Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 30 април 2011 г.

Верният отговор на всяка задача от 1. до 15. включително се оценява с 1 точка.

1. Стойността на израза $(2a+3)^2 - 4|a-1| + (3-2a)(2a+3)$ при $a = \frac{3}{4}$ е равна на:

А) -13 **Б)** $\frac{15}{4}$ **В)** 26 **Г)** $\frac{53}{4}$

2. Ако $x - y = 1$ и $y^2 - x^2 = -9$, то сборът $x + y$ е равен на:

А) 1 **Б)** -1 **В)** 9 **Г)** -9

3. Намерете всички решения на уравнението $|5x - 7| = 7 - 5x$.

А) $x = -\frac{7}{5}$ **Б)** $x = 0$ **В)** $x = 0$ и $x = \frac{7}{5}$ **Г)** друг отговор

4. При разлагане на множители на израза $8x^3 + 12x^2y - 2xy^2 - 3y^3$ един от множителите може да е:

А) $2x + y$ **Б)** $4x - 3y$ **В)** $4x + 3y$ **Г)** $2x - 3y$

5. Коренът на уравнението $\frac{3x-2}{2} - 3 = \frac{4x+1}{5}$ е равен на:

А) -6 **Б)** 6 **В)** $\frac{2}{3}$ **Г)** $-\frac{2}{3}$

6. Намерете броя на различните числа, които са решения на уравнението:

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x-3)(x-4)(x-5).$$

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** повече от 2

7. Ако $2\left|x - \frac{1}{2}\right| - 3|1 - 2x| = -8$, то

А) $x = -1,5$ или $x = 2,5$ **Б)** $x = 1,5$ или $x = -2,5$
В) $x = -3,5$ или $x = 4,5$ **Г)** $x = 3,5$ или $x = -4,5$

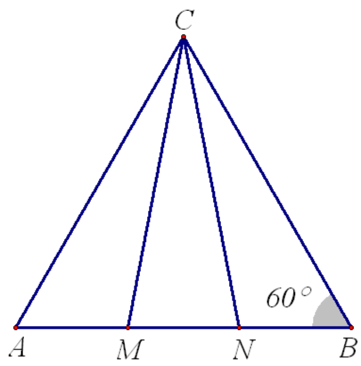
8. Ани намислила едно число, извадила го от 12 и повдигнала резултата на квадрат. Получила 81. Кое от посочените числа е възможно да е намислила Ани?

А) 9 **Б)** 15 **В)** 21 **Г)** 27

9. Ако увелича широчината на един правоъгълник с 20% и намаля дължината му с 10%, ще получа квадрат. Ако обиколката на началния правоъгълник е 84 *см*, на колко *кв.см* е равно лицето му?

А) 432 **Б)** 324 **В)** 234 **Г)** друг отговор

10. Точките M и N са разположени върху страната AB на ΔABC така, че $AM = BN$ и $CM = CN$. Ако $\sphericalangle ABC = 60°$, намерете градусната мярка на $\sphericalangle ACB$.



А) $45°$ **Б)** $75°$

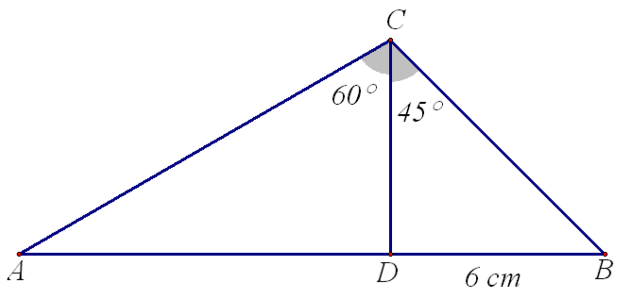
В) данните са недостатъчни

Г) друг отговор

11. Разликата на два съседни ъгъла е 40°. По-малкият от тези ъгли е равен на:

А) 70° **Б)** 50° **В)** 25° **Г)** друг отговор

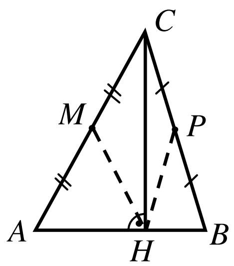
12. В ΔABC отсечката CD ($D \in AB$) е височина, $\sphericalangle ACD = 60°$ и $\sphericalangle BCD = 45°$. Ако $BD = 6\,cm$, каква е дължината на AC?



А) $9\,cm$ **Б)** $10\,cm$ **В)** $12\,cm$

Г) данните са недостатъчни

13. В остроъгълния ΔABC е построена височината CH ($H \in AB$). Точките M и P са средите съответно на страните AC и BC. Ако $\sphericalangle ABC + \sphericalangle BAC = 125°$, то градусната мярка на $\sphericalangle MHP$ е:



А) 45° **Б)** 55° **В)** 65°

Г) данните са недостатъчни

14. Кое от посочените числа не може да е равно на произведението от цифрите на едно трицифрено число?

А) 164 **Б)** 168 **В)** 180 **Г)** 192

15. Правите, съдържащи две от ъглополовящите на един триъгълник, образуват ъгъл, равен на 38°. На колко градуса е равен най-големият ъгъл в този триъгълник?

А) 104^0 **Б)** 112^0 **В)** 142^0 **Г)** 161^0

Верният отговор на всяка задача от 16. до 35. включително се оценява с 2 точки.

16. Колко на брой са стойностите на параметъра m, при които многочленът $\left(mx^2+x-1\right)^2-(x+m)(x-2)\left(x^2+2x+4\right)$ е от трета степен?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

17. Разполагаме с 3 литра 5%-ен солен разтвор и 5 литра 11%-ен солен разтвор. Двата разтвора се смесват. Намерете концентрацията на сол в новия разтвор.

А) 7,25% **Б)** 8,25% **В)** 16% **Г)** друг отговор

18. Да се намери най-голямото цяло число, което е решение на неравенството:

$$\frac{(2+x)^2}{3}-\frac{x-3}{2}\leq 4-\frac{(2-x)(x+2)}{3}-\frac{5x}{6}.$$

19. Посочете равенството, което не е тъждество.

А) $a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc=\dfrac{(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2}{2}$;

Б) $\left(a^2-4a+16\right)(a+4)(-4+a)\left(a^2+4a+16\right)=a^6-2^{12}$

В) $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a-b-c)(a+b-c)$

Г) $\left((a+b+2c)^2-2(a+c)(b+c)\right)^2-2(a+c)^2(b+c)^2=(a+c)^4+(b+c)^4$

20. Посочете най-голямото число.

А) $\dfrac{19^3-9.19^2}{19^2}$ **Б)** $\dfrac{-3^5.(-9)^2}{27^3}:\left(-\dfrac{1}{3}\right)^3$ **В)** $\dfrac{2^{2011}+2^{2011}}{(-4)^{1005}}$ **Г)** $\dfrac{\left(-2^5\right)^3 27^5}{96.81^6}:\left(\dfrac{3}{2}\right)^4$

21. Многочленът $P=n^2\left(n^2+1\right)-(n-1)(n-2)$ е разложен на произведение от два многочлена от втора степен. Единият от тези два многочлена е равен на:

А) n^2+n+2 **Б)** n^2+n+1 **В)** n^2+n-2 **Г)** n^2+n-1

22. Колко са двуцифрените числа $\overline{ab}$, които притежават свойството $\overline{ab}+\overline{ba}=132$?

А) 9 **Б)** 7 **В)** 4 **Г)** 6

23. За коя стойност на параметъра b уравнението $2ax+a+2=bx+3b$ има решение за всяка стойност на параметъра a?

А) за всяка **Б)** $b=\dfrac{2}{3}$ **В)** $b=\dfrac{3}{4}$ **Г)** $b=\dfrac{4}{5}$

24. При пресичането на две успоредни прави с трета се получават осем ъгъла. Сборът от мерките на пет от тях е 351°. Намерете мярката на най-големия от споменатите осем ъгъла.

А) 123° **Б)** 142° **В)** 151° **Г)** данните са недостатъчни

25. Две спирки са на разстояние 1 *км* една от друга. По разписание тролеят трябва да се движи с 40 *км/ч* между тях. Той обаче пристигнал на първата спирка с 1 минута закъснение, поради което там се събрали повече хора и качването им отнело 27 секунди повече от предвиденото по разписание. С колко *км/ч* би трябвало да се движи тролеят, за да пристигне на следващата спирка точно по разписание?

А) 60 **Б)** $66\frac{2}{3}$ **В)** 80 **Г)** 1200

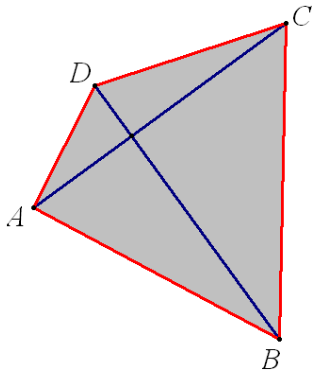
26. Катер изминава 60 километра по течението на една река за 3 часа и 45 минути. Скоростта на течението на реката е 3 *км/ч*. Същият катер ще измине 52 километра срещу течението на тази река за:

А) 4 часа **Б)** 5 часа и 20 минути **В)** 5 часа **Г)** 5 часа и 12 минути

27. Коя е най-малката цяла стойност на параметъра a, при която сборът от корените на уравненията $\frac{2x-a}{2}=a+2$ и $\frac{3x-a}{2}=2-a$ е по-голям от 1?

А) -1 **Б)** -2 **В)** -3 **Г)** друг отговор

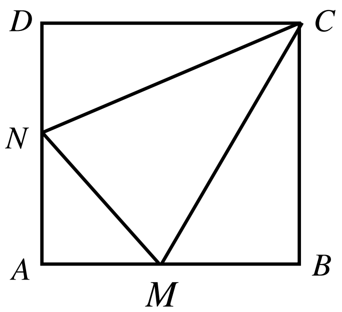
28. Даден е четириъгълник $ABCD$ с перпендикулярни и равни диагонали. Ако лицето на $ABCD$ е $32cm^2$, то дължината на всеки от диагоналите е равна на:



А) $4{,}5cm$ **Б)** $6cm$

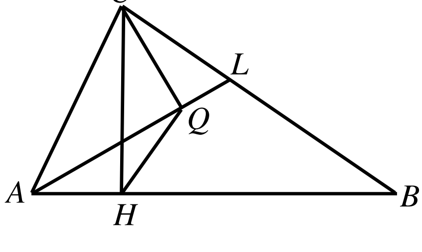
В) $8cm$ **Г)** $12{,}5cm$

29. В квадрат $ABCD$ точките M и N са средите съответно на страните AB и AD. Отношението на лицата на триъгълниците AMN и NMC е:



А) 1:2 **Б)** 1:4 **В)** 2:3 **Г)** 1:3

30. Даден е правоъгълен ΔABC $(\sphericalangle ACB=90°)$. Ъглополовящата на $\sphericalangle BAC$ пресича BC в точка L. Височината на ΔABC, спусната от върха C, пресича AB в точка H. Височината на ΔALC, спусната от върха C, пресича AL в точка Q. Да се намери мярката на $\sphericalangle CHQ$, ако $AH=CQ$.

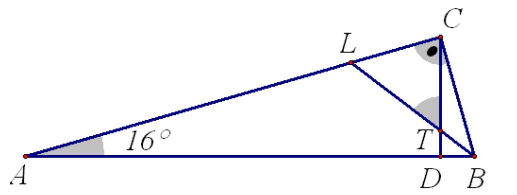


А) 18° **Б)** 24° **В)** 30° **Г)** 36°

31. В равнобедрен ΔABC ($AC = BC$) ъглите при основата AB са равни на $20°$. Ъгълът между правите, съдържащи височините на триъгълника от върховете при основата, е равен на:

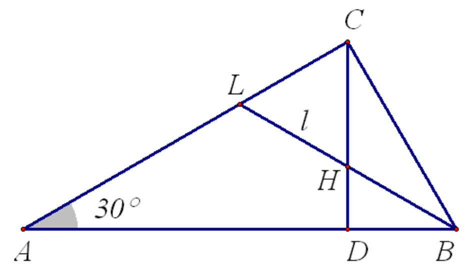
А) $20°$ **Б)** $35°$ **В)** $50°$ **Г)** друг отговор

32. Ако в правоъгълен триъгълник ABC ($\sphericalangle ACB = 90°$) е известно, че $\sphericalangle CAB = 16°$, то острият ъгъл между височината CD ($D \in AB$) и ъглополовящата BL ($L \in AC$) е равен на:



А) $47°$ **Б)** $53°$ **В)** $63°$ **Г)** $74°$

33. Ако в правоъгълен ΔABC ($\angle ACB = 90°$) е известно, че $\angle CAB = 30°$, а дължината на ъглополовящата при върха B е l, то височината към хипотенузата на ΔABC е равна на:



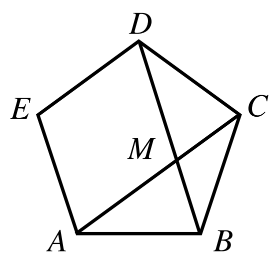
А) $\frac{l}{3}$ **Б)** $\frac{2l}{3}$ **В)** $\frac{l}{4}$ **Г)** $\frac{3l}{4}$

34. Обиколката на равнобедрен триъгълник е 35 *см*. Две от страните му се отнасят както 3 : 1. Страните на този триъгълник имат дължини:

А) непременно 7 *см*, 7 *см*, 21 *см* **Б)** непременно 15 *см*, 15 *см*, 5 *см*

В) 15 *см*, 15 *см*, 5 *см* или 7 *см*, 7 *см*, 21 *см* **Г)** непременно 14 *см*, 14 *см*, 7 *см*

35. Даден е правилен петоъгълник $ABCDE$. Диагоналите AC и BD на петоъгълника се пресичат в точка M. Да се намери градусната мярка на $\sphericalangle AMB$.



А) $36°$ **Б)** $64°$ **В)** $72°$ **Г)** $80°$

Верният отговор на всяка задача от 36. до 50. включително се оценява с 3 точки.

36. От градовете A и B се движат един срещу друг два камиона съответно със скорости 50 km/h и 60 km/h. Да се намери разстоянието между A и B в километри, ако камионът от B е тръгнал 15 min след този от A и двата камиона са се срещнали в момента, когато камионът от A е изминал с 3 km повече от половината на пътя между A и B.

37. Ани имала цветна леха, имаща формата на правоъгълник с широчина 2 *м*. Тя разширила лехата с по 50 *см* от всяка от четирите страни. Така площта на лехата се увеличила с 60%. Колко метра е била дължината на първоначалната леха?

38. Пътят между две гари A и B в началото е наклонен нагоре, след това е хоризонтален и накрая е наклонен надолу. Влак изминава разстоянието от A до B за 2 h 54 min, като скоростта на влака по наклонената нагоре част от пътя е 30 km/h, по хоризонталната част е 40 km/h, а по наклонената надолу част е 50 km/h. Колко километра е дълга хоризонталната част от пътя, ако тя е по-дълга от наклонената нагоре част с 10km и е с 5km по-къса от наклонената надолу част?

39. Числата a и b са положителни и изпълняват условията $\frac{a+1}{b}=\frac{b-1}{a}$ и $\frac{a}{3}+\frac{b}{4}=9$. На колко е равна сумата $a+b$?

40. Два багера могат да изкопаят заедно канал за 6 часа. Ако първият багер копае сам 2 часа, вторият багер трябва да копае сам още 18 часа, за да бъде изкопан каналът. Вторият багер копал сам в продължение на 8 часа. Колко часа трябва да копаят двата багера заедно, за да изкопаят канала докрай?

41. В два 100-литрови резервоара има разтвори на сярна киселина. В първия резервоар има 60 литра 8%-ен разтвор, а във втория има 40 литра 17%-ен разтвор. Отначало от първия резервоар преляли 8 литра разтвор във втория, а след това от втория преляли 8 литра разтвор в първия. Колко процента е концентрацията на сярна киселина в първия резервоар след преливанията?

42. Ако n е цяло положително число, то колко най-много от числата $6n^2+6n+3$, n^2+3n+2, $6n^2+7n+2$ и n^2+2n+6 могат да са прости?

А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** 3

43. Работник свършил $\frac{2}{3}$ от дадена работа за a минути, след което увеличил производителността си с $p\%$ и извършил останалата част от работата за b минути, $0<b<\frac{1}{2}a$. Тогава p е със сигурност равно на:

А) $\frac{100}{3}(a-b)$ **Б)** $50\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{3}b\right)$ **В)** $\frac{100}{a}\left(\frac{2a}{3}-\frac{b}{3}\right)$ **Г)** $\frac{50}{b}(a-2b)$

44. Трима приятели отишли на екскурзия. Никола носел 4 сандвича, Пешо носел 7 сандвича, а Ясен не носел сандвичи (забравил ги). На обяд те си поделили сандвичите поравно. От благодарност Ясен дал на другите двама общо 11 бонбона. Колко бонбона е получил Пешо, ако те с Никола са си ги поделили справедливо?

45. Един работник трябвало да произведе определено количество детайли за определено време, като произвежда по 12 детайла на ден. След втория ден той увеличил производителността си с $33\frac{1}{3}\%$ и така работил 2 дни. След това поради заболяване отсъствал 5 дни. Като се върнал на работа, работникът продължил да работи до края на срока с новата норма, но в крайна сметка произвел 20 детайла по-малко от плануваното. Колко са произведените детайли?

46. Двама велосипедисти тръгват едновременно един срещу друг, съответно от A към B и от B към A. Те се движат с постоянни скорости и след като стигнат съответния краен пункт, се връщат обратно без да променят скоростите си. Достигайки новия краен пункт, те се връщат отново обратно без да променят скоростите си и т.н. Времето от старта до третата среща на двамата велосипедисти по маршрута от A до B е точно 1 час. Колко минути изминават от третата до четвъртата им среща, ако велосипедистите само се срещат и нито веднъж не се застигат?

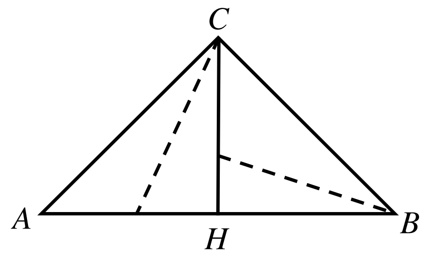
А) 24 **Б)** 20 **В)** 15 **Г)** друг отговор

47. В правоъгълна координатна система Oxy с единична отсечка 1 *см* са дадени точките $A(6;0)$ и $B(0;3)$. За колко точки M в тази система лицата в квадратни сантиметри на триъгълниците AOM, BOM и ABM се изразяват с прости числа?

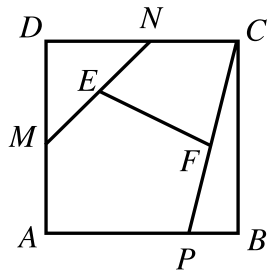
А) 0 **Б)** 1 **В)** 2 **Г)** повече от 2

48. На колко *кв. см* е равно лицето на правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB = 28\,см$, ако ъглополовящата от върха C в триъгълника AHC, където CH ($H \in AB$) е височината в ΔABC, е равна на ъглополовящата от върха B в триъгълника BHC?

А) 112 **Б)** 168 **В)** 392 **Г)** друг отговор



49. Даден е квадрат $ABCD$ със дължина на страната 4 *см*. Точките M и N са средите съответно на страните AD и CD, а точка $P \in AB$ е такава, че $PB = 1\,см$. Да се намери отношението на лицата на петоъгълника $APFEM$ и четириъгълника $EFCN$, където E и F са средите съответно на отсечките MN и PC.



А) $\frac{3}{2}$ **Б)** $\frac{19}{8}$ **В)** $\frac{11}{5}$ **Г)** $\frac{13}{6}$

50. Една подредба на буквите от думата ЗЪБОЛЕКАР наричаме "болезнена", ако в нея се среща думата БОЛКА, съставена от поредни букви в този ред. Колко пъти болезнените подредби са по-малко от останалите подредби?

Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ – ТЕСТ ПО МАТЕМАТИКА
НАЦИОНАЛЕН КРЪГ – 30 април 2011 г.

ОТГОВОРИ И РЕШЕНИЯ

1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
В	В	Г	А	Б	Б	А	В	А	Г
11	**12**	**13**	**14**	**15**	**16**	**17**	**18**	**19**	**20**
А	В	Б	А	А	В	Г	–1	В	Б
21	**22**	**23**	**24**	**25**	**26**	**27**	**28**	**29**	**30**
Г	Б	Г	А	Г	Г	А	В	Г	В
31	**32**	**33**	**34**	**35**	**36**	**37**	**38**	**39**	**40**
Г	Б	Г	Б	В	84	15	40	31	4
41	**42**	**43**	**44**	**45**	**46**	**47**	**48**	**49**	**50**
9	Б	Г	10	184	А	Б	Г	В	3023

Задачите с отворен отговор са с номера 18, 36, 37, 38, 39, 40, 41, 44, 45, 50 (общо 10).

1. Отг. В).

2. Отг. В).

3. Отг. Г). Ако x е решение, то дясната част на уравнението е неотрицателна, т.е. $7-5x \geq 0$ и тогава $|5x-7| = -5x+7$. Получаваме, че $-5x+7 = 7-5x$, което е изпълнено за всяко x. Заключаваме, че всяко x, за което $7-5x \geq 0$, т.е. $x \leq \frac{7}{5}$, е решение на задачата.

4. Отг. А).

$$8x^3 + 12x^2y - 2xy^2 - 3y^3 = 4x^2(2x+3y) - y^2(2x+3y) = (2x-y)(2x+y)(2x+3y).$$

5. Отг. Б).

6. Отг. Б). Уравнението може да се запише във вида:

$$(x-3)\left[(x-4)(x-5)-(x-1)(x-2)\right] = 0 \Leftrightarrow 6(x-3)^2 = 0, \text{ откъдето } x = 3.$$

7. Отг. А). Уравнението е равносилно с $|2x-1| - 3|2x-1| = -8$, а следователно и с $|2x-1| = 4$. Решенията на последното уравнение са $x = -1{,}5$ и $x = 2{,}5$.

8. Отг. В). Ако намисленото число е x, от условието следва, че $(12-x)^2=81$, т.е. $(12-x)^2=9^2$ и следоветолно $12-x=9$ или $12-x=-9$. Заключаваме, че намисленото число може да е $12-9=3$ или $12+9=21$.

9. Отг. А). Ако правоъгълникът има дължина *a см* и широчина *b см*, то 0,9*a* = 1,2*b*. Оттук следва, че ако *a* = 4*x*, то *b* = 3*x* и 14*x* = 84, т.е. *x* = 6. Търсеното лице е 4.6.3.6= 432 *кв.см*.

10. Отг. Г). По първи признак $\Delta AMC \cong \Delta BNC$, откъдето следва, че $AC=BC$. Следователно равнобедреният ΔABC е равностранен, защото има ъгъл, равен на $60°$ (по условие $\sphericalangle ABC=60°$). Тогава $\sphericalangle ACB=60°$.

11. Отг. А). Търсеният ъгъл е равен на половината от $180^\circ-40^\circ=140^\circ$, т.е. на 70°.

12. Отг. В). Като използваме свойството на катет срещу ъгъл от 30°, намираме:

$$AC=2CD=2BD=12\ cm.$$

13. Отг. Б). От свойството на медианата в правоъгълен триъгълник получаваме $MH=MC$ и $PH=PC$. Тогава:

$$\sphericalangle MHP=\sphericalangle MHC+\sphericalangle PHC=\sphericalangle MCH+\sphericalangle PCH=\sphericalangle ACB=$$
$$=180^\circ-\left(\sphericalangle ABC+\sphericalangle BAC\right)=180^\circ-125^\circ=55^\circ$$

14. Отг. А). Имаме 168 = 3.7.8, 180 = 4.5.9 и 192 = 3.8.8, докато числото 164 = 4.41 не може да се представи като произведение от цифрите на едно трицифрено число, защото 41 е просто число.

15. Отг. А). Напомняме, че под ъгъл между две прави се разбира по-малкият от ъглите, които образуват правите. От теоремата за външен ъгъл следва, че ъгълът между правите, съдържащи две от ъглополовящите, е равен на полусбора на ъглите, които се разполовяват от ъглополовящите. Следователно сборът на тези ъгли е 2.38º = 76º, а третият ъгъл в дадения триъгълник е равен на 180º – 76º = 104º. Тъй като намереният ъгъл е тъп, той е най-големият.

16. Отг. В). Коефициентът пред четвъртата степен в нормалния вид на многочлена е m^2-1, а пред третата степен е m. Коефициентът пред четвъртата степен се анулира при $m=\pm1$, като и при двете стойности коефициентът пред третата степен е ненулев.

17. Отг. Г). $\dfrac{3.5+5.11}{8}=\dfrac{70}{8}=\dfrac{35}{4}=8\dfrac{3}{4}=8,75\%$.

18. Отг. -1**.** Решенията на неравенството са $x\le-\dfrac{1}{10}$ и следователно търсеното най-голямо цяло число е -1.

19. Отг. В). Равенството е нарушено например при $a=2$, $b=c=1$.

20. Отг. Б). Числата от **В)** и **Г)** са отрицателни, това от **А)** е 10, а от **Б)** е 27.

21. Отг. Г). Нека $n^2 = a, \quad n-2=b$.
Тогава $P = a(a+1)-b(b+1) = a^2-b^2+a-b = (a-b)(a+b+1) =$
$= (n^2-n+2)(n^2+n-1)$.

22. Отг. Б). Равенството може да се запише във вида $11a+11b=132$, откъдето $a+b=12$. Като използваме, че a и b са цифри, получаваме всички възможности: 39, 48, 57, 66, 75, 84 и 93, т.е. общо 7.

23. Отг. Г). Можем да запишем уравнението във вида $(2a-b)x = 3b-a-2$. Ако в това уравнение изберем $a=\frac{1}{2}b$, ще получим уравнението $0x = \frac{5}{2}b-2$. Според условието последното уравнение трябва да има решение. Това е изпълнено точно тогава, когато $b=\frac{4}{5}$. Лесно може да се провери, че при тази стойност на b даденото уравнение има решение за всяка стойност на параметъра a.

24. Отг. А). Четири от осемте ъгъла са равни помежду си и са остри, а останалите четири са техни съседни. Сред петте ъгъла има една двойка със сбор 180° и за останалите три ъгъла остава сбор от 171°, така че втора такава двойка няма и всеки от трите ъгъла е по $171^\circ : 3 = 57^\circ$. Търсеният ъгъл е равен на $180^\circ - 57^\circ = 123^\circ$.

25. Отг. Г). При тръгването от спирката тролеят вече изостава с 60 + 27 = 87 секунди спрямо разписанието. При скорост 40 *км/ч* той изминава 1 километър за 1/40 от часа, т.е. за 3600 : 40 = 90 секунди. За да навакса закъснението, тролеят трябва да измине 1 *км* за 90 – 87 = 3 секунди, което е скорост от 3600 : 3 = 1200 *км/ч*.

26. Отг. Г). Скоростта на катера по течението е $60:3\frac{3}{4} = \frac{60.4}{15} = 16$ *км/ч*. Следователно скоростта на катера срещу течението е $16-3-3=10$ *км/ч* и за 52 *км* са му нужни 5,2 часа, т.е. 5 часа и 12 минути.

27. Отг. А). Първото уравнение има решение $x=\frac{3a+4}{2}$, а второто – съответно $x=\frac{4-a}{3}$. Следователно търсим тези a, за които $\frac{3a+4}{2}+\frac{4-a}{3}>1$. Оттук $a>-2$ и най-малкото цяло решение е $a=-1$.

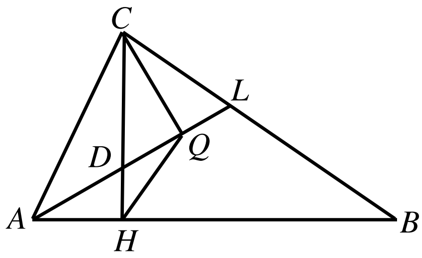
28. Отг. В). Ако търсената дължина е d *см*, имаме $\frac{d^2}{2}=32$, откъдето $d=8$.

29. Отг. Г). Лицето на ΔAMN е 1/8 от лицето на квадрата, а лицата на ΔBMC и ΔDNC са по 1/4 от лицето на квадрата. Тогава лицето на ΔCMN е 3/8 от лицето на квадрата.

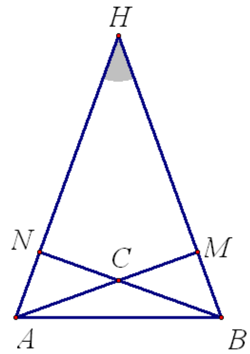
30. Отг. В). Нека AL пресича CH в точка D. Имаме $\Delta AHD \cong \Delta CQD$ по втори признак, откъдето $AD=CD$ и $DH=DQ$. Ако означим $\sphericalangle BAL = \sphericalangle CAL = \alpha$, то от ΔAHC намираме $\sphericalangle ACH = 90^\circ - 2\alpha$ и следователно:

$$\alpha = \sphericalangle DAC = \sphericalangle ACH = 90° - 2\alpha \Leftrightarrow \alpha = 30°.$$

От $DH = DQ$ и $\sphericalangle HDQ = 90° + \alpha = 120°$ получаваме $\sphericalangle DHQ = \sphericalangle DQH = 30°$.



31. Отг. Г). Нека M и N са точки съответно от правите AC и BC така, че $BM \perp AC$ и $AN \perp BC$ (вж. чертежа вдясно). Означаваме с H пресчната точка на BM и AN. Тогава $\sphericalangle CAN = \sphericalangle BAN - \sphericalangle BAC = 70° - 20° = 50°$ и следователно $\sphericalangle AHB = 90° - \sphericalangle CAN = 40°$.



32. Отг. Б). $\sphericalangle ABC = 90° - 16° = 74°$, така че $\sphericalangle ABL = \sphericalangle CBL = 37°$ и $\sphericalangle LTC = \sphericalangle DTB = 90° - 37° = 53°$.

33. Отг. Г). Триъгълникът LHC е равностранен и следователно $CH = LH = \frac{l}{2}$. В правоъгълния триъгълник BDH имаме $\angle HBD = 30°$, затова $DH = \frac{BH}{2} = \frac{l/2}{2} = \frac{l}{4}$. Следователно за височината получаваме $CH + DH = \frac{l}{2} + \frac{l}{4} = \frac{3l}{4}$.

34. Отг. Б). Не е възможно основата да е три пъти по-голяма от бедрата, тъй като това нарушава неравенството на триъгълника. Следователно, ако дължината на основата е x, то дължината на бедрото е $3x$. Получаваме уравнението $3x + 3x + x = 35$, откъдето $x = 5$ *см*. Страните на тригълника са 15 *см*, 15 *см*, 5 *см*.

35. Отг. В). Вътрешните ъгли на правилния петоъгълник са равни на $108°$ (сборът от вътрешните ъгли на всеки изпъкнал петоъгълник е $3.180° = 540°$, защото двата диагонала от един и същ връх разделят петоъгълника на три триъгълника, а $540° : 5 = 108°$). Тъй като ΔABC е равнобедрен, то $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ACB = \frac{1}{2}(180° - 108°) = 36°$. По същия начин $\sphericalangle DBC = \sphericalangle BDC = 36°$. Като използваме, че $\sphericalangle AMB$ е външен за ΔMBC, получаваме $\sphericalangle AMB = \sphericalangle DBC + \sphericalangle ACB = 36° + 36° = 72°$.

36. Отг. 84. Нека половината от търсеното разстояние е $x\,km$. Тогава в момента на срещата камионът от A е изминал $(x+3)\ km$, а този от B – съответно $(x-3)\ km$. Времената, през които са се движили камионите от A и B, са съответно $\frac{x+3}{50}h$ и $\frac{x-3}{60}h$. Тъй като камионът от A се е движил $15\min = \frac{15}{60}h$ повече, то получаваме уравнението $\frac{x+3}{50}-\frac{x-3}{60}=\frac{15}{60}$. Коренът на това уравнение е $x=42$. Следователно търсеното разстояние AB е $84\,km$.

37. Отг. 15. Ако дължината е била x *м*, то площта на лехата е била $2x$ *кв.м*. След увеличението тази площ е $1{,}6.2x=(2+1)(x+1)$, откъдето $0{,}2x=3$ и $x=15$ *м*.

38. Отг. 40. Нека търсената хоризонтална част CD има дължина $x\,km$. Тогава другите две части имат дължини $AC=(x-10)km$ и $DB=(x+5)km$. Времената за изминаване на съответните участъци от пътя са съответно: $t_{AC}=\frac{x-10}{30}h$, $t_{CD}=\frac{x}{40}h$ и $t_{DB}=\frac{x+5}{50}h$. Тъй като $2h\,54\min=\frac{29}{10}h$, от условието получаваме уравнението $\frac{x-10}{30}+\frac{x}{40}+\frac{x+5}{50}=\frac{29}{10}$. Решението на това уравнение е $x=40$. Следователно търсеното разстояние е $40\,km$.

39. Отг. 31. От първото условие получаваме $a^2+a-b^2+b=0\Rightarrow(a+b)(a-b+1)=0$. Понеже a и b са положителни, получаваме $a-b+1=0$. Замествайки във второто условие, получаваме $b=16$ и $a=15$. Следователно $a+b=31$.

40. Отг. 4. Нека първият багер за 1 час изкопава x части от канала. Тогава за 1 час вторият багер ще изкопава $\frac{1}{6}-x$ части от канала и от второто изречение на условието получаваме уравнението $2x+18\left(\frac{1}{6}-x\right)=1$ с решение $x=\frac{1}{8}$. Следователно за 1 час първият багер изкопава $\frac{1}{8}$ от канала, а вторият изкопава $\frac{1}{24}$ от канала. За осемте часа, през които вторият багер е работил сам, той е изкопал $\frac{1}{3}$ от канала и двата багера трябва да изкопаят още $\frac{2}{3}$ от канала. Тъй като общата им производителност е $\frac{1}{6}$, те ще направят това за $\frac{2}{3}:\frac{1}{6}=4$ часа.

41. Отг. 9. Преди преливането в първия резервоар има $0{,}08\cdot 60=4{,}8\,л$ чиста киселина, а във втория резервоар има $0{,}17\cdot 40=6{,}8\,л$ чиста киселина. От първия резервоар към втория се преливат $0{,}08\cdot 8=0{,}64\,л$ чиста киселина и след първото преливане във втория резервоар ще има $6{,}8+0{,}64=7{,}44\,л$ чиста киселина. В първия резервоар ще останат $4{,}16л$ чиста киселина. Концентрацията на киселината във втория резервоар след първото преливане ще бъде равна на $\frac{7{,}44}{40+8}=\frac{7{,}44}{48}=15{,}5\%$. Тогава чистата киселина, която ще бъде прелята при второто преливане от втория резервоар в първия, ще бъде $\frac{15{,}5}{100}\cdot 8=1{,}24\,л$ и след второто преливане в първия резервоар ще има $4{,}16+1{,}24=5{,}4\,л$

чиста киселина. Оттук намираме, че концентрацията на киселината в първия резервоар след второто преливане ще бъде $\frac{5,4}{60} = 9\%$.

42. Отг. Б). Числото $6n^2 + 6n + 3$ се дели на 3 и е по-голямо от 3, значи винаги е съставно. За числото $n^2 + 3n + 2$ имаме $n^2 + 3n + 2 = n^2 + n + 2n + 2 = (n+1)(n+2)$ и значи също винаги е съставно. За числото $6n^2 + 7n + 2$ имаме $6n^2 + 7n + 2 = 6n^2 + 3n + 4n + 2 = (2n+1)(3n+2)$ и значи винаги е съставно. Числото $n^2 + 2n + 6$ при $n = 5$ е равно на 41, следователно е възможно да е просто.

43. Отг. Г). Нека отначало работникът за 1 *мин* извършва x части от работата. Тогава за a минути той ще извършва ax части от работата. След увеличаване на производителността си той ще извършва за 1 минута $x\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ части от работата и за b минути той ще извърши $bx\left(1 + \frac{p}{100}\right)$ части от работата. Оттук получаваме равенството $ax = 2bx\left(1 + \frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow \frac{a}{2b} = \frac{p+100}{100} \Leftrightarrow p = \frac{50}{b}(a - 2b)$. Отговорите **А)** и **Б)** имат размерност в минути, така че явно са неподходящи. Отговор **В)** е неверен например при $a = 4$, $b = 1$, $p = 100$, което е в съответствие с условието.

44. Отг. 10. Всеки от тримата е изял 11/3 сандвич, като Никола е дал на Ясен 1/3 сандвич, а Пешо е дал на Ясен 10/3 сандвич. Следователно Пешо е получил 10 бонбона, а Никола – 1 бонбон.

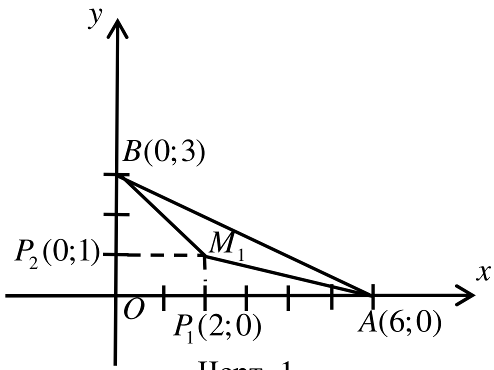
45. Отг. 184. С x да означаваме времето по план. Новата производителност ще бъде равна на $12 + 33\frac{1}{3}\%.12 = 12 + \frac{100}{3.100}.12 = 16$ детайла. Така имаме

$$\begin{aligned} &24 + 32 + 16(x-9) + 20 = 12x \\ &56 + 16x - 144 + 20 = 12x \\ &16x - 12x = 144 - 56 - 20, \end{aligned}$$

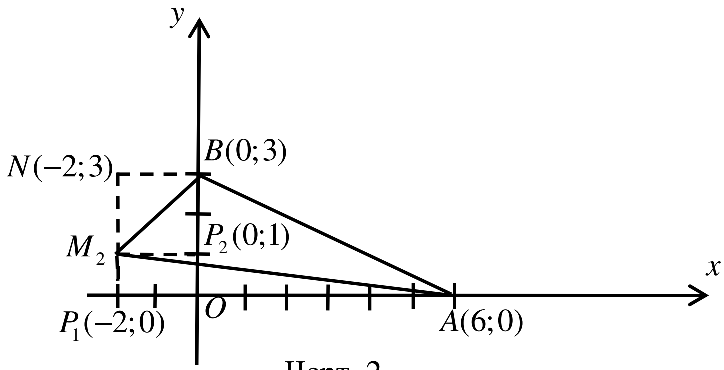
т.е. $4x = 68$ и $x = 17$. Произведените детайли са $12.17 - 20 = 204 - 20 = 184$ броя.

46. Отг. А). Нека S *км* е разстоянието от A до B, а скоростите на велосипедистите са съответно V_1 *км/ч* и V_2 *км/ч*. Тъй като от старта до първата среща двамата велосипедисти изминават общо S *км*, а общото разстояние, което изминават двамата между всеки две от следващите последователни срещи, е $2S$ *км*, то $V_1 + V_2 = 5S$ *км/ч*. Ако x часа е времето от третата до четвъртата среща, то $(V_1 + V_2)x = 2S$, т.е. $5Sx = 2S$, откъдето $x = \frac{2S}{5S} = \frac{2}{5}$ часа $= 24$ минути.

47. Отг. Б). Нека $M(x; y)$ е точка с исканото свойство. Тогава $S_{AOM} = \frac{6|y|}{2} = 3|y|$ и числото $3|y|$ е просто само при $y = \pm 1$. Аналогично $S_{BOM} = \frac{3|x|}{2}$, което е просто само при $x = \pm 2$. Така за M има 4 възможности: $M_1(2;1)$, $M_2(-2;1)$, $M_3(-2;-1)$ и $M_4(2;-1)$.



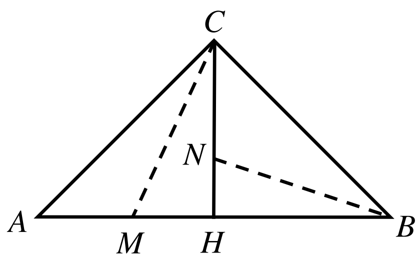
Черт. 1



Черт. 2

Във всички случаи лицето на ABM може да се получи със събиране или изваждане на лицата на AOB, AOM и BOM, които (в *кв.см*) са кратни на 3, така че за да бъде числото просто, то трябва да е равно на 3. Действително при $M_1(2;1)$ (черт. 1) имаме $S_{ABM_1} = S_{ABO} - S_{OAM_1} - S_{OBM_1} = 9-3-3=3$, което е просто число, така че точката $M_1(2;1)$ е решение на задачата. В останалите случаи числата са по-големи, понеже съответните триъгълници съдържат триъгълника от първия случай, и бидейки кратни на 3, не са прости (на черт. 2 е показан вторият случай; там $S_{ABM_2} = S_{AOB} + S_{BOM_2} - S_{AOM_2} = 9+3-3=9$ кв.см). И така, има единствена точка с исканото свойство.

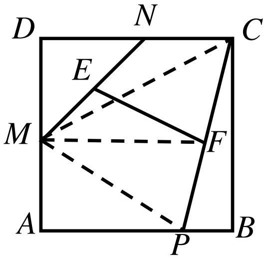
48. Отг. Г). Да означим ъглополовящата от върха C в триъгълника AHC с CM, а ъглополовящата от върха B в триъгълника BHC – съответно с BN. Тъй като $\sphericalangle ACH = 90^0 - \sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC$, то $\sphericalangle MCH = \sphericalangle NBH$ и следователно $\Delta MHC \cong \Delta NHB$ по II признак за еднаквост. Оттук заключаваме, че $CH = BH$ като съответни елементи в еднакви триъгълници. Тогава правоъгълният триъгълник HBC е равнобедрен. Получаваме, че $\sphericalangle HBC = 45°$, а следователно и $\sphericalangle HAC = \sphericalangle ACH = 45°$. Тогава $AH = CH = BH$, т.е. $CH = \frac{1}{2}AB = 14\,см$ и $S_{ABC} = \frac{AB.CH}{2} = \frac{28.14}{2} = 196\,кв.\ см.$



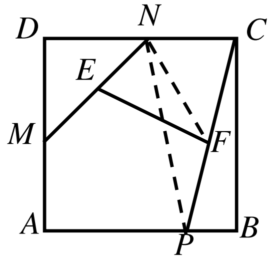
49. Отг. В). Тъй като $DM = DN = 2\,см$, то $S_{MND} = 2\,см^2$. От друга страна, MN е медиана в ΔMCD и следователно $S_{MCN} = S_{MND} = 2\,см^2$. Имаме $AP = 3\,см$ и $AM = 2\,см$, откъдето $S_{APM} = 3\,см^2$. Освен това $S_{PBC} = \frac{PB.BC}{2} = \frac{1.4}{2} = 2\,см^2$. Тогава:

$$S_{MPC} = S_{ABCD} - \left(S_{MND} + S_{MCN} + S_{APM} + S_{PBC}\right) = 16 - (2+2+3+2) = 16 - 9 = 7\,см^2.$$

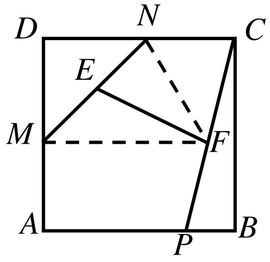
Тъй като MF е медиана в ΔPCM (вж. черт. 1), то $S_{MFC} = S_{MFP} = \frac{7}{2}\,см^2$.



Черт. 1



Черт. 2



Черт. 3

Точката P е на разстояние 4 *см* от страната NC на ΔNCP (вж. черт. 2) и следователно $S_{NCP} = \frac{2.4}{2} = 4\ см^2$. Отсечката NF е медиана в ΔNCP, откъдето получаваме, че $S_{NFC} = \frac{1}{2} S_{NCP} = 2\ см^2$. Тогава $S_{APFM} = S_{APM} + S_{MFP} = 3 + \frac{7}{2} = \frac{13}{2}\ см^2$ (черт. 1) и

$$S_{MFN} = S_{ABCD} - \left(S_{APFM} + S_{MND} + S_{NFC} + S_{PBC}\right) = 16 - \left(\frac{13}{2} + 2 + 2 + 2\right) = 16 - \frac{25}{2} = \frac{7}{2}\ см^2.$$

Отсечката EF е медиана в ΔMFN (вж. черт. 3) и тогава $S_{MEF} = S_{NEF} = \frac{1}{2} S_{MFN} = \frac{7}{4}\ см^2$.

Така $S_{APFEM} = S_{APFM} + S_{MEF} = \frac{13}{2} + \frac{7}{4} = \frac{33}{4}\ см^2$ и $S_{EFCN} = S_{NEF} + S_{NFC} = \frac{7}{4} + 2 = \frac{15}{4}\ см^2$ и за търсеното отношение получаваме $\frac{S_{APFEM}}{S_{EFCN}} = \frac{\frac{33}{4}}{\frac{15}{4}} = \frac{33}{15} = \frac{11}{5}$.

50. Отг. 3023. Да разгледаме думата БОЛКА като една буква. Думите, съставени от буквите З, Ъ, Е, Р и БОЛКА, т.е. “болезнените”, са 5.4.3.2.1=120. Общият брой думи с 9 различни букви е 9.8.7.6.5.4.3.2.1 = 54.56.120 = (55–1)(55+1)120 = 3024.120, така че “безболезнените” подредби са 3023.120 и търсеният отговор е 3023.

Задачитеса предложени от:

Веселин Ненков: 1, 3, 5, 10, 12, 18, 27, 28, 31, 32, 33, 36, 38 (13 задачи)
Диана Миланова: 2, 8, 29, 30, 45 (5 задачи)
Ивайло Кортезов: 4, 9, 14, 15, 24, 25, 37, 50 (8 задачи)
Светлозар Дойчев: 6, 21, 23, 40, 41, 42, 43 (7 задачи)
Ивайло Старибратов: 7, 11, 13, 16, 17, 26, 34 (7 задачи)
Ирина Шаркова: 19, 20, 22, 39, 44 (5 задачи)
Сава Гроздев: 35, 46, 47, 48, 49 (5 задачи)