МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

1 септември 2011 г. – Вариант 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Дадени са числата $a = 2^{-\frac{1}{2}}$, $b = (-9)^{\frac{1}{3}}$, $c = \operatorname{tg}135^\circ$. **Колко от неравенствата** $b < c$, $a \le b$, $a < c$ **НЕ са верни?**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

2. Числата $A = 2 - \sqrt{3}$ **и** $B = 2 + \sqrt{3}$ **са:**

А) равни **Б) реципрочни**

В) рационални **Г) противоположни**

3. Недопустимите стойности на променливата y **в израза** $\left(\frac{1}{y^2} - 1\right) : \left(\frac{1}{y} + 1\right)$ **са числата:**

А) 0 **Б)** $0\ ;\ 1$ **В)** $-1\ ;\ 0$ **Г)** $-1\ ;\ 0\ ;\ 1$

4. Решенията на неравенството $1 + \frac{4x^2 - 9}{2x - 3} > 0$ **са:**

А) $x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right)$ **Б)** $x \in \left(-2; \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

В) $x \in (-2; +\infty)$ **Г)** $x \in (-\infty; -2) \cup \left(\frac{3}{2}; +\infty\right)$

5. Корените на уравнението $x^2 + 3x - 2 = 0$ **са означени с** x_1 **и** x_2. **Стойността на израза** $x_1(x_2 - 3) + x_2(x_1 - 3)$ **е:**

А) -5 **Б)** 0 **В)** 5 **Г)** 13

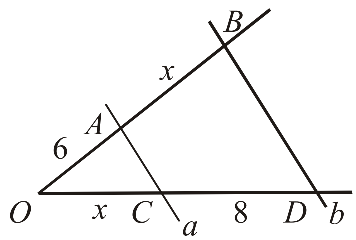
6. За $x \in [-2; 0]$**, най-малката стойност на функцията** $f(x) = 3x^2 - 12x + 4$ **е:**

А) -8 **Б)** 4 **В)** 8 **Г)** 40

7. Броят на решенията на уравнението $\sqrt{3-x} = -\sqrt{x-3}$ **е:**

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г) безброй много**

8. На чертежа правите a **и** b **са успоредни, като** $OA = 6$**,** $CD = 8$**,** $OC = AB = x$**. Стойността на** x **е:**



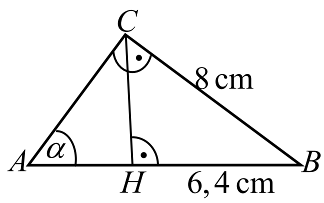
А) $2\sqrt{2}$ **Б)** $2\sqrt{3}$

В) 4 **Г)** $4\sqrt{3}$

9. Стойността на израза $\cos 390° - \sin 210°$ **е:**

А) $\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}$ **Б)** 0 **В)** 1 **Г)** $\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

10. На чертежа CH **е височина към хипотенузата** AB **на правоъгълния** $\triangle ABC$**. Ако** $BC = 8$ **cm, а** $BH = 6{,}4$ **cm, то** $\operatorname{tg}\alpha$ **е равен на:**



А) $\dfrac{4}{3}$ **Б)** $\dfrac{4}{5}$ **В)** $\dfrac{3}{4}$ **Г)** $\dfrac{3}{5}$

11. Сборът на четвъртия и десетия член на аритметична прогресия е равен на 4**. Сумата от първите** 13 **члена на тази прогресия е:**

А) 52 **Б)** 50 **В)** 26 **Г)** 25

12. От три фолклорни групи с 4, 6 **и** 10 **участници трябва да се избере един солист. По колко различни начина може да стане това?**

А) 10 **Б)** 20 **В)** 24 **Г)** 240

13. Ако $a \neq 0, b \neq 0$ **и** $\sqrt{\frac{a^3}{b^2}} = -\frac{a}{b}\sqrt{a}$**, то е вярно, че:**

А) $a < 0$ **и** $b < 0$ **Б)** $a > 0$ **и** $b < 0$

В) $a > 0$ **и** $b > 0$ **Г)** $a < 0$ **и** $b > 0$

14. Ако $M = -\log_3\left(\frac{1}{9}\right)$**, то стойността на** $9^{\log_3 M}$ **е равна на:**

А) 2 **Б)** 4 **В)** 9 **Г)** 3^6

15. Окръжността, вписана в равнобедрен триъгълник, разделя височината към основата му на две части, които са в отношение $1:3$**, считано от върха на триъгълника. Ако основата има дължина** 12 **cm, дължината на бедрото е:**

А) 8 **cm** **Б)** 10 **cm** **В)** 12 **cm** **Г)** 18 **cm**

16. Ако за допустимите стойности на α **е изпълнено равенството** $\frac{1+\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha} = 3$**, то** $\operatorname{tg}\alpha$ **е равен на:**

А) $\frac{1}{3}$ **Б)** 1 **В)** 3 **Г)** $3{,}3$

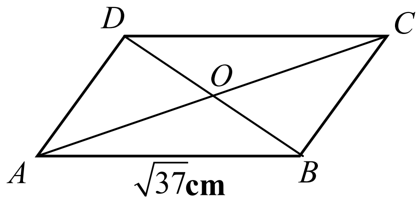
17. Триъгълникът ABC **е равнобедрен. Ако са дадени** $AC = BC = b$ **и** $\angle ACB = \gamma$**, то радиусът на описаната около триъгълника окръжност е:**

А) $\dfrac{b}{2\cos\frac{\gamma}{2}}$ **Б)** $b\cos\frac{\gamma}{2}$ **В)** $b\cos\gamma$ **Г)** $\dfrac{b}{2\sin\frac{\gamma}{2}}$

18.Триъгълникът ABC **има страни** $AB = 7$ **cm,** $BC = 3$ **cm и** $AC = 5$ **cm. Мярката на** $\angle ACB$ **е:**

А) $45°$ **Б)** $60°$ **В)** $120°$ **Г)** $135°$

19. В успоредника $ABCD$ $AB=\sqrt{37}$ **cm,** $AC=8$ **cm и** $BD=6$ **cm. Дължината на страната** BC **е равна на:**



А) $10\sqrt{3}$ **cm** **Б)** $\sqrt{37}$ **cm**

В) $\sqrt{13}$ **cm** **Г)** $\sqrt{10}$ **cm**

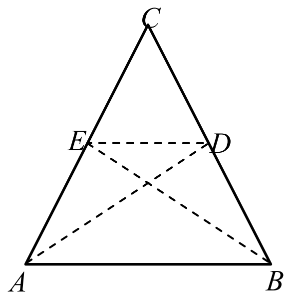
20. В равнобедрен трапец височината е равна на 6 **cm, а диагоналите му са взаимно перпендикулярни. Лицето на трапеца е равно на:**

А) $36\,\text{cm}^2$ **Б)** $36\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ **В)** $36\sqrt{3}\,\text{cm}^2$ **Г)** $36\sqrt{5}\,\text{cm}^2$

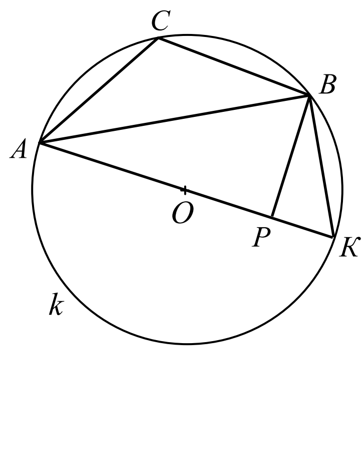
<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Намерете стойностите на x**, за които е изпълнено равенството** $\log_{\frac{1}{25}} x=-\frac{1}{2}$**.**

22. В равнобедрения $\triangle ABC$ $(AC=BC)$ **са построени ъглополовящите** AD **и** BE**. В четириъгълника** $ABDE$ $AB=13$**, а** $BD=5$**. Намерете косинуса на ъгъла при основата на** $\triangle ABC$**.**



23. На чертежа трапецът $AKBC$ **е вписан в окръжност** k **с диаметър** AK**. Ако** $\angle ACB=120^\circ$ **и** $BP\perp AK$ $(P\in AK)$**, то намерете отношението** $AP:PK$**.**



24. Намерете най-голямата стойност на израза $\frac{1}{2}+2\sin\alpha\cos\alpha$**,**

ако $\alpha\in[0^\circ;\,90^\circ]$**.**

25. В таблицата са дадени резултати от тест по математика:

Точки	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**	**11**	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**
Брой ученици	**1**	**1**	**1**	**2**	**2**	**0**	**2**	**3**	**1**	**1**	**4**	**2**	**3**	**1**	**2**

Да се определи медианата на статистическия ред, получен от данните за резултатите от теста.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Да се реши системата уравнения:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 5 \\ \dfrac{4}{3}xy = \dfrac{8}{3} \end{cases}$$

27. С помощта на цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5 са записани всички възможни трицифрени числа с различни цифри. Каква е вероятността случайно избрано число от записаните да е четно?

28. Даден е успоредник $ABCD$, в който $AB = 3AD$. През средата M на AD и точка N от страната AB е построена права, която пресича продължението на страната CB в точка Q. Ако $AN = 3$ cm и $BQ = 10$ cm, намерете периметъра на успоредника.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 0$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+co\,s\beta=2co\,s\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 01 септември 2011 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**В**	2
2	**Б**	2
3	**В**	2
4	**Б**	2
5	**В**	2
6	**Б**	2
7	**Б**	2
8	**Г**	2
9	**Г**	2
10	**А**	2
11	**В**	3
12	**Б**	3
13	**Б**	3
14	**Б**	3
15	**Б**	3
16	**А**	3
17	**А**	3
18	**В**	3
19	**В**	3
20	**А**	3
21	5	4
22	$\frac{4}{5}$	4
23	$3:1$	4
24	$\frac{3}{2}=1,5$	4
25	10,5	4
26	(2;1) (1;2) (-2;-1) (-1;-2)	10
27	$\frac{13}{25}=52\%$	10
28	$P_{ABCD}=40\ cm.$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване на задача 26.

1.Преобразуване на системата чрез заместване $\begin{vmatrix} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 + y^2 = 5 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y = \dfrac{2}{x} \\ x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5 \end{vmatrix}$ ***(1 т.)***

2. Отчитане, че $x = 0$ ***не е решение*** ***(1 т.)***

2. Решаване на уравнението $x^2 + \dfrac{4}{x^2} = 5 \Leftrightarrow x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ***и получаване на корените му*** $\pm 4; \pm 1$

- за привеждане във вида $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ ***(1 т.)***

- за полагане $t = x^2$ ***и решаване на квадратното уравнение*** $t^2 - 5t + 4 = 0$ ***(2 т.)***

- за решаване на уравненията $x^2 = 1;\ x^2 = 4$ ***и намиране на съответните стойности на*** y ***(4 т.)***

3. Оформяне на решенията (-2;-1) (-1;-2) (1;2) (2;1) ***(1 т.)***

27. Критерии за оценяване на задача 27.

1. Определяне броя на всички възможности за запис на трицифрено число :
$V_6^3 - V_5^2 = 100$ ***(2 т.)***

2. Определяне на възможностите за запис на четно трицифрено число

- завършващо с цифрата 0 ***:*** $V_5^2 = 20$ ***(2 т.)***

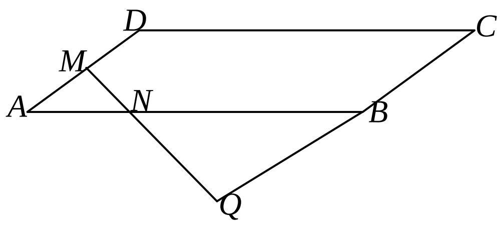
- завършващо с цифрата 2 ***или цифрата*** 4 ***:*** $2(V_5^2 - V_4^1) = 32$ ***(2 т.)***

и общия брой благоприятни възможности е $20 + 32 = 52$ ***(2 т.)***

3. Намиране на вероятността за запис на четно трицифрено число
$\dfrac{52}{100} = \dfrac{13}{25} = 52\%$ ***(2 т.)***

28. ***Нека*** $BC = a$***. Тогава*** $AB = 3a$***. (1т.)***

От подобието $\triangle QBN \sim \triangle MAN$ ***следва, че*** $\dfrac{QB}{AM} = \dfrac{BN}{AN}$***.(2 т.)***



Получава се уравнението $\dfrac{10}{\frac{a}{2}} = \dfrac{3a-3}{3}$ ***(1т.)***

$\dfrac{20}{a} = \dfrac{3(a-1)}{3} \Leftrightarrow a^2 - a - 20 = 0$, $a_1 = -4,\ a_2 = 5$, $a_1 = -4 < 0$
не е решение, а $a_2 = 5$ ***е решение*** ***(3 т.)***

Получава се, че $BC = 5$ ***cm, а*** $AB = 15$ ***cm.*** ***(2 т.)***

Периметърът на успоредника $P_{ABCD} = 40$ ***cm.*** ***(1 т.)***