Така намираме, че общият брой решения е 3.

23. Отг. B). Ако $k=1$, то $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 1+1\rangle+\langle 1+2\rangle=2+3=5=\langle 2k+3\rangle$. Следователно $k=1$ е решение на уравнението. При $k\geq 2$ е изпълнено $\langle k+1\rangle\geq 3$, $\langle k+2\rangle\geq 3$ и $\langle 2k+3\rangle\geq 3$, откъдето следва, че простите числа $\langle k+1\rangle$, $\langle k+2\rangle$ и $\langle 2k+3\rangle$ са нечетни. Заключаваме, че равенството $\langle k+1\rangle+\langle k+2\rangle=\langle 2k+3\rangle$ е невъзможно, защото лявата му страна е четно число, а дясната – нечетно.

24. Отг. C). Да означим куба по стандартния начин с $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В едно множество с исканото свойство не може да има три ръба, които са два по два кръстосани. В противен случай четвъртият ръб ще има със сигурност общ връх с някой от трите. В това се убеждаваме, като разгледаме например ръбовете AB, DD_1 и B_1C_1, които са два по два кръстосани. Директно се вижда, че всеки от останалите 9 ръба BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, A_1B_1, C_1D_1 и D_1A_1 има общ връх с някой от избраните три. След като в едно множество с исканото свойство няма три ръба, които са два по два кръстосани, можем да считаме, че четирите ръба лежат в две срещуположни стени. Двойките срещуположни стени в един куб са точно 3 на брой. С помощта на една двойка срещуположни стени можем да определим точно 4 множества с исканото свойство. За да се убедим, че е така, достатъчно е да разгледаме например стените $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$. Възможните множества с ръбове в тези стени са: $\{AB,CD,A_1B_1,C_1D_1\}$, $\{AB,CD,B_1C_1,D_1A_1\}$, $\{BC,DA,B_1C_1,D_1A_1\}$ и $\{BC,DA,A_1B_1,C_1D_1\}$. Следователно общият броя множества с исканото свойство е $4.3=12$. Някои от тези множества обаче се повтарят. В разглеждания пример само второто и четвъртото множество не се получават от друга двойка срещуположни стени. В същото време първото множество се получава и от двойката срещуположни стени (ABB_1A_1) и (CDD_1C_1), а третото множество – съответно и от двойката срещуположни стени (BCC_1B_1) и (ADD_1A_1). Така, от всяка двойка срещуположни стени се получават 2 множества, които не могат са получат от друга двойка срещуположни стени, както и 2 множества, всяко от които се получава от още точно една друга двойка срещуположни стени. Следователно общият брой множества е $6+\frac{1}{2}\cdot 6=9$. Всъщност, множествата с исканото свойство са:

$\{AB,A_1B_1,CC_1,DD_1\}$, $\{BC,B_1C_1,DD_1,AA_1\}$, $\{CD,C_1D_1,AA_1,BB_1\}$, $\{DA,D_1A_1,BB_1,CC_1\}$, $\{AB,CD,B_1C_1,A_1D_1\}$, $\{BC,DA,C_1D_1,B_1A_1\}$, $\{AB,CD,A_1B_1,C_1D_1\}$, $\{BC,DA,B_1C_1,D_1A_1\}$, $\{AA_1,BB_1,CC_1,DD_1\}$. Един възможен начин за проверка е следният. В едно множество участват 4 ръба, които се определят от 8 различни върха. От друга страна броят на всички върхове на куба е 8. Следователно във всяко множество трябва да фигурират и осемте върха и то точно по веднъж.

25. Отг. E).



Броят на подтаблиците 3×3 е 9. Първите 3 се получават от горните 3 реда на таблицата 5×5: едната подтаблица включва трите стълба отляво надясно, а другите две се получават с преместване на тази подтаблица вдясно на разстояние съответно една и две клетки. Останалите 6 подтаблици могат да се получат от описаните 3 с преместване надолу на една и две клетки. Отбелязаните клетки ще означаваме със защриховане, както е показано. При $n=1$ е достатъчно да защриховаме централната клетка (вж. първия чертеж) и да забележим, че всяка от 9-те подтаблици 3×3 съдържа централната клетка. При $n=2$ ще използваме защриховането от втория чертеж. Очевидно централната подтаблица 3×3 съдържа точно две защриховани клетки. Ако придвижим тази подтаблица една клетка наляво или една клетка на надясно, двете защриховани клетки остават в новите подтаблици. Ако придвижим централната таблица една клетка нагоре или една клетка надолу, се появява нова защрихована клетка и в същото време се премахва една защрихована клетка. Следователно в новите подтаблици отново ще има по две защриховани клетки. Тези две подтаблици можем да преместваме наляво или надясно така, както направихме с централната подтаблица и броят на защрихованите клетки ще се запази отново 2. С аналогични разсъждения, като използваме защрихованията съответно на третия и четвъртия чертеж, установяваме, че $n=3$ и $n=4$ са също решения на задачата. По-нататък е достатъчно да забележим, че е в сила свойството "дуалност": ако сме доказали твърдението за някое n, т.е. извършили сме защриховане на някои от клетките на таблицата 5×5 така, че всяка подтаблица 3×3 съдържа точно n защриховани клетки, то всяка от подтаблиците ще съдържа $9-n$ незащриховани клетки. Това означава, че ако вместо защриховане на избраните клетки извършим защриховане на останалите клетки в таблицата 5×5, ще получим доказателство на твърдението за $9-n$. Заключаваме, че към решенията на задачата трябва да прибавим още числата $9-1=8$, $9-2=7$, $9-3=6$ и $9-4=5$. Следователно за всички естествени числа n от интервала $0<n<9$ съществува подходящо защриховане така, че да е изпълнено условието на задачата.

Международно състезание "Европейско Кенгуру"

19 март 2011 г.

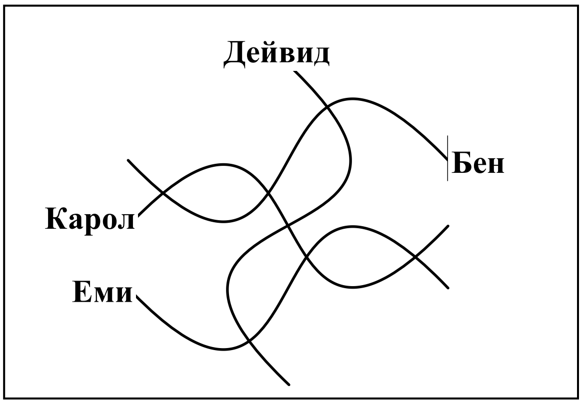
ТЕМА за 11 и 12 клас
(специални образователни потребности)

След всяка задача има посочени 5 отговора, от които само един е верен. За даден верен отговор се присъждат 5 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици. ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Трима спортисти – Михаел, Фернандо и Себастиан – участвали в автомобилно рали. В началото Михаел повел, Фернандо бил втори и Себастиан – трети. По време на ралито Михаел и Фернандо разменили местата си 9 пъти, Фернандо и Себастиан – 10 пъти, а Михаел и Себастиан – 11 пъти. В какъв ред спортистите са завършили състезанието?
A) Михаел, Фернандо, Себастиан **B)** Фернандо, Себастиан, Михаел
C) Себастиан, Михаел, Фернандо **D)** Себастиан, Фернандо, Михаел
E) Фернандо, Михаел, Себастиан

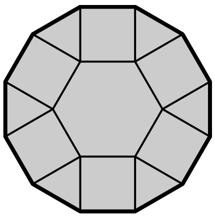
2. Ако $2^x = 15$ и $15^y = 32$, то xy е равно на:
A) 5 **B)** $\log_2 15 + \log_{15} 32$ **C)** $\log_2 47$ **D)** 7 **E)** $\sqrt{47}$

3. По време на бурно морско пътешествие Жени се опитала да направи скица на селището, в което живее. Тя успяла да начертае четирите улици, на които се намират къщите на нейните приятели Бен, Дейвид, Карол и Еми, както и всичките седем пресичания на тези улици. В действителност три от улиците са абсолютно прави, а четвъртата се нарича "Кривата улица". Кой живее на "Кривата улица"?



A) Еми **B)** Бен **C)** Карол **D)** Дейвид
E) не може да се определи от скицата

4. Всички четирицифрени естествени числа със сума от цифрите 4 са записани в намаляващ ред. На кое място се намира числото 2011?
A) на 6-то **B)** на 7-мо **C)** на 8-мо **D)** на 9-то **E)** на 10-то



5. Фигурата на чертежа се състои от правилен шестоъгълник със страна 1, шест триъгълника и шест квадрата. Колко е обиколката на фигурата?
A) $6\left(1+\sqrt{2}\right)$ **B)** $6\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ **C)** 12 **D)** $6+3\sqrt{2}$ **E)** 9

6. Андрей написал на дъската нечетните числа от 1 до 2011 включително, а Боби изтрил кратните на 3. Колко числа са останали на дъската?
A) 335 **B)** 336 **C)** 671 **D)** 1005 **E)** 1006

7. За четириъгълника $PQRS$ е изпълнено $\angle PSR = \angle PQR = 90°$, $PS = SR$, $ST \perp PQ$ $(T \in PQ)$ и $ST = 5$. Лицето на четириъгълника е равно на:
A) 20 **B)** 22,5 **C)** 25 **D)** 27,5 **E)** 30

8. Макс и Хюго хвърлят шепа зарове, за да определят кой от двамата трябва да скочи пръв в студеното езеро. Ако не се падне нито една шестица, пръв трябва да е Макс, а ако се падне точно една шестица, пръв трябва да е Хюго. Ако се паднат повече от една шестица, скачането се отлага за друг ден. Колко зарове трябва да хвърлят Макс и Хюго, че шансът на всеки от тях да скочи пръв в езерото да е един и същ?

A) 3 **B)** 5 **C)** 8 **D)** 9 **E)** 17

9. С помощта на три правоъгълника, поставени плътно един до друг без застъпване, трябва да се получи по-голям правоъгълник. Единият от дадените правоъгълници има размери 7 на 11, а вторият има размери 4 на 8. Третият правоъгълник е избран с възможно най-голямо лице. На колко е равно това лице?

A) 11 **B)** 12 **C)** 24 **D)** 56 **E)** 77

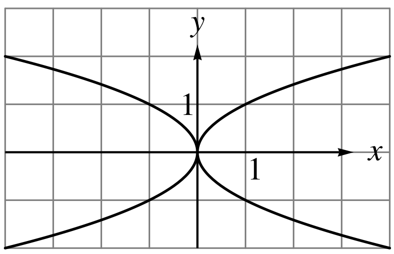
10. Във всяка от клетките на таблица с 3 реда и 3 стълба трябва да се запише по едно цяло число така, че сумата на числата във всеки квадрат от таблицата с размери 2×2 да е равна на 10. Четири от клетките на таблицата са попълнени. Кое от посочените числа може да е равно на сумата на липсващите пет числа?

	2	
1		3
	4	

A) 9 **B)** 10 **C)** 12 **D)** 13 **E)** друг отговор

11. 48 момчета били на ски-училище. Шестима от тях имали точно по един брат измежду останалите, деветима имали точно по двама братя измежду останалите и четирима имали точно по трима братя измежду останалите. Другите деца нямали братя измежду останалите. От колко семейства са били децата от ски-училището?

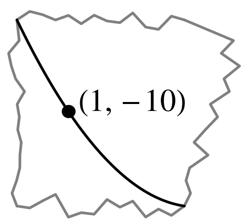
A) 19 **B)** 25 **C)** 31 **D)** 36 **E)** 48



12. Колко от графиките на функциите $y=x^2$, $y=-x^2$, $y=\sqrt{x}$, $y=-\sqrt{x}$, $y=\sqrt{-x}$, $y=-\sqrt{-x}$, $y=\sqrt{|x|}$ и $y=-\sqrt{|x|}$ са включени на чертежа?

A) нито една **B)** 2 **C)** 4 **D)** 6 **E)** всичките 8

13. В стандартна правоъгълна координатна система xOy е отбелязана точката $(1;-10)$ върху графиката на функцията $y=ax^2+bx+c$. След това координатните оси и почти цялата графика на функцията са изтрити, като остава изображението от чертежа. Кое от посочените твърдения може да бъде НЕВЯРНО?



A) $a>0$ **B)** $b<0$ **C)** $a+b+c<0$ **D)** $b^2>4ac$ **E)** $c<0$

14. Шестоъгълникът $PQRSTU$ със страни $PQ=4$, $QR=5$, $RS=6$, $ST=7$ и $TU=8$ е описан около окръжност. Да се намери дължината на страната UP.

A) 9 **B)** 8 **C)** 7 **D)** 6 **E)** не може да се определи

15. Да се намери сумата на всички цели положителни числа x, по-малки от 100, за всяко от които числото x^2-81 е кратно на 100.

A) 200 **B)** 100 **C)** 90 **D)** 81 **E)** 50

16. Братята Андрей и Иван отговорили вярно на въпроса колко са членовете на шахматния им клуб. Андрей казал: “Всички членове на клуба са момчета, освен петима, които са момичета.” Иван добавил: “Всяка група от шестима членове на клуба включва най-малко четири момичета.” Колко са членовете на клуба?

A) 6 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 12 **E)** 18

17. В кутия за лотария са поставени топки и върху всяка от топките е записано по едно цяло положително число. Всички записани числа са различни. Върху 30 от топките е записано число, кратно на 6, върху 20 от топките е записано число, кратно на 7, а върху точно 10 от топките е записано число, кратно на 42. Намерете възможно най-малкия брой топки в кутията.
A) 30 **B)** 40 **C)** 53 **D)** 54 **E)** 60

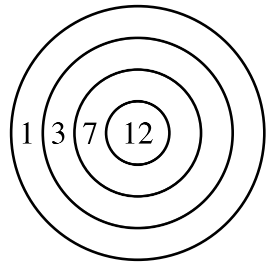
18. Дадени са двете безкрайни аритметични прогресии 5; 20; 35;… и 35; 61; 87;… Намерете броя на различните безкрайни аритметични прогресии от цели положителни числа, всяка от които съдържа всички членове на двете дадени прогресии.
A) 1 **B)** 3 **C)** 5 **D)** 26 **E)** безброй много

19. Редицата функции $f_1(x), f_2(x), \dots,$ удовлетворява двете условия: $f_1(x) = x$ и $f_{n+1}(x) = \frac{1}{1 - f_n(x)}$ за всяко $n \geq 1$. Да се пресметне $f_{2011}(2011)$.
A) 2011 **B)** $-\frac{1}{2010}$ **C)** $\frac{2010}{2011}$ **D)** 1 **E)** -2011

20. Кутия съдържа някакъв брой червени и някакъв брой зелени топки. По случаен начин се избират две топки от кутията. Вероятността избраните топки да са с еднакъв цвят е $\frac{1}{2}$. Кое от посочените числа е възможно да показва общия брой на топките в кутията?
A) 81 **B)** 101 **C)** 1000 **D)** 2011 **E)** 10001

21. Самолетна компания не таксува багажа на даден пътник, ако този багаж не надхвърля определено тегло. За всеки килограм над определеното тегло се заплаща определена такса. Багажът на г-н и г-жа Трип бил общо 60 кг и те платили 3 евро, като всеки от тях платил част от тази сума. Багажът на г-н Уондър бил също 60 кг, но той платил за него 10,5 евро. Да се намери максималното тегло на багажа на един пътник, за който пътникът не заплаща такса.
A) 10 кг **B)** 18 кг **C)** 20 кг **D)** 25 кг **E)** 39 кг

22. Робин Худ изстрелял три стрели по мишената, показана на чертежа. Той уцелил при трите изстрела и получил съответни точки съгласно показаните числа в различните кръгове. Колко различни резултата могат да се получат след сумиране на точките?



A) 13 **B)** 17 **C)** 19 **D)** 20 **E)** 21

23. Нека a, b и c са такива цели положителни числа, че $a^2 = 2b^3 = 3c^5$. Какъв най-малък брой положителни делители може да има числото abc (включително 1 и abc)?
A) 30 **B)** 49 **C)** 60 **D)** 77 **E)** 1596

24. Двадесет различни цели положителни числа са записани в клетките на правоъгълна таблица с размери 4×5 (във всяка клетка по едно число). Всеки две съседни числа (числата в клетки с обща страна) имат общ делител, по-голям от 1. Ако n е най-голямото число в таблицата, да се намери минималната стойност на n.
A) 21 **B)** 24 **C)** 26 **D)** 27 **E)** 40

25. Намерете броя на 4-елементните множества от различни ръбове на даден куб, за които произволни два ръба в множеството нямат общ връх.
A) 6 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 12 **E)** 18

РЕШЕНИЯ на задачите от ТЕМАТА за 11 и 12 клас (СОП)

1. Отг. B). Ако двама спортисти разменят местата си четен брой пъти, те ще завършат в реда, в който са били в началото, а ако разменят местата си нечетен брой пъти, ще завършат обратно на реда, в който са били в началото. Оттук следва, че Михаел е завършил след Фернандо и след Себастиан, а Фернандо е завършил преди Себастиан.

2. Отг. A). От равенството $2^x = 15$ следва, че $2^{xy} = 15^y = 32 = 2^5$, т.е. $2^{xy} = 2^5$, откъдето $xy = 5$.

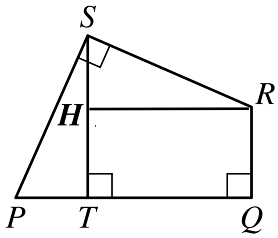
3. Отг. C). Две прави улици не могат да се пресичат повече от веднъж. Да допуснем, че улицата, на която живее Карол, е права. Улиците, на които живеят Еми и Бен, не могат да са прави, защото всяка от тях пресича два пъти улицата, на която живее Карол. Но тогава правите улици са най-много две – тази, на която живее Карол, и тази, на която живее Дейвид. Получаваме противоречие и заключаваме, че улицата, на която живее Карол, не е права. Улиците, на които живеят Дейвид, Еми и Бен, са прави, защото кои да е две от тях имат най-много по едно пресичане. Следователно Карол живее на "Кривата улица".

4. Отг. D). Записът изглежда така: 4000, 3100, 3010, 3001, 2200, 2110, 2101, 2020, 2011,…

5. Отг. C). От условието следва, че всеки от триъгълниците е равнобедрен с ъгъл при върха, равен на 60^0. Следователно шестте триъгълника са равностранни със страна 1. Така, за обиколката на фигурата получаваме 12. .

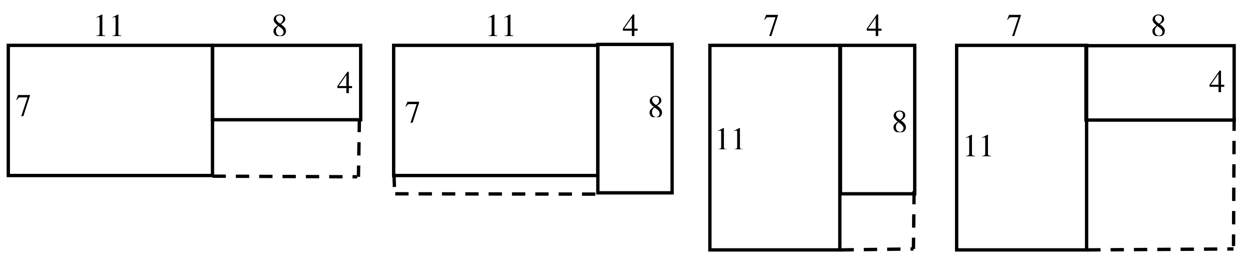
6. Отг. C). Андрей е написал $2010:2+1=1006$ числа. Измежду всеки три последователни нечетни числа (1;3;5), (7;9;11),…, (2005;2007;2009) Боби е изтрил по едно и следователно от всяка от тези групи на дъската са останали по две числа. Броят на тези групи е $(1006-1):3=335$. Заключаваме, че на дъската са останали $2\cdot 335+1=671$ числа.

7. Отг. C). Ако $RH \perp ST$ ($H \in ST$), то $\Delta PTS \cong \Delta SHR$. Нека $PT = x$. Тогава $S_{PQRS} = 2S_{PTS} + S_{TQRH} = 2\cdot\dfrac{PT.ST}{2} + HR.TH =$ $= 5x + 5(5-x) = 25$.



8. Отг. B). Ако броят на заровете е n, то вероятността Макс да скочи пръв в езерото е $\dfrac{5^n}{6^n}$, а вероятността Хюго да скочи пръв е $\dfrac{n5^{n-1}}{6^n}$. Оттук $5^n = n5^{n-1} \Rightarrow n = 5$.

9. Отг. D). Дадените два правоъгълника трябва да бъда поставени така, че да имат общ връх. Това може да стане по четири различни начина, както е показано. Размерите на третия правоъгълник са съответно 8×3, 11×1, 4×3 и 8×7. Съответните лица са 24, 11, 12 и 56, откъдето следва, че отговорът на задачата е 56.



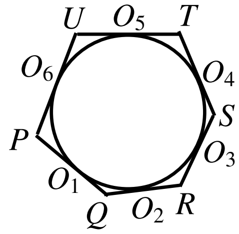
10. Отг. E). Да означим числото в централната клетка на таблицата с x. Като използваме условието за сумата на числата във всеки квадрат 2×2, изразяваме останалите четири липсващи числа чрез x. Сумата на петте липсващи числа ще бъде равна на $20-3x$ и това число дава остатък 2 при деление на 3 за всяко x. Нито едно от посочените числа не дава такъв остатък.

$7-x$	2	$5-x$
1	x	3
$5-x$	4	$3-x$

11. Отг. D). Да преброим децата по семейства. Шестте деца с точно по един брат са от 3 семейства (двама братя във всяко), деветте деца с по двама братя са от 3 семейства (трима братя във всяко) и четирите деца с по трима братя са от 1 семейство. Остават $48-6-9-4=29$ деца, които са от различни семейства. Ето защо семействата са общо $29+3+3+1=36$.

12. Отг. D). На чертежа липсват само графиките на функциите $y=x^2$ и $y=-x^2$. Графиката, която е разположена вляво от ординатната ос, е на функцията $x=-y^2$, а дясната графика е на функцията $x=y^2$. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{x}$, ще получим $x=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{x}$ е горната клонка на дясната графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{x}$, ще получим отново $x=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{x}$ е долната клонка на дясната графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{-x}$, ще получим $x=-y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{-x}$ е горната клонка на лявата графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{-x}$, ще получим отново $x=-y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{-x}$ е долната клонка на лявата графика от чертежа. Ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=\sqrt{|x|}$, ще получим $|x|=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=\sqrt{|x|}$ са горните клонки на лявата и дясната графика от чертежа. Накрая, ако повдигнем в квадрат двете страни на равенството $y=-\sqrt{|x|}$, ще получим отново $|x|=y^2$, откъдето заключаваме, че графиката на функцията $y=-\sqrt{|x|}$ са долните клонки на лявата и дясната графика от чертежа.

13. Отг. E). От вида на останалата част от параболата можем да направим заключение, че параболата е с формата на "чаша", т.е. $a>0$ и **A)** е винаги вярно. Върхът на параболата се намира надясно от точката $(1;-10)$ и следователно $-\frac{b}{2a}>1>0$, откъдето $b<0$ и **B)** е винаги вярно. Тъй като точката $(1;-10)$ лежи на параболата, то $y(1)=-10$, т.е. $a+b+c=-10<0$ и **C)** е винаги вярно. Освен това върхът на параболата лежи под оста Ox и $a>0$. Заключаваме, че уравнението $y=0$ има два различни реални корена, т.е. $b^2-4ac>0 \Rightarrow b^2>4ac$ и **D)** е винаги вярно. Накрая, функцията $y=2x^2-23x+11$ изпълнява условието на задачата и е пример за това, че твърдението $c<0$ (т.е. **E)**) може и да не е вярно.



14. Отг. D). Нека O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и O_6 са допирните точки с окръжността съответно на страните PQ, QR, RS, ST, TU и UP. Ако $QO_1 = x$, то $PO_1 = 4 - x$ и като използваме, че допирателните отсечки от точка към окръжност са равни, последователно получаваме $QO_2 = QO_1 = x$, $RO_2 = RO_3 = 5 - x$, $SO_3 = SO_4 = 6 - (5 - x) = 1 + x$, $TO_4 = TO_5 = 7 - (1 + x) = 6 - x$, $UO_5 = UO_6 = 8 - (6 - x) = 2 + x$. Тъй като $PO_6 = PO_1 = 4 - x$, то $UP = UO_6 + PO_6 = (2 + x) + (4 - x) = 6$.

15. Отг. A). Ясно е, че всяко от търсените числа x трябва да е нечетно, защото в противен случай числото $x^2 - 81$ ще бъде нечетно и не може да е кратно на 100. От нечетността на x следва, че числото $x^2 - 81$ се дели на 4. Това дава възможност да сведем задачата до намиране на онези нечетни x, за които числото $x^2 - 81$ се дели на 25. Нека x е такова, че 25 дели $x^2 - 81 = (x-9)(x+9)$. Тъй като $(x+9) - (x-9) = 18$ и 18 не се дели на 5, то точно едно от числата $x - 9$ и $x + 9$ трябва да е кратно на 25. Тези числа трябва да са четни и следователно единствените възможности са: $x - 9 = 0$, $x - 9 = 50$, $x + 9 = 50$ и $x + 9 = 100$. Оттук намираме, че $x = 9$, $x = 59$, $x = 41$ и $x = 91$. Тогава $9 + 59 + 41 + 91 = 200$.

16. Отг. B). От условието на задачата следва, че момичетата в клуба са точно 5, а момчетата са поне 2 – самите Андрей и Иван. Ако предположим, че в клуба членува поне още едно момче, то избирайки в шестица трите момчета с произволни други трима членове, ще получим противоречие с твърдението на Иван. Следователно членовете на клуба са точно 7.

17. Отг. B). Има поне 20 топки, върху които е записано число, което е кратно на 6, но не е кратно на 7. Има поне 10 топки, върху които е записано число, което е кратно на 7, но не е кратно на 6. Като вземем предвид и наличието на 10 топки, върху които е записано число, кратно и на 6, и на 7, получаваме, че топките са най-малко 40. Примерът, че в кутията може да има точно 40 топки и да са изпълнени условията на задачата, е очевиден.

18. Отг. C). Нека аритметичната прогресия $a_1, a_2, a_3, \ldots$ с разлика d изпълнява условието на задачата. Ясно е, че d е цяло положително число, защото не съществува безкрайно намаляваща редица от цели положителни числа. Тъй като $a_m = 5$ и $a_n = 20$ за някакви цели положителни числа m и n ($n > m$, защото $a_n > a_m$), то $(n - m)d = 20 - 5 = 15$. Това означава, че d е делител на 15. Аналогично получаваме, че d е делител и на $61 - 35 = 26$. Щом d дели взаимно простите числа 15 и 26, то това е възможно само ако $d = 1$. Освен това е ясно, че $a_1 \le a_m = 5$. Оттук получаваме, че има точно пет прогресии, които са решения на задачата: първата прогресия е с $a_1 = 1$ и $d = 1$, втората е с $a_1 = 2$ и $d = 1$, третата е с $a_1 = 3$ и $d = 1$, четвъртата е с $a_1 = 4$ и $d = 1$, а петата прогресия е с $a_1 = 5$ и $d = 1$.

19. Отг. A). От условието последователно получаваме $f_2(x) = \dfrac{1}{1-x}$, $f_3(x) = \dfrac{x-1}{x}$, $f_4(x) = f_1(x) = x$. При това всяка от функциите е дефинирана за $x = 2011$. Тъй като $f_{2011}(x) = f_{2008}(x) = \ldots = f_7(x) = f_4(x) = f_1(x) = x$, то $f_{2011}(2011) = f_1(2011) = 2011$.

20. Отг. A). Вероятността двете извадени топки да са с различен цвят също е равна на $\dfrac{1}{2}$. Нека в кутията има общо n топки и k от тях да са червени. Тогава вероятността двете извадени топки да са с различен цвят е равна на $\dfrac{C_k^1 \cdot C_{n-k}^1}{C_n^2}$. Оттук получаваме $\dfrac{C_k^1 \cdot C_{n-k}^1}{C_n^2} = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4k^2 - 4kn + n^2 - n = 0 \Leftrightarrow (2k-n)^2 = n$, т.е. числото n трябва да е точен квадрат на естествено число. От посочените отговори само 81 е точен квадрат. Лесно може да се провери, че ако в кутията има например 36 червени и 45 зелени топки (общо 81), настъпва ситуацията, описана в задачата.

21. Отг. D). Нека x кг е максималното тегло на багажа, за който един пътник не заплаща такса и нека за всеки извънреден килограм се заплаща такса от y евро. От условието за багажа на г-н Уондър следва равенството $(60-x)\,y = 10{,}5$. Ако багажът на г-жа Трип е a кг, то багажът на г-н Трип е $(60-a)$ кг и имаме равенството

$$(a-x)\,y + (60-a-x)\,y = 3 \Leftrightarrow (60-2x)\,y = 3.$$

След като разделим двете получени равенства, достигаме до $\dfrac{60-x}{60-2x} = 3{,}5 \Rightarrow x = 25$ кг.

22. Отг. C). Възможно най-малката сума е $3 = 1+1+1$, а възможно ной-голямата е $36 = 12+12+12$. Следователно всички възможни суми са измежду числата 3, 4, …,36. Проверката показва, че от тези 34 възможни стойности се реализират сумите $3=1+1+1$, $5=3+1+1$, $7=1+3+3$, $9=1+1+7$, $11=1+3+7$, $13=3+3+7$, $14=1+1+12$, $15=1+7+7$, $16=1+3+12$, $17=3+7+7$, $18=3+3+12$, $20=1+7+12$, $21=7+7+7$, $22=3+7+12$, $25=1+12+12$, $26=7+7+12$, $27=3+12+12$, $31=7+12+12$ и $36=12+12+12$, т.е. точно 19 на брой. Можем да се убедим, че останалите суми не се получават, като например отбележим, че ако 12 участва четен брой пъти, то общата сума е нечетно число, а ако 12 участва нечетен брой пъти, то общата сума е четно число.

23. Отг. D). Да предположим, че числото a има прост делител p, различен от 2 и 3. Тогава p ще дели също b и c. Ето защо можем да запишем $a = p^{\alpha} a_1,\ p \nmid a_1,\ b = p^{\beta} b_1,\ p \nmid b_1$ и $c = p^{\gamma} c_1,\ p \nmid c_1$. От $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $p^{2\alpha} a_1^2 = 2p^{3\beta} b_1^3 = 3p^{5\gamma} c_1^5$, което е възможно тогава и само тогава, когато $p^{2\alpha} = p^{3\beta} = p^{5\gamma}$. Но тогава $a_1^2 = 2b_1^3 = 3c_1^5$, което показва, че числата a_1, b_1 и c_1 също удовлетворяват дадените равенства и числото $a_1 b_1 c_1$ има по-малък брой делители от abc. Тъй като се интересуваме от случая, когато числото abc има най-малък брой делители, можем да считаме, че a няма други прости делители освен 2 и 3. Същото важи за b и c. Затова можем да запишем, че $a = 2^x 3^y$, $b = 2^z 3^t$ и $c = 2^v 3^w$, където x, y, z, t, v и w са цели положителни числа. Сега от $a^2 = 2b^3 = 3c^5$ получаваме $2^{2x} 3^{2y} = 2^{3z+1} 3^{3t} = 2^{5v} 3^{5w+1}$. Това е възможно точно когато $2x = 3z+1 = 5v$ и $2y = 3t = 5w+1$. От равенството $2x = 5v$ следва, че съществува цяло число $i \ge 0$ така, че $x = 5i$ и следователно $v = 2i$. Сега от равенството $3z+1 = 5v$ намираме $3z = 10i - 1 = 9i + i - 1$. Това означава, че съществува цяло число $k \ge 0$ така, че $i - 1 = 3k$, т.е. $i = 3k+1$. Тогава $x = 15k+5,\ z = 10k+3$ и $v = 6k+2$. По същия начин от равенството $2y = 3t$ следва, че съществува цяло число $j \ge 0$, така, че $y = 3j$ и следователно $t = 2j$. Сега от равенството $2y = 5w+1$ намираме

$5w=6j-1=5j+j-1$. Това означава, че съществува цяло число $m \geq 0$ така, че $j-1=5m$, т.е. $j=5m+1$. Тогава $y=15m+3,\ t=10m+2$ и $w=6m+1$. Получаваме, че $abc=2^{31k+10}3^{31m+6}$. Оттук следва, че броят на делителите на abc е $(31k+11)(31m+7)\geq 77$, като равенство се достига при $k=m=0$.

24. Отг. С). Очевидно $n>20$, защото единицата не може да участва. Да предположим, че $n\leq 25$. Числата 13, 17, 19 и 23 не могат да участват, защото са взаимно прости с числата от 2 до 25. Освен това, всяко число в таблицата има поне две съседни и следователно числото 11 също не може да участва. Следователно броят на числата, които могат да участват в този случай, е $24-5=19<20$, което е невъзможно. Заключаваме, че $n\geq 26$. Ето пример за $n=26$:

2	4	8	6	3
12	16	22	18	9
15	10	26	24	21
5	25	20	14	7

25. Отг. С). Да означим куба по стандартния начин с $ABCDA_1B_1C_1D_1$. В едно множество с исканото свойство не може да има три ръба, които са два по два кръстосани. В противен случай четвъртият ръб ще има със сигурност общ връх с някой от трите. В това се убеждаваме, като разгледаме например ръбовете AB, DD_1 и B_1C_1, които са два по два кръстосани. Директно се вижда, че всеки от останалите 9 ръба BC, CD, DA, AA_1, BB_1, CC_1, A_1B_1, C_1D_1 и D_1A_1 има общ връх с някой от избраните три. След като в едно множество с исканото свойство няма три ръба, които са два по два кръстосани, можем да считаме, че четирите ръба лежат в две срещуположни стени. Двойките срещуположни стени в един куб са точно 3 на брой. С помощта на една двойка срещуположни стени можем да определим точно 4 множества с исканото свойство. За да се убедим, че е така, достатъчно е да разгледаме например стените $(ABCD)$ и $(A_1B_1C_1D_1)$. Възможните множества с ръбове в тези стени са: $\{AB, CD, A_1B_1, C_1D_1\}$, $\{AB, CD, B_1C_1, D_1A_1\}$, $\{BC, DA, B_1C_1, D_1A_1\}$ и $\{BC, DA, A_1B_1, C_1D_1\}$. Следователно общият броя множества с исканото свойство е $4.3=12$. Някои от тези множества обаче се повтарят. В разглеждания пример само второто и четвъртото множество не се получават от друга двойка срещуположни стени. В същото време първото множество се получава и от двойката срещуположни стени (ABB_1A_1) и (CDD_1C_1), а третото множество – съответно и от двойката срещуположни стени (BCC_1B_1) и (ADD_1A_1). Така, от всяка двойка срещуположни стени се получават 2 множества, които не могат са получат от друга двойка срещуположни стени, както и 2 множества, всяко от които се получава от още точно една друга двойка срещуположни стени. Следователно общият брой множества е $6+\frac{1}{2}\cdot 6=9$. Всъщност, множествата с исканото свойство са:

$\{AB, A_1B_1, CC_1, DD_1\}$, $\{BC, B_1C_1, DD_1, AA_1\}$, $\{CD, C_1D_1, AA_1, BB_1\}$, $\{DA, D_1A_1, BB_1, CC_1\}$, $\{AB, CD, B_1C_1, A_1D_1\}$, $\{BC, DA, C_1D_1, B_1A_1\}$, $\{AB, CD, A_1B_1, C_1D_1\}$, $\{BC, DA, B_1C_1, D_1A_1\}$, $\{AA_1, BB_1, CC_1, DD_1\}$. Един възможен начин за проверка е следният. В едно множество участват 4 ръба, които се определят от 8 различни върха. От друга страна броят на всички върхове на куба е 8. Следователно във всяко множество трябва да фигурират и осемте върха и то точно по веднъж.

2 КЛАС

1. D	**10. B**
2. A	**11. C**
3. E	**12. A**
4. C	**13. C**
5. C	**14. B**
6. B	**15. E**
7. A	**16. E**
8. B	**17. A**
9. E	**18. D**

3 – 4 КЛАС

1. C	**9. B**	**17. C**
2. C	**10. B**	**18. C**
3. B	**11. B**	**19. C**
4. E	**12. E**	**20. E**
5. B	**13. D**	**21. D**
6. A	**14. E**	**22. A**
7. D	**15. C**	**23. E**
8. C	**16. B**	**24. D**

5 – 6 КЛАС

1. C	**11. B**	**21. B**
2. C	**12. E**	**22. C**
3. A	**13. C**	**23. D**
4. E	**14. D**	**24. C**
5. E	**15. B**	**25. D**
6. B	**16. A**	**26. E**
7. D	**17. D**	**27. E**
8. B	**18. B**	**28. A**
9. B	**19. E**	**29. D**
10. D	**20. C**	**30. A**

7 – 8 КЛАС

1. D	**11. C**	**21. E**
2. A	**12. C**	**22. D**
3. B	**13. B**	**23. B**
4. A	**14. A**	**24. D**
5. C	**15. E**	**25. D**
6. C	**16. D**	**26. B**
7. E	**17. B**	**27. A**
8. A	**18. C**	**28. B**
9. B	**19. B**	**29. B**
10. E	**20. A**	**30. D**

9 – 10 КЛАС

1. B	11. B	21. C
2. C	12. B	22. C
3. D	13. A	23. B
4. A	14. E	24. E
5. E	15. C	25. E
6. C	16. D	26. D
7. E	17. D	27. B
8. C	18. D	28. C
9. C	19. C	29. D
10. E	20. B	30. E

11 – 12 КЛАС

1. A	11. D	21. B
2. B	12. C	22. C
3. A	13. D	23. A
4. C	14. D	24. A
5. D	15. B	25. D
6. C	16. A	26. B
7. C	17. D	27. C
8. C	18. D	28. D
9. C	19. A	29. C
10. B	20. B	30. C

СОП 3 – 4 КЛАС

1. C	6. C	11. D	16. C
2. E	7. B	12. E	17. D
3. B	8. B	13. C	18. E
4. A	9. B	14. B	19. D
5. D	10. E	15. C	20. C

СОП 5 – 6 КЛАС

1. C	6. D	11. C	16. B	21. D
2. C	7. B	12. D	17. C	22. E
3. A	8. B	13. B	18. B	23. A
4. E	9. D	14. A	19. C	24. D
5. B	10. B	15. D	20. C	25. A

СОП 7 – 8 КЛАС

1. D	6. C	11. C	16. C	21. D
2. A	7. E	12. B	17. B	22. B
3. B	8. A	13. E	18. E	23. A
4. A	9. B	14. D	19. D	24. B
5. C	10. C	15. B	20. B	25. D

СОП 9 – 10 КЛАС

1. B	**6. C**	**11. E**	**16. C**	**21. E**
2. D	**7. E**	**12. C**	**17. B**	**22. D**
3. E	**8. B**	**13. D**	**18. C**	**23. B**
4. C	**9. B**	**14. D**	**19. B**	**24. C**
5. E	**10. A**	**15. D**	**20. D**	**25. E**

СОП 11 – 12 КЛАС

1. B	**6. C**	**11. D**	**16. B**	**21. D**
2. A	**7. C**	**12. D**	**17. B**	**22. C**
3. C	**8. B**	**13. E**	**18. C**	**23. D**
4. D	**9. D**	**14. D**	**19. A**	**24. C**
5. C	**10. E**	**15. A**	**20. A**	**25. C**