Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

4 юни 2011 г.

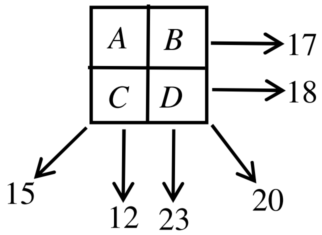
ТЕМА за 3 – 4 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

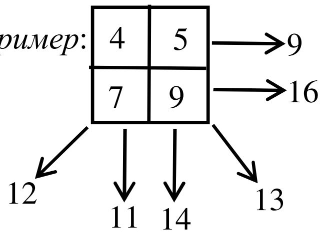
ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Днес е 4 юни 2011 г. и е събота. Какъв ден от седмицата ще бъде 15 септември 2011 г.?
A) вторник **B)** четвъртък **C)** петък **D)** събота **E)** неделя

2. Поставете по едно число в четирите квадратчета така, че сумите по двата хоризонтала, двата вертикала и двата диагонала да са равни на посочените числа. Кое число трябва да се постави в квадратчето с буквата *D*?

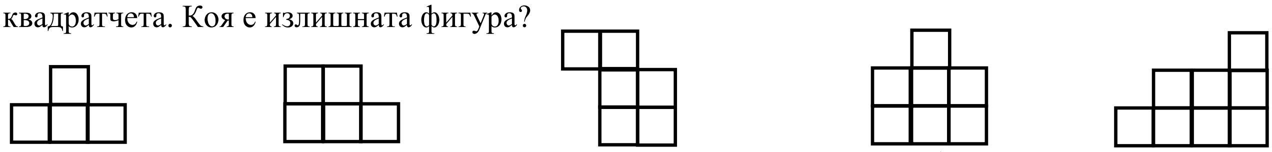


Пример:



A) 5 **B)** 7 **C)** 9 **D)** 11 **E)** 13

3. С четири от показаните фигури може да се образува квадрат без застъпване на малките квадратчета. Коя е излишната фигура?



A) **B)** **C)** **D)** **E)**

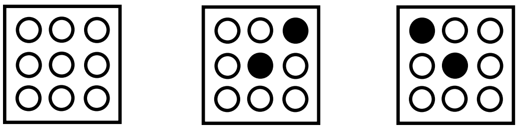
4. Часовникът у дома избързва с 3 минути на всеки час. Тази вечер в 21 часа го сверих. За колко часа трябва да го навия да звъни, за да ме събуди утре сутринта точно в 7 часа?
A) 6 ч 30 мин **B)** 7 ч 30 мин **C)** 6 ч 35 мин **D)** 7 ч **E)** 7 ч 45 мин

5. Васил, Огнян, Лъчо и Павел живеят на един и същ етаж в съседни апартаменти (два апартамента са съседни, ако номерата им са последователни числа). Всеки от тях отглежда по един домашен любимец и обича определена напитка. Васил живее в апартамент № 21. Огнян отглежда куче. Този, който отглежда папагал, обича спрайт, а този, който живее в апартамент № 24, обича фанта. Лъчо живее в съседен апартамент на апартамента, в който се отглежда хамстер, а съседите на този, който обича кола, са живущият в апартамент № 23 и този, който обича чай. Апартаментът на Павел в сравнение с апартамента на Огнян е по-далеч от апартамента на Васил. Един от четиримата отглежда котка. Кой е той?
A) Васил **B)** Огнян **C)** Лъчо **D)** Павел **E)** не може да се определи

6. Бойно поле с формата на квадрат е разделено на 25 участъка (малките квадратчета), както е показано. Два участъка са съседни, ако имат обща страна или общ връх. В 10 от участъците е поставена по една мина. За даден участък с числото в него е означен броят на съседните му минирани участъци. Открийте мините и означете с "+" участъците, в които те се намират.

1		**2**	**2**	1
2				
		5		
1		**4**		
			4	

7. В квадрат са разположени девет кръгчета, две от които трябва да се оцветят в черно. По колко различни начина може да стане това, ако две оцветявания са еднакви, когато квадратът с второто оцветяване може да се получи чрез завъртане на квадрата с първото оцветяване (например показаните две оцветявания са еднакви)?



Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

4 юни 2011 г.

ТЕМА за 5 – 6 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

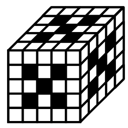
1. Хари Потър номерирал 100 карти с числата от 1 до 100. Той подредил картите една след друга по следния начин:

- най-напред всички карти с номера, кратни на 2 в нарастващ ред (2, 4, 6, ...);
- след това (от оставащите карти) всички карти с номера, кратни на 3 в нарастващ ред;
- после (от оставащите карти) всички карти с номера, кратни на 5 в нарастващ ред;
- после (от оставащите карти) всички карти с номера, кратни на 7 в нарастващ ред

и т. н. всички карти с номера, съответно кратни на 11, 13, ... и останалите прости числа до изчерпване на картите. На кое място е картата с номер 91?

A) 66-то **B)** 68-мо **C)** 75-то **D)** 77-мо **E)** 78-мо

2. Куб с ръб 5 *см* е съставен от 125 единични кубчета. Всяко зачернено кубче е начало на колона, състояща се от 5 кубчета. Колко кубчета ще останат след отстраняване на колоните, които започват със зачернено кубче?



A) 50 **B)** 57 **C)** 68 **D)** 74 **E)** 75

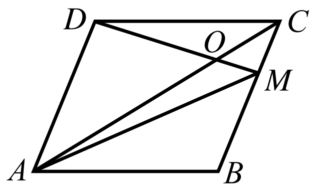
3. Какъв най-малък знаменател може да има сборът на двете несъкратими дроби $\frac{a}{600}$ и $\frac{b}{700}$?

A) 4200 **B)** 336 **C)** 210 **D)** 168 **E)** 42

4. Под звуците на валс на дансинга в бална зала танцували $\frac{3}{7}$ от присъстващите жени и $\frac{5}{8}$ от мъжете (валсът се танцува само по двойки "жена-мъж"). Кой от дадените отговори показва най-близо какъв процент от присъстващите на бала са танцували валс?

A) 51 % **B)** 50 % **C)** 52 % **D)** 25 % **E)** 27 %

5. На чертежа $ABCD$ е успоредник, точка M е от страната BC, правата DM пресича диагонала AC в точка O, а лицата на ΔABM и ΔCOM са съответно 8 *кв. см.* и 1 *кв. см.* Колко квадратни сантиметра е лицето на дадения успоредник?



A) 9 **B)** 12 **C)** 18 **D)** 24 **E)** 30

6. Числото a има 18 делителя (включително 1 и самото число), а числото b има 12 делителя (включително 1 и самото число). Намерете най-големия общ делител на числата a и b, ако най-малкото им общо кратно е равно на 4000.

7. Робот е програмиран така, че след задаване на някое естествено число той удвоява числото или размества цифрите му по произволен начин, а после продължава да извършва една от двете операции с получените резултати. Ако първоначално на робота е зададено числото 1 и получаваните резултати се изписват на монитор, кои от числата 2008, 2009, 2010, 2011 и 2012 не могат да се появят на монитора?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

4 юни 2011 г.

ТЕМА за 7 – 8 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. С 25 лева могат да се купят толкова шоколада, с колкото лева може да се купи 1 шоколад. Колко шоколада могат да се купят със 100 лева?

A) 20 **B)** 24 **C)** 25 **D)** 30 **E)** повече от 30

2. Да се намери броят на петорките цели числа (a,b,c,d,e), които изпълняват условията:

$abcde-a=\underbrace{111...1}_{2011}$ $abcde-b=\underbrace{333...3}_{2011}$ $abcde-c=\underbrace{555...5}_{2011}$

$abcde-d=\underbrace{777...7}_{2011}$ $abcde-e=\underbrace{999...9}_{2011}$.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

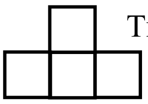
3. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ ($AB \parallel CD$ и $\angle BAD = 90^0$), за който $AD = DC$ и $\angle ABC = 45^0$. Външно за трапеца са построени равностранните триъгълници ADQ и DCP. Да се намери лицето на трапеца в квадратни сантиметри, ако лицето на ΔDPQ е 4 *кв. см*.

A) 15 **B)** 18 **C)** 21 **D)** 24 **E)** 30

4. Да се намери броят на всички точки в правоъгълна координатна система в равнината, чиито координати m и n (независимо дали m и n са съответно абсциса и ордината или обратното) са естествени числа и удовлетворяват равенството $\frac{1}{2011}=\frac{1}{m}+\frac{1}{n}$.

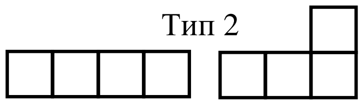
A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Разполагаме с фигури от тип 1 и тип 2, като тези от тип 2 са два вида. Дъска 8×8, разделена на 64 единични квадратчета, е покрита без застъпване с m ($m>0$) фигури от тип 1 и общо с $(16-m)$ фигури от тип 2 (от единия, от втория или от двата вида). Намерете възможно най-малката стойност на m.



Тип 1

Тип 2



A) 1 **B)** 2 **C)** 3 **D)** 4 **E)** повече от 4

6. Едно естествено число се нарича *щастливо*, ако цифрите му могат да се разделят на две групи така, че сумите на цифрите в двете групи са равни. Например числото 44 165 е щастливо, защото $4+6=1+4+5$. Кое е най-малкото петцифрено *щастливо* число N така, че числото $N+1$ е също *щастливо*?

7. Във всеки от върховете на $n-$ъгълник е поставена по една монета. На всеки ход се избират две монети и всяка от тях се премества в съседен връх. Възможно ли е да се съберат всички монети в един връх, ако: а) $n=2011$; б) $n=2010$; в) $n=2012$?

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

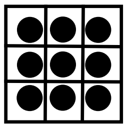
4 юни 2011 г.

ТЕМА за 9 – 10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. В клетките на квадратна таблица 3×3 е поставена по една пионка. Едновременно всички пионки се преместват в съседни клетки (две клетки са съседни, ако имат обща страна). Колко най-много празни клетки могат да се получат при това преместване?



A) 2 **B)** 3 **C)** 4 **D)** 6 **E)** 8

2. Сборът на всички цели числа x, които са решения на неравенството

$$\left(15+2x-x^2\right)\sqrt{-x^2+5x+14}\geq 0,\text{ е:}$$

A) 7 **B)** 9 **C)** 12 **D)** 19 **E)** неопределен

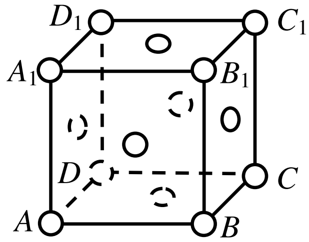
3. На откриването на спортен празник в училище "Кенгуру" 48 ученици, от които половината момичета, се строили в 8 редици по 6 ученици. По-късно към тях се присъединили още няколко ученици, от които половината били момчета. Всички заедно се строили в нов правоъгълник, по страните на който имало само момчета, а във вътрешността му – само момичета. Броят на присъединилите се ученици е:

A) 24 **B)** 20 **C)** 16 **D)** 12 **E)** 8

4. Точката M е среда на страната AC на остроъгълния триъгълник ABC, а AL е ъглополовяща на $\angle BAC$ ($L\in BC$). Точките P и Q са петите на перпендикулярите, спуснати от M и L към правата AB. Ако $AP:PQ:QB=3:5:2$, да се намери отношението $BM:AL$.

A) $\dfrac{\sqrt{69}}{7}$ **B)** $\dfrac{\sqrt{13}}{4}$ **C)** $\dfrac{3}{4}$ **D)** $\dfrac{\sqrt{65}}{3}$ **E)** $\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

5. Във всеки връх на куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ е записано числото $+1$ или -1, а върху всяка стена е записано произведението на числата в четирите върха на стената. Кое от посочените по-долу числа **НЕ Е** възможно да е равно на сумата от получените по този начин 14 числа?



A) -2 **B)** 0 **C)** 2 **D)** 6 **E)** 14

6. Естествените числа от 1 до n $(n>1)$ включително са записани едно след друго в някакъв ред така, че сумата на всеки две съседни числа е квадрат на естествено число. Намерете възможно най-малката стойност на n.

7. Върху окръжност са отбелязани 16 точки. По колко различни начина могат да се свържат всички тези точки по двойки с 8 хорди така, че никои две хорди да нямат обща точка?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

4 юни 2011 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Намерете сумата на всички реални корени на уравнението $\dfrac{\sqrt{3-x^2}}{1+\sqrt{3-x^2}}=x$.

A) -1 **B)** $\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ **C)** $\sqrt{5}$ **D)** $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

2. Даден е ΔABC, в който $\angle ACB=120^\circ$, радиусът на вписаната окръжност е r, а радиусът на външновписаната окръжност, допираща се до страната AB, е r_c. Ако отношението $\dfrac{r_c}{r}=m$ е цяло число, намерете възможно най-малката стойност на m.

A) 13 **B)** 14 **C)** 16 **D)** 19 **E)** 25

3. Числата 1, 2, 3, … , 9, 10 са записани по окръжност. Нека M е най-голямата от сумите на всички четворки съседни числа. Най-малката възможна стойност на M е:

A) 22 **B)** 23 **C)** 24 **D)** 25 **E)** 27

4. Върху черната дъска са написани естествените числа от 1 до 2011 включително. Ако x и y са две от числата, изтриваме ги и на тяхно място записваме числото $\varphi(x+y)$, където φ е функцията на Ойлер (т.е. $\varphi(k)$ е броят на числата от 1 до k включително, които са взаимно прости с k). Коя е най-малката възможна стойност на последното число на дъската?

A) 1 **B)** 2 **C)** 4 **D)** 5 **E)** по-голяма от 5

5. В триъгълна пирамида $ABCD$ всички ръбове са равни на $\sqrt{6}$, а M е такава точка от ръба AB, че $AM:BM=6:5$. Ако S_1 и S_2 са повърхнините, а V_1 и V_2 са обемите съответно на пирамидите $ACDM$ и $BCDM$, то сумата $\dfrac{S_1}{V_1}+\dfrac{S_2}{V_2}$ е равна на:

A) 12 **B)** 17 **C)** $\dfrac{3\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}$ **D)** $\dfrac{34\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$ **E)** $17\sqrt{6}$

6. На кое рационално число е равна стойността на израза $tg^6\dfrac{\pi}{7}-21\,tg^4\dfrac{\pi}{7}+35\,tg^2\dfrac{\pi}{7}$?

7. По колко различни начина могат да се разположат цифрите от 1 до 9 в таблица 3×3 (във всяка клетка по една цифра) така, че ако зачертаем произволен ред и произволен стълб на таблицата, оставащите цифри, четени от произволно място по посока на часовниковата стрелка или обратно на нея, образуват 4-цифрено число, за което сборът на първата и третата му цифра е равен на сбора на втората и четвъртата? (Два начина се считат за различни, ако съответните две таблици се различават поне по една клетка.)

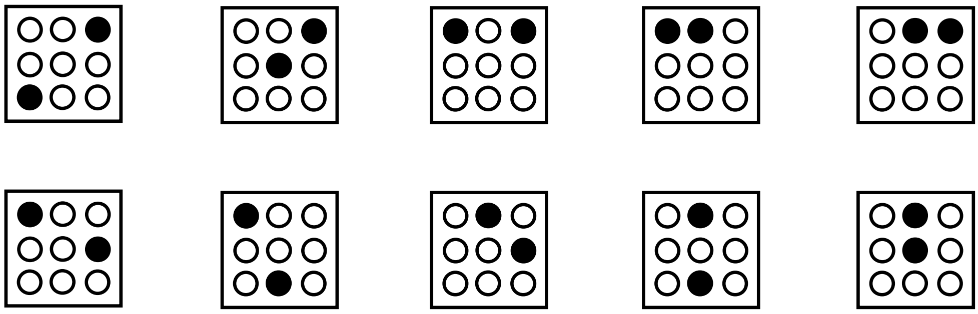
ОТГОВОРИ – НАЦИОНАЛЕН КРЪГ 4 ЮНИ 2011 Г.

	3-4 КЛАС	5-6 КЛАС	7-8 КЛАС	9-10 КЛАС	11-12 КЛАС
задача 1	B	E	A	D	B
задача 2	E	C	A	D	B
задача 3	B	D	D	D	B
задача 4	B	A	D	B	B
задача 5	A	D	B	B	B
задача 6		100	10 449	15	7

1		2	2	1
2	+	+		+
	+	5	+	+
1		4	+	+
		+	4	+

Решение на задача 7 от темата за 3-4 клас

Отг. 10. Различните оцветявания са 10 на брой и те са показани по-долу. Всяко вярно оцветяване се оценява с **1 точка**. Ако двете черни кръгчета са върху диагонал на квадрата, възможностите са 2; ако двете черни кръгчета са върху една страна на квадрата, възможностите са 3; ако двете черни кръгчета са върху две съседни страни на квадрата, възможностите са 3; ако двете черни квадратчета са върху средната колонка (или средния ред), възможностите са 2.



Решение на задача 7 от темата за 5-6 клас

Отг. 2010. Първоначално въведеното число 1 има остатък 1 при деление на 3. Да проследим какво става с остатъците при извършване на всяка от двете операции. При разместване на цифрите на едно число се запазва остатъкът при деление на 3. Това следва от признака за делимост на 3. Ако едно число има остатък 1, при удвояване новото число ще има остатък 2, а ако едно число има остатък 2, при удвояване новото число ще има остатък 1. Следователно в резултат на двете операции от едно число, което не е кратно на 3, не може да се получи число, кратно на 3. От дадените числа само 2010 е кратно на 3 и то не може да се получи на екрана. (**2 точки**)

По-долу е показано как от 1 може да се получи всяко едно от другите дадени числа.

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 251, 502, 1004, **2008**; (**2 точки**)

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 182, 364, 463, 926, 269, 538, 358, 716, 176, 352, 704, 470, 940, 409, 818, 188, 376, 752, 1504, 1045, 2090, **2009**; (**2 точки**)

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 46, 92, 184, 148, 296, 692, 1384, 2768, 2786, 5572, 2755, 5510, 1055, 2110, **2011**; (**2 точки**)

1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 281, 562, 265, 530, 503, 1006, **2012**. (**2 точки**)

Решение на задача 7 от темата за 7-8 клас

Да номерираме върховете на $n-$ъгълника последователно с числата от 1 до n по посока на часовниковата стрелка.

а) **Възможно е**. Тъй като 2011 е нечетно число, можем да изберем произволен връх и да местим последователно двойките равноотдалечени монети (спрямо този връх) към него със съответен брой ходове. Например в случая на 5-ъгълник да изберем върха с № 1 и да реализираме: I ход – преместване на монетите от № 2 и № 5 във връх № 1, II ход – преместване на монетите от № 3 и № 4 – съответно във върхове с № 2 и № 5, III ход – преместване на монетите от № 2 и № 5 във връх № 1. При $n = 2011$ процедурата е аналогична. (**1 точка**)

б) **Не е възможно**. Първоначално броят на монетите на нечетни позиции е равен на 1005, което е нечетно число. На всеки ход този брой се запазва или променя с 2 и следователно той остава нечетен. Твърдението е вярно и за броя на монетите на четни позиции. Ако монетите можеха да се съберат в един връх (независимо дали е с четен или нечетен номер), от казаното следва, че броят на монетите на четна или нечетна позиция (в зависимост от номера на въпросния връх) би бил нечетен. Но това е невъзможно, защото общият брой на монетите е 2010, което е четно число. Аналогично се процедира за всяко $n=4k+2$ (съществено в случая е, че $\frac{n}{2}=2k+1$ е нечетно число). (**4 точки**)

в) **Възможно е**. Да изберем връх № 2012 и да разгледаме двойките върхове, които са равноотдалечени от № 2012, т.е. двойките, сумата от номерата на които е равна на 2012: (1,2011), (2,2010), …, (1005, 1007). Със съответен брой ходове местим монетите от всяка двойка последователно в съседни върхове до окончателното им преместване в № 2012. В резултат на тази процедура в № 2012 се събират 2011 монети и остава 1 монета във върха с № 1006. Сега образуваме нова двойка – една монета от № 2012 и монетата от № 1006. Местим тези монети в съседни върхове в една и съща посока – например по часовниковата стрелка. Тези 2 монети отиват съответно в № 1 и № 1007. Продължаваме да ги местим в същата посока и те отиват съответно в № 2 и № 1008, а след още един такъв ход – съответно в № 3 и № 2009. Така стигаме до върхове с № 503 и № 1509 след общо 503 хода. На следващия ход преместваме монетата от № 1509 във върха с № 1510, а монетата от № 503 връщаме в № 502. По-нататък преместваме монетата от № 1510 в № 1511, а монетата от № 502 в № 501 и т.н., т.е. сега монетите се местят в противни посоки и след общо нови 503 хода ги събираме във върха с № 2012. Възможността за реализация на описаната процедура се определя от факта, че между 1006 и 2012 (без 1006 и 2012) има нечетен брой номера, както по посока на часовниковата стрелка, така и противно на нея, т.е. че $2012=4.503$. Аналогично се процедира за всяко $n=4k$. (**5 точки**)

Решение на задача 7 от темата за 9-10 клас

Отг. 1430. Ясно е, че ако точките са две, начинът е единствен. Ако точките са 4, има два начина. (**1 точка**) Нека точките са 6 и да ги означим последователно по посока на часовниковата стрелка с $A_1, A_2, \dots, A_6$. Ако свържем A_1 и A_2 или A_1 и A_6, то за останалите 4 точки има по два начина за свързване. Не е възможно свързване на A_1 и A_3 или A_1 и A_5, защото тогава A_2 и съответно A_6 ще бъдат изолирани. Ако свържем A_1 и A_4, останалите точки можем да свържем по единствен начин. Следователно начините са общо 5. (**2 точки**)

Нека точките са 8 и да ги означим отново последователно по посока на часовниковата стрелка с $A_1, A_2, \dots, A_8$. Както и по-горе, не е възможно свързване на A_1 и A_3, A_1 и A_5 или A_1 и A_7. При свързванията A_1A_2, A_1A_4, A_1A_6 и A_1A_8 се получават съответно 5, 2, 2 и 5 начина или общо 14. (**2 точки**) По-нататък разсъждаваме по аналогичен начин. Ако точките са 10, начините са 42. (**1 точка**) При 12 точки начините са 132 (**1 точка**) , при 14 точки начините са 429 (**1 точка**), а при 16 точки те са 1430. (**2 точки**)

Решение на задача 7 от темата за 11-12 клас

Отг. 72. Едно възможно разположение е следното:

7	8	9
4	5	6
1	2	3

Ако зачертаем първия ред и първия стълб, получаваме

5	6
2	3

и възможните 4-цифрени числа са 5632, 5236, 6325, 6523, 3256, 3652, 2563 и 2365, като за всяко от тях сборът на първата и третата цифра е равен на сбора на втората и четвъртата. Проверката за посочения пример е аналогична при всяко друго зачертаване на ред и стълб. Ако означим получаващото се 4-цифрено число с $\overline{a_1a_2a_3a_4}$, то $a_1+a_3=a_2+a_4$.

Нека a_{ij} $(i,j=1,2,3)$ е цифрата в $i-$ия ред и $j-$ия стълб на таблицата, т.е. разположението на 9-те цифри е следното:

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

Условието на задачата е изпълнено точно когато $a_{ij}+a_{mn}=a_{mj}+a_{in}$ $(i,j,m,n=1,2,3)$. Ще докажем, че за разположение с такова свойство сборът на числата по всеки от двата диагонала на таблицата е равен на 15, т.е. че $a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{13}+a_{22}+a_{31}=15$. Като зачертаем втория ред и втория стълб, от условието имаме $a_{11}+a_{33}=a_{13}+a_{31}$ и като прибавим към двете страни a_{22}, получаваме $a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{13}+a_{22}+a_{31}$, т.е. сборът на числата по всеки от диагоналите е един и същ. Нека той е a. Тогава $a_{12}+a_{21}=a_{11}+a_{22}=a-a_{33}$, т.е. $a_{12}+a_{21}+a_{33}=a$ и $a_{23}+a_{32}=a_{22}+a_{33}=a-a_{11}$, т.е. $a_{23}+a_{32}+a_{11}=a$. Сумата на всички числа в таблицата е $(a_{12}+a_{21}+a_{33})+(a_{23}+a_{32}+a_{11})+(a_{13}+a_{22}+a_{31})=a+a+a=3a$. От друга страна тази сума е $1+2+...+9=45$, откъдето $3a=45$, т.е. $a=15$. (**2 точки**) От направените разглеждания следва още, че $a_{12}+a_{21}+a_{33}=15$ и $a_{23}+a_{32}+a_{11}=15$. По същия начин можем да докажем, че $a_{12}+a_{23}+a_{31}=15$ и $a_{21}+a_{32}+a_{13}=15$. (**1 точка**) Тези четири равенства ще наричаме "правило на триъгълника". И така доказахме, че търсените таблици трябва да изпълняват следното условие: 6 суми от по 3 числа (числата по двата диагонала и тези от правилото на триъгълника) са равни на 15. При това 6-те суми се разделят на 2 групи от по 3 суми така, че във всяка група участват точно деветте цифри от 1 до 9:

$$a_{11}+a_{22}+a_{33}=a_{12}+a_{23}+a_{31}=a_{21}+a_{32}+a_{13}=15 \text{ и}$$
$$a_{13}+a_{22}+a_{31}=a_{12}+a_{21}+a_{33}=a_{23}+a_{32}+a_{11}=15.$$

Да обърнем още внимание, че в първата група участват числата от единия диагонал, а във втората група – числата от другия.

Числото 15 се разлага на сума от три различни цифри по 8 различни начина:

$$1+5+9,\ 1+6+8,\ 2+4+9,\ 2+5+8,\ 2+6+7,\ 3+4+8,\ 3+5+7 \text{ и } 4+5+6.$$

От тези разлагания ще изберем такива, които могат да участват в една група. Това може да стане по 2 начина: $1+5+9=2+6+7=3+4+8$ и $1+6+8=2+4+9=3+5+7$. (**2 точки**) Да разгледаме първата тройка от по 3 числа $(1,5,9), (2,6,7), (3,4,8)$. Тъй като в нея участват всички цифри от 1 до 9, каквото и друго разлагане да вземем от посочените по-горе 8 на брой, всяка от трите цифри в него ще се среща точно веднъж в разглежданата тройка от по 3 числа. Това означава, че каквото и друго разлагане да вземем, то ще има точно един общ елемент с всяка една от тройките $(1,5,9), (2,6,7), (3,4,8)$. Този общ елемент поставяме в централната клетка на таблицата, а двете тройки цифри – по двата диагонала. Например, ако вземем разлагането $1+6+8$, то има точно един общ елемент с всяка от тройките $(1,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,4,8)$ и като вземем например първата тройка $(1,5,9)$, получаваме двата диагонала. (**1 точка**) Аналогично постъпваме с другите две тройки:

5		**8**
	1	
6		**9**

2		**1**
	6	
8		**7**

3		**1**
	8	
6		**4**

За оставащите празни клетки трябва да използваме оставащите тройки. Така за лявата таблица оставащите тройки са $(2,6,7)$ и $(3,4,8)$, за средната таблица – съответно $(1,5,9)$ и $(3,4,8)$, а за дясната – съответно $(1,5,9)$ и $(2,6,7)$. Заради правилото на триъгълника комплектоването на таблиците е възможно по единствен начин (**1 точка**):

5	**2**	**8**
4	**1**	**7**
6	**3**	**9**

2	**3**	**1**
5	**6**	**4**
8	**9**	**7**

3	**2**	**1**
9	**8**	**7**
6	**5**	**4**

Аналогично постъпваме с разлаганията $2+4+9$ и $3+5+7$, като по този начин получаваме 6 нови таблици:

1	**7**	**4**
3	**9**	**6**
2	**8**	**5**

6	**5**	**4**
3	**2**	**1**
9	**8**	**7**

3	**6**	**9**
1	**4**	**7**
2	**5**	**8**

1	**4**	**7**
2	**5**	**8**
3	**6**	**9**

2	**8**	**5**
1	**7**	**4**
3	**9**	**6**

8	**9**	**7**
2	**3**	**1**
5	**6**	**4**

Остават неизползвани 2 разлагания: $2+5+8$ и $4+5+6$. С тях не е възможно да се образува таблица. Наистина, всяко от тези разлагания има общ елемент с всяко от останалите 7 разлагания и ако по описаната процедура използваме $2+5+8$ или $4+5+6$ за диагонал, например за диагонала $a_{11}+a_{22}+a_{33}$, то числата a_{21}, a_{32} и a_{31} трябва да са различни от числата по този диагонал, което в случая е невъзможно. (**1 точка**) Заключаваме, че с помощта на тройката от по 3 числа $(1,5,9)$, $(2,6,7)$, $(3,4,8)$ могат да се образуват 9 таблици (показаните по-горе). По абсолютно същия начин се разсъждава и за тройката от по 3 числа

$(1,6,8),\ (2,4,9),\ (3,5,7)$, с помощта на която можем да получим още 9 таблици, т.е. общо 18. От всяка от тези таблици чрез размяна на местата на числата във всеки две срещуположни ъглови клетки получаваме нови 3 таблици. Например за последната таблица по-горе могат да се разменят 8 с 4 и 5 с 7. Така стигаме до окончателния отговор на задачата: $18+18.3=18.4=72$. За пълнота на решението даваме деветте таблици, които се получават с помощта на тройката (всяка с 3 числа) $(1,6,8),\ (2,4,9),\ (3,5,7)$ (**2 точки**):

8	**7**	**9**
2	**1**	**3**
5	**4**	**6**

2	**3**	**1**
8	**9**	**7**
5	**6**	**4**

3	**2**	**1**
6	**5**	**4**
9	**8**	**7**

1	**3**	**2**
4	**6**	**5**
7	**9**	**8**

4	**1**	**7**
5	**2**	**8**
6	**3**	**9**

3	**9**	**6**
1	**7**	**4**
2	**8**	**5**

1	**2**	**3**
7	**8**	**9**
4	**5**	**6**

2	**1**	**3**
5	**4**	**6**
8	**7**	**9**

7	**1**	**4**
9	**3**	**6**
8	**2**	**5**