**Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я**
**М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О,**
**М Л А Д Е Ж Т А И Н А У К А Т А**

---

# НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
# ОБЛАСТЕН КРЪГ – 12 март 2011 г.

## Т Е М А   З А   4   К Л А С

**Задача 1.** Пресметнете стойността на числовия израз $A=\left(27846:9+3801:7\right)-36\cdot 101$. Възможно ли е точно едно от участващите в израза $A$ числа да се замени с друго така, че първоначалната стойност на израза да се увеличи с 5?

**Задача 2.** Дължината и широчината на правоъгълник, измерени в сантиметри, са естествени числа. Обиколката на правоъгълника в сантиметри е двуцифрено число с цифра на единиците 0, а лицето на правоъгълника в квадратни сантиметри е двуцифрено число с цифра на десетиците 9.

а) Да се намерят всички такива правоъгълници.

б) Лицето на правоъгълника е 99 *кв. см*. Колко най-много правоъгълника с размери 3 *см* и 2 *см* могат да бъдат разположени в дадения правоъгълник без застъпване и припокриване?

**Задача 3.** Да се реши числовият ребус $abcd\cdot a=eeeed$, в който на еднаквите букви отговарят еднакви цифри, а на различните букви отговарят различни цифри.

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*
*Време за работа 4 часа.*
*Пожелаваме Ви успех!*

**Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я**
**М И Н И С Т Е Р С Т В О  Н А  О Б Р А З О В А Н И Е Т О,**
**М Л А Д Е Ж Т А   И  Н А У К А Т А**

---

# НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
# ОБЛАСТЕН КРЪГ – 12 март 2011 г.

## Т Е М А   З А   5   К Л А С

**Задача 1.** Да се пресметне стойността на израза:

$$C.C \;+\; C.(C-1) \;+\; C.(C-2) \;+\; C.(C+3)\text{, където}$$

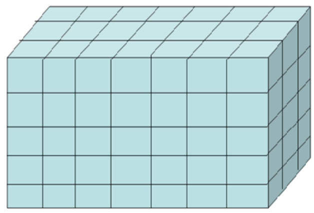
$C = A - B$, $A = 1,23.12,4.125 + (1+2+3+4+5+6+7).25$ и $B = 123.1,24.12,5 + 1,25.400.1,2$.

**Задача 2.** Правоъгълен паралелепипед е съставен от 105 еднакви кубчета. Ако от всяка стена се извади централното кубче, повърхнината на полученото тяло ще бъде с 384 *кв. см* по-голяма от повърхнината на паралелепипеда. Намерете:

а) дължината на ръба на едно кубче и размерите на паралелепипеда;

б) лицето на повърхнината на правоъгълния паралелепипед;

в) обема на правоъгълния паралелепипед.



**Задача 3.** Да се намери най-голямото естествено число $n$, за което съществува $n-$ цифрено число с различни цифри така, че числото да се дели на всяка своя цифра.

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*

*Време за работа 4 часа.*

*Пожелаваме Ви успех!*

**Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я**
**М И Н И С Т Е Р С Т В О  Н А  О Б Р А З О В А Н И Е Т О,**
**М Л А Д Е Ж Т А  И  Н А У К А Т А**

---

## НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
## ОБЛАСТЕН КРЪГ – 12 март 2011 г.

### Т Е М А   З А   6   К Л А С

**Задача 1.** Николай има два кашона с форма на правоъгълен паралелепипед и с размери съответно 1 *м* × 1 *м* × 60 *см* и 80 *см* × 70 *см* × 60 *см*. Колко най-много кутии със същата форма и с размери 20 *см* × 20 *см* × 15 *см* е възможно Николай да постави в кашоните?

**Задача 2.** В касичката си Валентин събира само монети. Един ден той решил да преброи паричките в нея. Оказало се, че половината от всички монети плюс една били от 1 лев. Четири десети от останалите и още 4 монети били от 50 стотинки. Десет процента от новия остатък и още 3 монети били от 20 стотинки, а последните 42 монети били от 10 стотинки. Колко са монетите в касичката на Валентин и каква е тяхната стойност в лева?

**Задача 3.** В таблица $n \times n$ по един от главните диагонали са поставени пионки. На един ход е позволено произволни две пионки да се преместят в съседна горна клетка. Възможно ли е по този начин всички пионки да се преместят на най-горния ред, ако:

а) $n = 9$;

б) $n = 2011$?

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*

*Време за работа 4 часа.*
*Пожелаваме Ви успех!*

**Р Е П У Б Л И К А  Б Ъ Л Г А Р И Я**
**М И Н И С Т Е Р С Т В О  Н А  О Б Р А З О В А Н И Е Т О,**
**М Л А Д Е Ж Т А  И  Н А У К А Т А**

---

## НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
## ОБЛАСТЕН КРЪГ – 12 март 2011 г.

### Т Е М А  З А  7  К Л А С

**Задача 1.** От град А за град Б заминал автобус, а осем минути по-късно след него тръгнала кола. Двете превозни средства се движили с постоянни скорости, като тази на колата била с 50% по-голяма от тази на автобуса. Колата изпреварила автобуса на 24 *км* от А. Когато тя пристигнала в Б, на автобуса му оставали още 48 *км* път.

а) Определете скоростите на автобуса и колата.

б) Определете разстоянието от А до Б.

в) С каква скорост е трябвало да се движи автобусът от А до Б, за да стигне в Б едновременно с колата?

**Задача 2.** Даден е триъгълник $ABC$ и точки $E$ и $D$ върху страната $AB$ така, че $\angle ACE = \angle ECD = 12°$. Да се намери $\angle ABC$, ако $\angle ECB = 90°$ и $AC + CD = AB$.

**Задача 3.** Квадратна градина е разделена на 25 квадратни лехи с лица по 1 *кв. м*. Съседни наричаме лехите с обща страна. В някои от лехите са посадени цветя. Лехите, в които има цветя, остават с цветя и през следващата година. Ако някоя леха няма цветя, то на следващата година в нея поникват цветя само ако тя има поне две съседни лехи с цветя.

а) Възможно ли е в 14 поредни години лехите с цветя да са все различен брой?

б) Колко най-малко лехи трябва да се засадят, за да може след известно време във всички лехи да има цветя?

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*

*Време за работа 4 часа.*
*Пожелаваме Ви успех!*

**Р Е П У Б Л И К А   Б Ъ Л Г А Р И Я**
**М И Н И С Т Е Р С Т В О  Н А  О Б Р А З О В А Н И Е Т О,**
**М Л А Д Е Ж Т А   И  Н А У К А Т А**

---

## НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
## ОБЛАСТЕН КРЪГ – 12 март 2011 г.

### Т Е М А   З А   8   К Л А С

**Задача 1.** Пътят между хижите “Бор” и “Иглика” се състои в изкачване от хижа “Бор” до връх Скала и слизане от връх Скала до хижа “Иглика”. Турист, който се движи със скорост 3 *km*/*h* при изкачване и 6 *km*/*h* при слизане, стига от “Бор” до “Иглика” за 210 минути, а се връща за 4 часа. Намерете разстоянията между хижите и върха.

**Задача 2.** Даден е правоъгълен триъгълник $ABC$ с хипотенуза $AB = 12$ *см* и катет $AC = 4$ *см*. Точката $M$ е средата на катета $BC$, а точките $P$ и $Q$ са разположени върху хипотенузата $AB$ така, че $AP = PQ = QB$.

а) Да се намери $\angle PMQ$.

б) Ако ъглополовящата на $\angle BAC$ пресича лъча $QM^{\rightarrow}$ в точката $K$, да се намери дължината на отсечката $KP$.

**Задача 3.** Да се намерят целочислените решения на уравнението $10x^2 + y^2 = 2011$.

*Всяка задача се оценява със 7 точки.*
*Време за работа 4 часа.*
*Пожелаваме Ви успех!*

# Министерство на образованието, младежта и науката

## 60. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

### Тема за 9. клас

**Задача 1.** Да се реши уравнението $\sqrt{x-\sqrt{a}} = a - x$ в зависимост от стойностите на реалния параметър $a$.

**Задача 2.** Да се намерят всички прости числа $p$, за които съществуват взаимно прости естествени числа $a$ и $b$, такива, че

$$p(a^2 + ab + b^2) = 1501(a + b).$$

**Задача 3.** Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $H_a$ е ортоцентър на $\triangle BCD$, $H_b$ е ортоцентър на $\triangle CDA$, $H_c$ е ортоцентър на $\triangle DAB$ и $H_d$ е ортоцентър на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако правите $AC$ и $H_aH_c$ са успоредни, но не съвпадат, то правите $BD$ и $H_bH_d$ са успоредни.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

# Министерство на образованието, младежта и науката

## 60. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

### Тема за 10. клас

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на реалните параметри $a$ и $b$, за които неравенството $2|x^2 + ax + b| > 1$ няма решения в интервала $[1, 3]$.

**Задача 2.** Да се намерят всички прости числа $p$, за които съществуват взаимно прости естествени числа $a$ и $b$, такива, че

$$p(a^2 + ab + b^2) = 1501(a + b).$$

**Задача 3.** Даден е изпъкнал четириъгълник $ABCD$, в който $H_a$ е ортоцентър на $\triangle BCD$, $H_b$ е ортоцентър на $\triangle CDA$, $H_c$ е ортоцентър на $\triangle DAB$ и $H_d$ е ортоцентър на $\triangle ABC$. Да се докаже, че ако правите $AC$ и $H_aH_c$ са успоредни, но не съвпадат, то правите $BD$ и $H_bH_d$ са успоредни.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

# Министерство на образованието, младежта и науката

## 60. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

### Тема за 11. клас

**Задача 1.** Да се намерят всички стойности на реалния параметър $a$, за които уравнението

$$3^{\cos x} + 3^{1-\cos x} = a$$

има точно едно решение в интервала $[0, \pi]$.

**Задача 2.** Точките $O$ и $I$ са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник $ABC$. Ъглополовящата на ъгъл $ACB$ пресича описаната около триъгълника окръжност в точка $D$. Ако $r$ е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

**Задача 3.** Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число $n$ произведението $\binom{n}{a_1}\binom{n}{a_2}\cdots\binom{n}{a_{2011}}$ се дели на $n$, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.

# Министерство на образованието, младежта и науката

## 60. Национална олимпиада по математика

### Областен кръг, Първи ден, 12 март 2011 г.

### Тема за 12. клас

**Задача 1.** Допирателните към точки $A$ и $B$ от графиката на функцията $y = x^2$ се пресичат в точка $C$ така, че $\triangle ABC$ е равностранен. Да се намери дължината на отсечката $AB$.

**Задача 2.** Точките $O$ и $I$ са съответно център на описаната и вписаната окръжност за триъгълник $ABC$. Ъглополовящата на ъгъл $ACB$ пресича описаната около триъгълника окръжност в точка $D$. Ако $r$ е радиусът на вписаната окръжност, $OI = r$ и $ID = 2r$, да се намери $\sin \sphericalangle ACB$.

**Задача 3.** Дадени са естествени числа $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$. Да се докаже, че твърдението:

За всяко естествено число $n$ произведението $\binom{n}{a_1}\binom{n}{a_2}\cdots\binom{n}{a_{2011}}$ се дели на $n$, е вярно тогава и само тогава, когато най-големия общ делител на числата $a_1, a_2, \ldots, a_{2011}$ е равен на 1.

*Време за работа*: 4 часа и 30 минути.