

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ**

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

Национален кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас

1 задача. Планетни системи.

А. Планети около Бялото слънце. В периодите на най-благоприятна видимост жителите на Виолетовата планета виждат Зелената планета на максимално отстояние 45° източно или западно от Бялото слънце. А Оранжевата планета се наблюдава на 30° максимално отстояние източно или западно от Бялото слънце. За жителите на Виолетовата планета в годината има 300 денонощия.

- Нарисувайте схема на планетната система.
- Намерете орбиталните периоди на Зелената и Оранжевата планета. Резултатите изразете в денонощия за Виолетовата планета.
- През какви интервали от време се повтарят периодите на най-благоприятна видимост на Зелената и Виолетовата планета за жителите на Оранжевата планета?

Б. Планети около Жаркото слънце. За обитателите на Топлата планета в годината има 30 денонощия, а за обитателите на Прохладната планета в годината има 120 денонощия. Годината за Прохладната планета се равнява на 4 години за Топлата планета. Двете планети се въртят около осите си и обикалят около Жаркото слънце в една и съща посока.

- Коя от двете планети се върти по-бързо около оста си? Подкрепете вашия отговор с количествени пресмятания.

2 задача. Носталгия по Земята. От дълго време вие живеете и работите в един от бъдещите лунни градове, но така и не можете да свикнете с дългите лунни нощи. Настроението ви е лошо, защото остават още около 5 земни денонощия до изгрева на Слънцето. Носталгията ви по Земята е още по-силна, тъй като Земята не се вижда над хоризонта. В зенита грее съзвездието Стрелец. Свързвате се чрез LunarNet с ваш приятел от друг лунен град и той ви казва, че в момента наблюдава пълно слънчево затъмнение. А вие си мислите какъв ли сезон е сега в родната ви България?

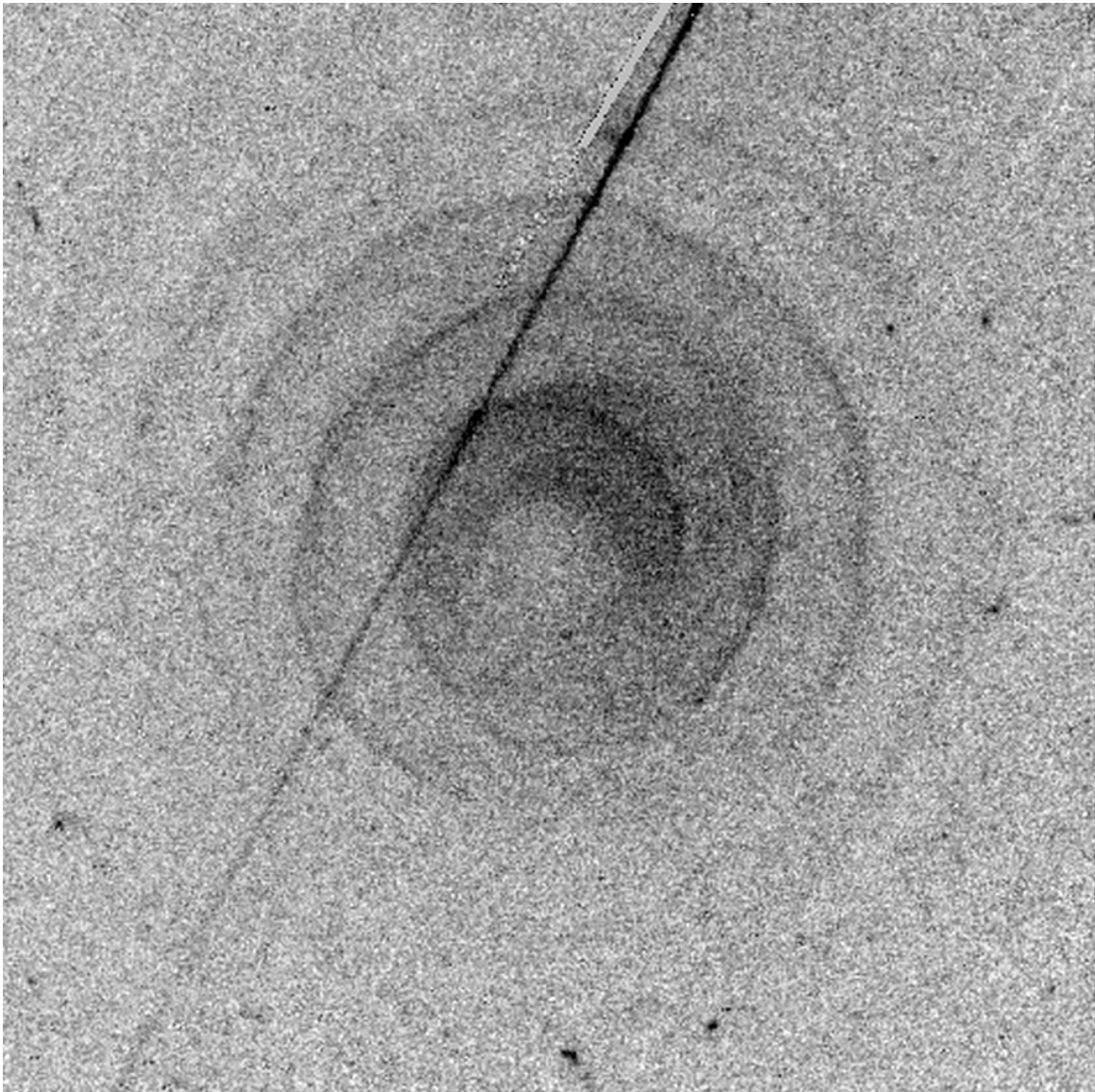
- Нарисувайте подходяща схема и отговорете на този въпрос, като дадете необходимата обосновка.

3 задача. Странната мъглявина. Преди няколко години космическият телескоп Хъбъл засне в инфрачервени лъчи много странна мъглявина. Тя е почти правилна спирала и засенчва изцяло звездата, която се намира в центъра на мъглявината. С допълнителни наблюдения е установено, че звездата в мъглявината е двойна. Една от звездите има излишък от въглерод – въглеродна звезда. Вероятно тя е червен гигант и губи вещество, което е богато на въглерод и образува тази странна мъглявина около звездите. Формата на мъглявината е спирална защото звездите се въртят около общ център на масите, като правят един оборот приблизително за 800 години. Ако двойната звездна система се

намира на разстояние 1000 парсека от Земята, то с каква скорост изтича веществото от нея? Цялото негативно изображение, в центъра на което е мъглявината, е квадрат със страна 25.6 дъгови секунди.

Не обръщайте внимание на черната и бялата ивици, пресичащи изображението. Това са ефекти от близко разположена ярка звезда и артефакти от обработката на изображението и нямат отношение към решаването на задачата.

Разстоянието от Земята до Слънцето е 150×10^6 км.



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

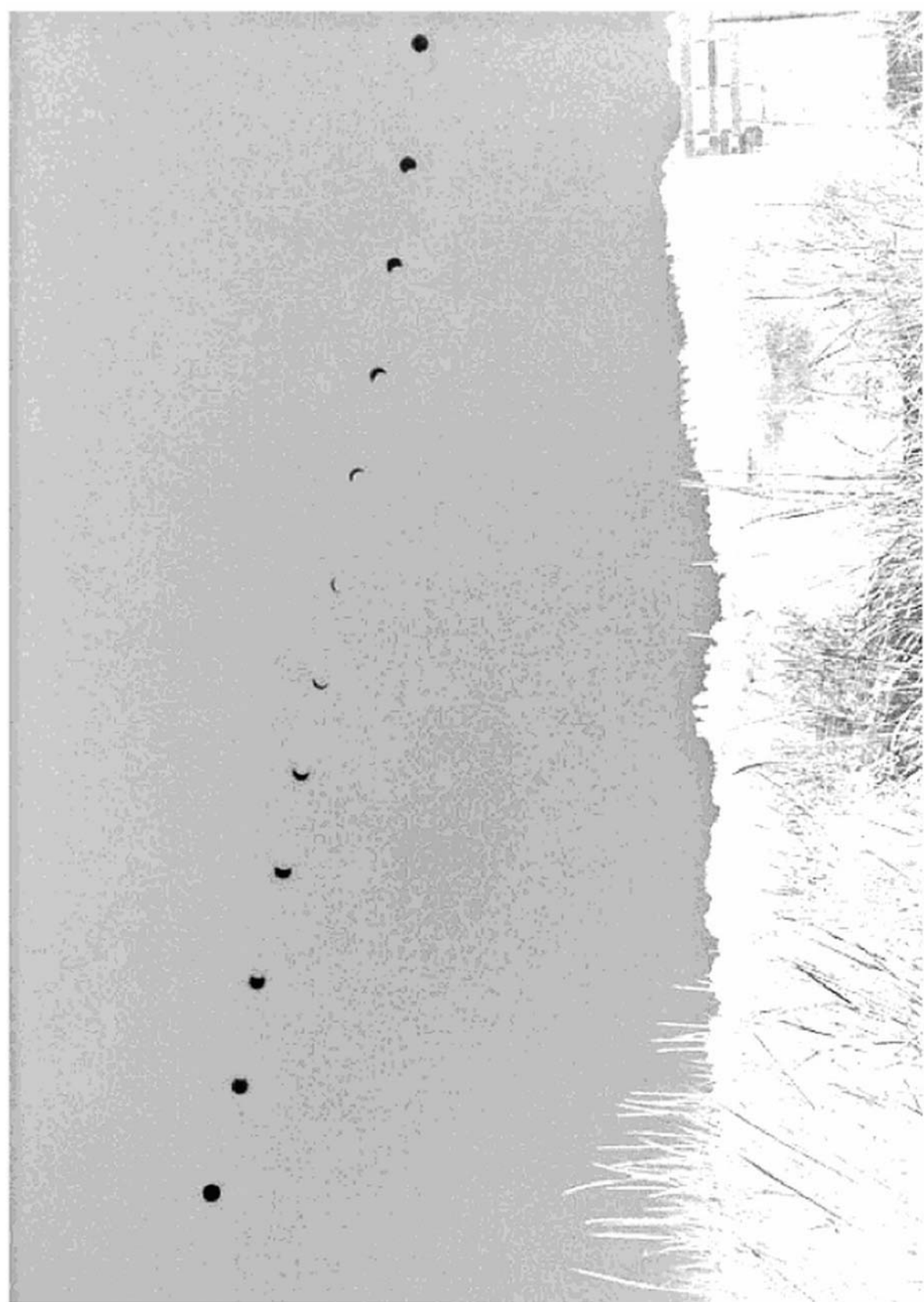
<http://astro-olymp.org>

Национален кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас

Практическа задача. Слънчево затъмнение. Разполагате със снимка на слънчевото затъмнение от 11 август 1999 г., получена чрез точно наслагване на кадри от различни моменти на затъмнението, когато Слънцето е имало различни положения в небето. Снимката представлява негативно изображение.

- Направете необходимите измервания и пресмятания и определете приблизително продължителността на слънчевото затъмнение. Приемете, че видимият ъглов диаметър на Слънцето е 0.5° . Опишете и обяснете вашия метод на работа.



III кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас - решения

1 задача. Планетни системи.

А. Планети около Бялото слънце. В периодите на най-благоприятна видимост жителите на Виолетовата планета виждат Зелената планета на максимално отстояние 45° източно или западно от Бялото слънце. А Оранжевата планета се наблюдава на 30° максимално отстояние източно или западно от Бялото слънце. За жителите на Виолетовата планета в годината има 300 денонощия.

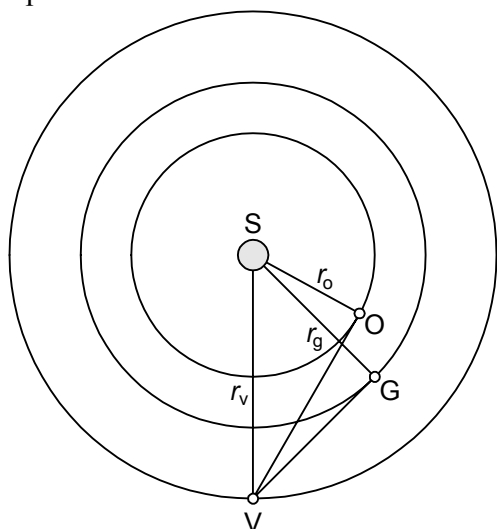
- Нарисувайте схема на планетната система.
- Намерете орбиталните периоди на Зелената и Оранжевата планета. Резултатите изразете в денонощия за Виолетовата планета.
- През какви интервали от време се повтарят периодите на най-благоприятна видимост на Зелената и Виолетовата планета за жителите на Оранжевата планета?

Б. Планети около Жаркото слънце. За обитателите на Топлата планета в годината има 30 денонощия, а за обитателите на Прохладната планета в годината има 120 денонощия. Годината за Прохладната планета се равнява на 4 години за Топлата планета. Двете планети се въртят около осите си и обикалят около Жаркото слънце в една и съща посока.

- Коя от двете планети се върти по-бързо около оста си? Подкрепете вашия отговор с количествени пресмятания.

Решение:

А. Щом като не се наблюдават на големи ъгли отстояния от Бялото слънце, Оранжевата и Зелената планета са вътрешни за Виолетовата планета.



Най-благоприятните периоди на видимост на една вътрешна планета са около моментите на максимална елонгация – максимално видимо отдалечаване от Слънцето. Да означим с S Бялото слънце, с O Оранжевата планета, с G Зелената и с V Виолетовата планета. Оранжевата и Зелената планета са в максимална елонгация за наблюдателите от Виолетовата планета. Това означава, че ъглите VOS и VGS са прави. Да означим с r_o , r_g и r_v радиусите на орбитите съответно на Оранжевата, Зелената и Виолетовата планета. В правоъгълния триъгълник VOS ъгълът SVO е равен на 30° . Следователно:

$$r_o = r_v / 2$$

В правоъгълния триъгълник VGS ъгълът SVG е равен на 45° . Следователно:

$$VG = SG = r_g$$

Като използваме Питагоровата теорема, намираме:

$$r_v^2 = 2r_g^2$$

$$r_g = r_v / \sqrt{2}$$

Да означим орбиталните периоди на планетите съответно с T_o , T_g и T_v . За да намерим тези периоди, използваме III закон на Кеплер:

$$\frac{r_o^3}{T_o^2} = \frac{r_g^3}{T_g^2} = \frac{r_v^3}{T_v^2}$$

Оттук последователно намираме периодите на Оранжевата и Зелената планета, изразени в денонощия на Виолетовата планета:

$$T_o = T_v \sqrt{\frac{r_o^3}{r_v^3}} = \frac{T_v}{\sqrt{2^3}} \approx 106 \text{ дни}$$

$$T_g = T_v \sqrt{\frac{r_g^3}{r_v^3}} = \frac{T_v}{\sqrt{(\sqrt{2})^3}} \approx 178 \text{ дни}$$

За жителите на Оранжевата планета останалите две планети – Зелената и Виолетовата – са външни. Периодите на най-благоприятна видимост на тези планети от Оранжевата планета са, когато те са в противоположене. Интервалите от време, през които се повтарят моментите на опозиция, са равни на синодичните периоди на двете планети по отношение на Оранжевата планета. Да означим тези синодични периоди съответно с T_{og} и T_{ov} . За тях можем да напишем:

$$\frac{1}{T_{og}} = \frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_g}$$

$$T_{og} = \frac{T_o T_g}{T_g - T_o} \approx 262 \text{ дни}$$

$$\frac{1}{T_{ov}} = \frac{1}{T_o} - \frac{1}{T_v}$$

$$T_{ov} = \frac{T_o T_v}{T_v - T_o} \approx 164 \text{ дни}$$

Б. Годината на Прохладната планета е 4 пъти по-дълга от годината на Топлата планета. В годината на Прохладната планета има 4 пъти повече дни, отколкото в годината на Топлата планета. Това означава, че денонощията за жителите на Топлата планета и на Прохладната планета са с еднаква продължителност. Не би ли трябвало да заключим, че двете планети се въртят еднакво бързо около своите оси? Тук, обаче, става дума за продължителността на слънчевите денонощия – те имат значение в живота на обитателите на планетите. Но слънчевото денонощие е периодът между две едноименни кулминации на Жаркото слънце – между два последователни момента, когато е пладне например. А “истинският” период на въртене на планетата е периодът ѝ на въртене относно звездите – звездното денонощие. Всяка от планетите се върти около оста си в същата посока, в която обикаля около своето слънце, Ако за една година планетата се завърта около оста си N пъти относно слънцето, то относно звездите тя прави точно с едно завъртане повече, или $N + 1$. Да отбележим с T_w и T_c слънчевите денонощия съответно на Топлата и на Прохладната планета, а T_w^* и T_c^* – звездните денонощия. В сила са следните съотношения:

$$T_w^* = \frac{30}{31} T_w \approx 0.97 T_w$$

$$T_c^* = \frac{120}{121} T_c \approx 0.99 T_c$$

Понеже $T_w = T_c$, можем да заключим, че периодът на оклоосно въртене на Топлата планета е по-кратък и следователно тя се върти около оста си по-бързо, отколкото Прохладната планета.

До същия резултат можем да достигнем и ако използваме познатите ни формули за връзката между звездното и слънчевото денонощие:

$$\frac{1}{T_w} = \frac{1}{T_w^*} - \frac{1}{P_w}, \quad \frac{1}{T_c} = \frac{1}{T_c^*} - \frac{1}{P_c},$$

където $P_w = 30$ дни и $P_c = 120$ дни са орбиталните периоди на двете планети.

Критерии за оценяване (общо 18 т.):

Подусловие А (13 т.)

За правилно построяване на схемата – 2 т.

За определяне на орбиталните радиуси на Оранжевата и Зелената планета – 2 т.

За правилен математически метод на определяне на орбиталните периоди на двете планети – 2 т.

За верни числени отговори за периодите – 2 т.

За правилно посочване кога са най-благоприятните периоди видимост на външните планети за жителите на Оранжевата планета – 1 т.

За правилен начин на определяне на синодичните периоди – 2 т.

За верни числени отговори – 2 т.

Подусловие Б (5 т.)

За правилни теоретични съображения и математически подход – 2 т.

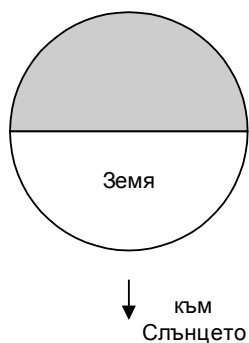
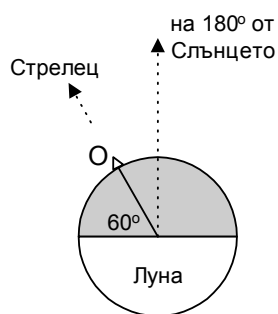
За верни числени отговори – 2 т.

За правилно заключение коя планета се върти по-бързо – 1 т.

2 задача. Носталгия по Земята. От дълго време вие живеете и работите в един от бъдещите лунни градове, но така и не можете да свикнете с дългите лунни нощи. Настроението ви е лошо, защото остават още около 5 земни денонощия до изгрева на Слънцето. Носталгията ви по Земята е още по-силна, тъй като Земята не се вижда над хоризонта. В зенита грее съзвездието Стрелец. Свързвате се чрез LunarNet с ваш приятел от друг лунен град и той ви казва, че в момента наблюдава пълно слънчево затъмнение. А вие си мислите какъв ли сезон е сега в родната ви България?

• Нарисувайте подходяща схема и отговорете на този въпрос, като дадете необходимата обосновка.

Решение:



Слънчевото денонощие на Луната е равно на периода на смяна на лунните фази, или синодичния лунен месец, който трае около 29.5 земни денонощия. Следователно оставащите 5 земни денонощия до изгрева на Слънцето за вас са приблизително една трета част от лунната нощ.

Да отбележим с точка О вашето местоположение на Луната. Луната трябва да се завърти около оста си още приблизително на 60° , спрямо Слънцето, за да настъпи новият ден за вас.

Слънчево затъмнение на Луната се наблюдава, когато Луната навлезе в сянката на Земята. Това може да стане, само когато Луната за земните наблюдатели е в пълнолуние (и тогава те ще наблюдават лунно затъмнение). Вашият лунен град е на обратната страна на Луната, която не се вижда от Земята. Затова Земята не се появява над вашия хоризонт.

От схемата се вижда, че Слънцето е на $60^\circ + 90^\circ = 150^\circ$ източно от съзвездието Стрелец. Слънцето трябва да е приблизително в петото след Стрелец зодиакално съзвездие, или съзвездието Бик. Слънцето се намира в зодиакалния знак Бик през май. Но както знаем, поради прецесията на земната ос, зодиакалните знаци са отместени спрямо съзвездиата и сега Слънцето е в съзвездието Бик през юни. Следователно сезонът на Земята е началото на лятото.

Критерии за оценяване (общо 10 т.):

За правилно определяне каква част от лунната нощ са 5 земни денонощия – 2 т.

За правилно определяне на положението на наблюдателя относно границите на нощната страна на Луната – 2 т.

За правилно обяснение и определяне на положението на Земята и посоката към Слънцето предвид факта на затъмнението – 2 т.

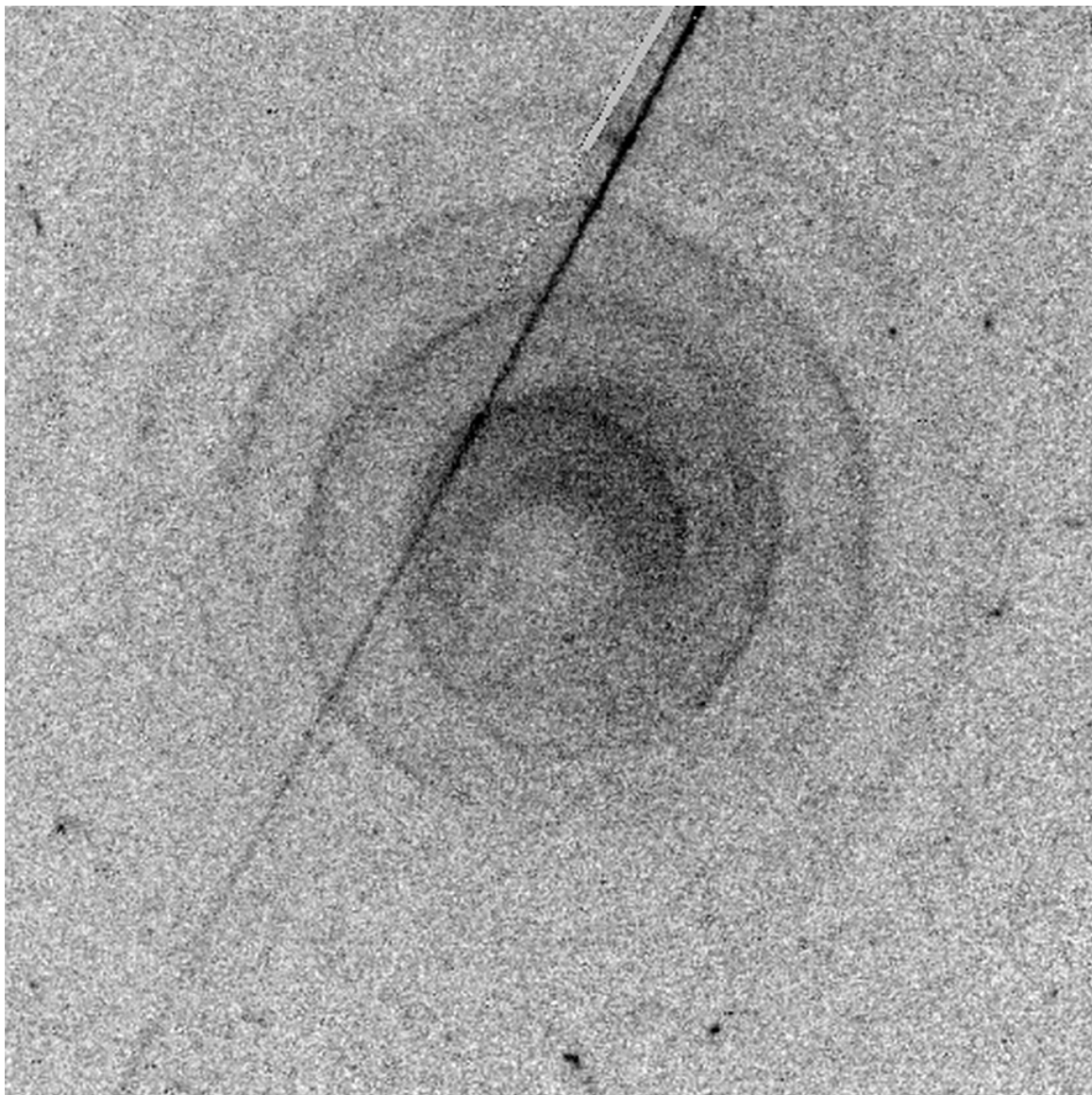
За правилни разсъждения относно положението на Слънцето на фона на звездите и сезона от годината – 3 т.

За правилно заключение за сезона – 1 т.

3 задача. Странната мъглявина. Преди няколко години космическият телескоп Хъбъл засне в инфрачервени лъчи много странна мъглявина. Тя е почти правилна спирала и засенчва изцяло звездата, която се намира в центъра на мъглявината. С допълнителни наблюдения е установено, че звездата в мъглявината е двойна. Една от звездите има излишък от въглерод – въглеродна звезда. Вероятно тя е червен гигант и губи вещество, което е богато на въглерод и образува тази странна мъглявина около звездите. Формата на мъглявината е спирална защото звездите се въртят около общ център на масите, като правят един оборот приблизително за 800 години. Ако двойната звездна система се намира на разстояние 1000 парсека от Земята, то с каква скорост изтича веществото от нея? Цялото негативно изображение, в центъра на което е мъглявината, е квадрат със страна 25.6 дъгови секунди.

Не обръщайте внимание на черната и бялата ивици, пресичащи изображението. Това са ефекти от близко разположена ярка звезда и артефакти от обработката на изображението и нямат отношение към решаването на задачата.

Разстоянието от Земята до Слънцето е 150×10^6 км.



Решение:

Измерваме страната на квадратното изображение, която се оказва 132.5 мм. Оттук получаваме мащаба на изображението в дъгови секунди. На 132.5 мм отговарят 25.6". Следователно на 1 мм ще отговарят $25.6 / 132.5 \approx 0.193''$. От двойната звездна система, закрита от плътната мъглявина в центъра на изображението изтича вещество във вид на струя с търсената скорост v . Поради въртенето на компонентите около техния център на масите, "челото" на изтичащата струя описва спирала, но самото вещество се движи радиално. Поставяме линията по някой от "радиусите" на спиралната структура и

измерваме разстоянията между двойки съседни дъги от спиралата. Това са разстояния, които изхвърленото вещество изминава за един орбитален период на двойната звезда, или 800 години. Повтаряме измерването по няколко подходящо избрани радиуса в различни направления от центъра на мъглявината и усредняваме резултатите. Получаваме 12.5 мм. Използвайки определения от нас мащаб, намираме:

$$12.5 \text{ мм съответстват на } 12.5 \times 0.193 \approx 2.413''$$

Разстоянието до мъглявината е 1000 парсека. По определение от разстояние 1 парсек разстоянието Земя-Слънце (1 астрономическа единица) се вижда под ъгъл 1". Това означава, че ако една отсечка, дълга 1 астрономическа единица, е отдалечена от нас на 1000 парсека, нейната видима ъглова дължина за нас ще бъде 1000 пъти по-малка, или 0.001". За да виждаме на такова разстояние една отсечка под ъгъл 1", тя трябва да е дълга 1000 астрономически единици. Следователно средното разстояние между две съседни дъги от спиралната мъглявина ще бъде:

$$2.413'' \times 1000 = 2413 \text{ астрономически единици} \times 150 \times 10^6 \text{ км} \approx 3.62 \times 10^{11} \text{ км}$$

Това разстояние се изминава от изхвърленото от звездната система вещество за 800 години. Оттук за скоростта на веществото получаваме:

$$v = 3.62 \times 10^{11} \text{ км} / (800 \text{ години} \times 365 \text{ дни} \times 24 \text{ ч.} \times 60 \text{ м.} \times 60 \text{ с.}) \approx 14.3 \text{ км/с.}$$

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За определяне на мащаба на изображението – 2 т.

За правилна обосновка на метода на определяне на скоростта на изтичане – 3 т.

За определяне на средното разстояние между съседни дъги от спиралата – 2 т.

За правилен начин на пресмятане на разстоянието в километри – 3 т.

За правилен начин на пресмятане на скоростта в км/с – 1 т.

За верен числен отговор – 1 т.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

III кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 7-8 клас - решение

Практическа задача. Слънчево затъмнение. Разполагате със снимка на слънчевото затъмнение от 11 август 1999 г., получена чрез точно наслагване на кадри от различни моменти на затъмнението, когато Слънцето е имало различни положения в небето. Снимката представлява негативно изображение.

• Направете необходимите измервания и пресмятания и определете приблизително продължителността на слънчевото затъмнение. Приемете, че видимият ъглов диаметър на Слънцето е 0.5° . Опишете и обяснете вашия метод на работа.

Решение:

Измерваме диаметъра на няколко изображения на Слънцето и получаваме около 2.5 мм. Това съответства на видимия ъглов размер на Слънцето, или 0.5° . Оттук определяме мащаба на снимката. На 1 мм отговаря ъглова мярка $0.5 / 2.5 = 0.2^\circ$. Като разгледаме внимателно последователните изображения на Слънцето заключаваме, че затъмнението е започнало някъде около момента, когато е било заснето второто поред отляво надясно изображение, и е завършило около момента, когато е било заснето последното дванайсето изображение, намиращо се до десния край на снимката. Разстоянието между центровете на тези две изображения е 178 мм. Като използваме мащаба, намираме това разстояние в градуси:

$$178 \text{ мм} \times 0.2^\circ = 35.6^\circ$$

Различните положения на Слънцето в различните моменти от затъмнението се дължат на видимото денонощно движение на Слънцето по небето. Едно цяло завъртане Слънцето прави за едно слънчево денонощие, или 24 часа. Времетраенето на затъмнението Δt определяме чрез пропорция:

$$\begin{array}{rcl} 24 \text{ ч.} & - & 360^\circ \\ \Delta t & - & 35.6^\circ \end{array}$$

$$\Delta t = 24 \cdot \frac{35.6}{360} \approx 2.4 \text{ ч.} \approx 2 \text{ ч. } 20 \text{ м.}$$

Необходимо е да се отбележи, че този начин на пресмятане е напълно коректен само когато Слънцето има деклинация нула, т.е. когато лежи върху небесния екватор. Само тогава то описва при денонощното си движение по небето голям кръг и ъгловият диаметър на Слънцето съответства на 0.5° по този кръг. Когато деклинацията на Слънцето е различна от нула, то описва за 24 часа по-малък кръг по небесната сфера и видимата му ъглова скорост е по-малка. Тъй като датата на затъмнението е 11 август, което е далеч от датите на равнодествията, то деклинацията на Слънцето тогава трябва да е била доста различна от нула. Следователно в метода на определяне трябва

да се въведе корекция. Но в задачата не се дава деклинацията на Слънцето, а и при това изображение нашите измервания не биха могли да са много точни, така че можем да пренебрегнем този фактор.

Критерии за оценяване (общо 12 т.):

За правилен подход при определяне на мащаба на снимката – 1 т.

За определяне на средния размер на изображението на Слънцето – 1 т.

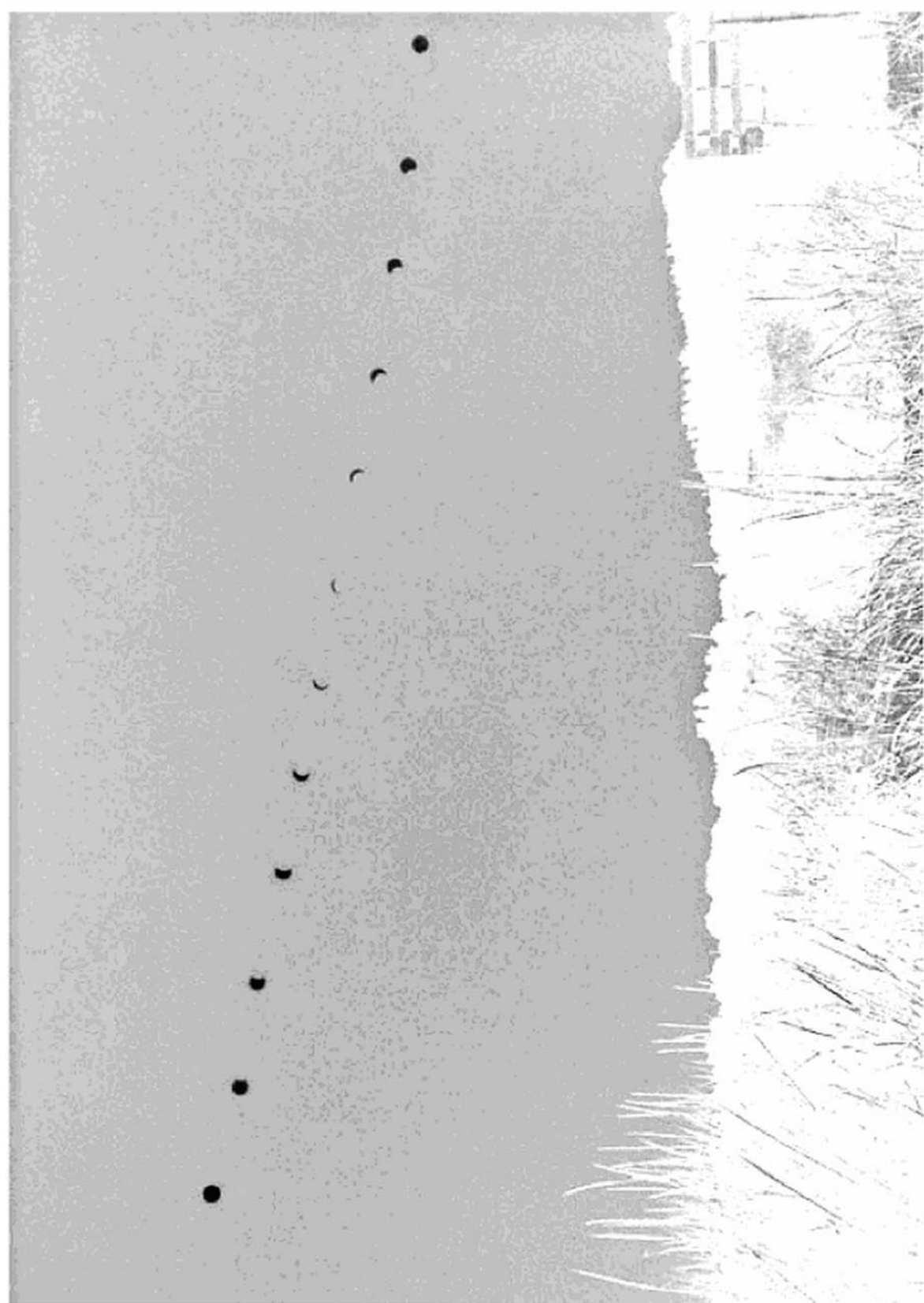
За правилно числено пресмятане на мащаба – 1 т.

За разсъждения и обяснения върху метода на определяне продължителността на затъмненето – 4 т.

За правилни измервания – 1 т.

За правилни пресмятания – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.



Национален кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

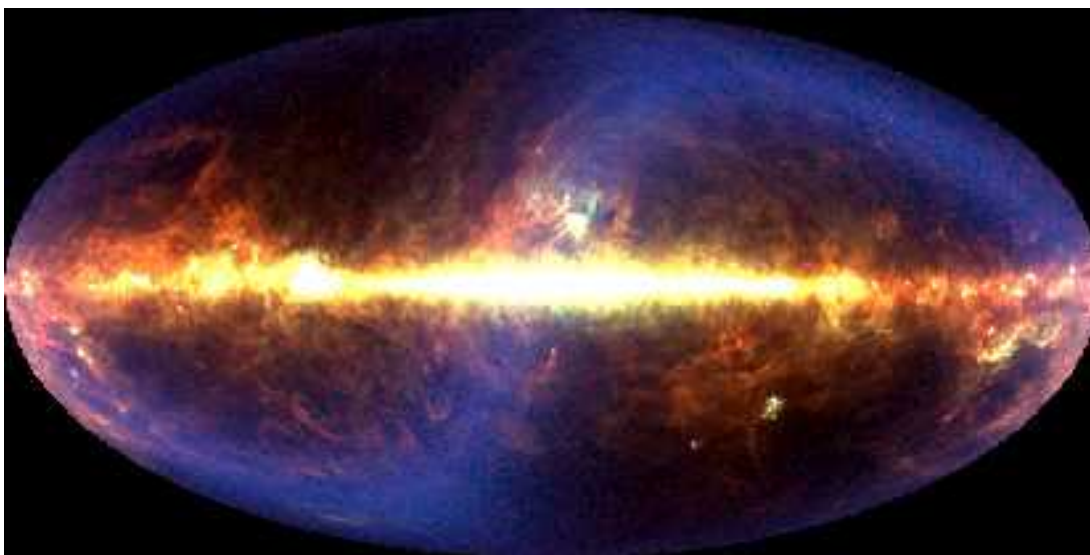
Ученици от 9-10 клас

1 задача. Полюси.

- Определете ректасцензията и деклинацията на северния полюс на еклиптиката.
- Средната линия на Млечния път се пресича с небесния екватор под ъгъл 62° .

Ректасцензията на една от точките на пресичане е $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Определете ректасцензията и деклинацията на северния галактичен полюс.

- Даденото ви изображение представлява карта на цялата небесна сфера, получена при наблюдения в инфрачервени лъчи. В кое съзвездие се намира централната част на картата? Използвайте това изображение, за да нарисувате схема, показваща разположението и ориентацията на Слънчевата система в Галактиката.



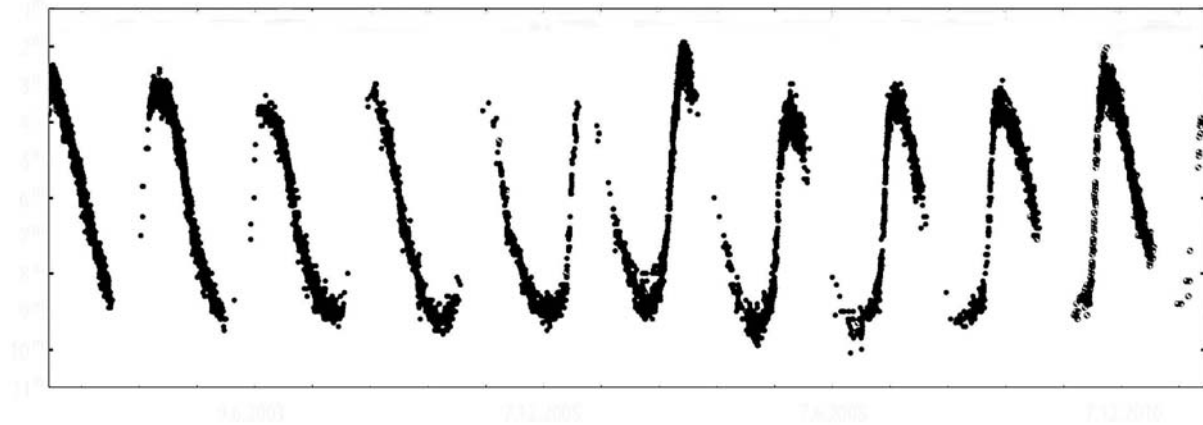
2 задача. Наблюдения от Ганимед. Вие участвате в космическа експедиция по изучаване на Галилеевите спътници на Юпитер. В една нощ, когато се намирате на Ганимед и изпитвате носталгия по родната планета, вие преглеждате общопланетния компютърен алманах и се опитвате да разберете кога Земята е най-ярка, гледана от Ганимед. Поглеждате към небето и се опитвате да я откриете.

- Определете приблизително видимата звездна величина на Земята, когато тя се вижда от Ганимед и е най-ярка. Използвайте дадените справочни данни. Приемете, че когато виждаме осветен половината диск на една планета, примерно Луната в първа четвърт, тя е по-слаба с 1^{m} отколкото когато е осветен целият диск на планетата.

- Ще можете ли да видите Земята с невъоръжено око? А Луната? Ще можете ли да различите Земята и Луната като отделни обекти? Разделителната способност на човешкото око е около 1-2 дъгови минути.

3 задача. Удивителната звезда. Звездата Мира от съзвездието Кит е червен гигант, който се наблюдава като пулсираща променлива звезда. Тя дава името на цял клас променливи звезди, наречени мириди, които пулсират с много дълъг период, от порядъка на няколкостотин дни. Разполагате с крива на блясъка на Мира, получена по данни на Американската асоциация на наблюдателите на променливи звезди (AAVSO) за дълъг период от време. В AAVSO членуват стотици астрономи любители от цял свят, които работят много ентузиастично и наблюдават винаги, когато е възможно.

- На какво се дължат прекъсванията в кривата на блясъка и през какъв период от време се повтарят?
- Разграфете хоризонталната ос – оста на времето – в подходящи мерни единици.
- Определете приблизително периода на изменение на блясъка на пулсиращата променлива звезда Мира.
- Спомнете си колко ярка става Мира в максимума на своя блясък, каква амплитуда има и се опитайте да възстановите оцифроването в звездни величини на вертикалната ос.



Справочни данни:

Радиус на Земята	6370 км	Отражателна способност на Земята	0.37
Радиус на Венера	6052 км	Отражателна способност на Венера	0.67
Радиус на Луната	1737 км	Отражателна способност на Луната	0.12
Радиуси на орбитите около Слънцето на:	Венера 0.723 AU;	Юпитер	5.20 AU
Радиус на орбитата на Луната около Земята:	0.00256 AU		
Звездна величина на Венера в максимална елонгация:	- 4.6 ^m		

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

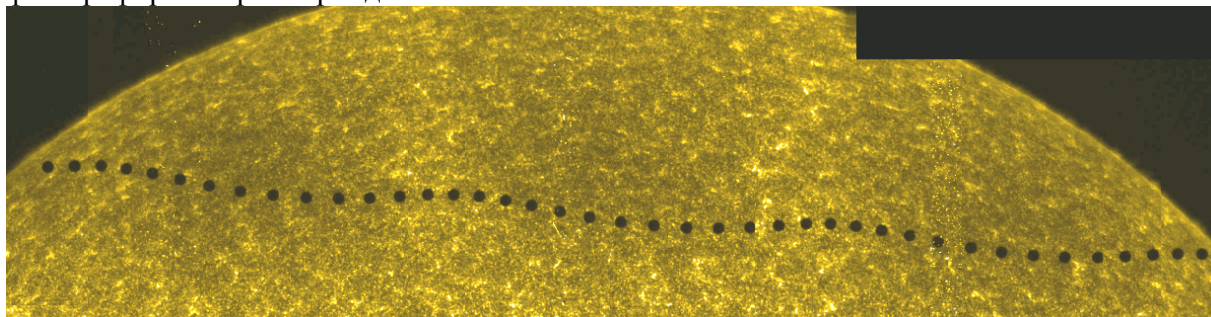
<http://astro-olymp.org>

Национален кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 9-10 клас

Практическа задача. Пасаж на Меркурий.

На 7 май 2003 г. се е наблюдавал пасаж на Меркурий – преминаване на планетата на фона на видимия диск на Слънцето. Пасажът е заснет от спътника TRACE, който е предназначен за наблюдение на факелите в слънчевата фотосфера. На снимката виждате последователните положения на планетата Меркурий, на фона на Слънцето, фотографирани през период 450 сек.



Спътникът TRACE се движи по полярна орбита около Земята. Движението на спътника се настройва така, че равнината на орбитата му винаги да е перпендикулярна на направлението към Слънцето. В следващата таблица са дадени отклоненията на видимото положение на Меркурий от средната линия на пасажа за различни моменти от време.

Време, h, min	5:19	5:27	5:34	5:42	5:49	5:57
Отклонение	+0.0010°	+0.0025°	+0.0045°	+0.0035°	+0.0023°	+0.0011°
Време, h, min	6:04	6:12	6:19	6:27	6:34	6:42
Отклонение	-0.0013°	-0.0025°	-0.0035°	-0.0044°	-0.0024°	-0.0011°
Време, h, min	6:49	6:57	7:04	7:12	7:19	7:27
Отклонение	+0.0015°	+0.0028°	+0.0046°	+0.0038°	+0.0038°	+0.0010°
Време, h, min	7:34	7:42	7:49	7:57	8:04	8:12
Отклонение	+0.0004°	-0.0013°	-0.0032°	-0.0039°	-0.0043°	-0.0024°
Време, h, min	8:19	8:27	8:34	8:42	8:49	8:57
Отклонение	-0.0010°	+0.0015°	+0.0025°	+0.0045°	+0.0035°	+0.0025°
Време, h, min	9:04	9:12				
Отклонение	+0.0010°	+0.0000°				

- Постройте графика на изменението на ъгловото отклонение на Меркурий с времето и определете амплитудата на това изменение.
- Определете орбиталния период на спътника и радиуса на неговата орбита.
- Определете разстоянието в километри от Земята до Меркурий по времето, когато се е наблюдавал пасажът. Обяснете вашия метод на работа.

Масата на Земята е 5.97×10^{24} кг, а гравитационната константа е 6.67×10^{-11} м³/кг.с².

III кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

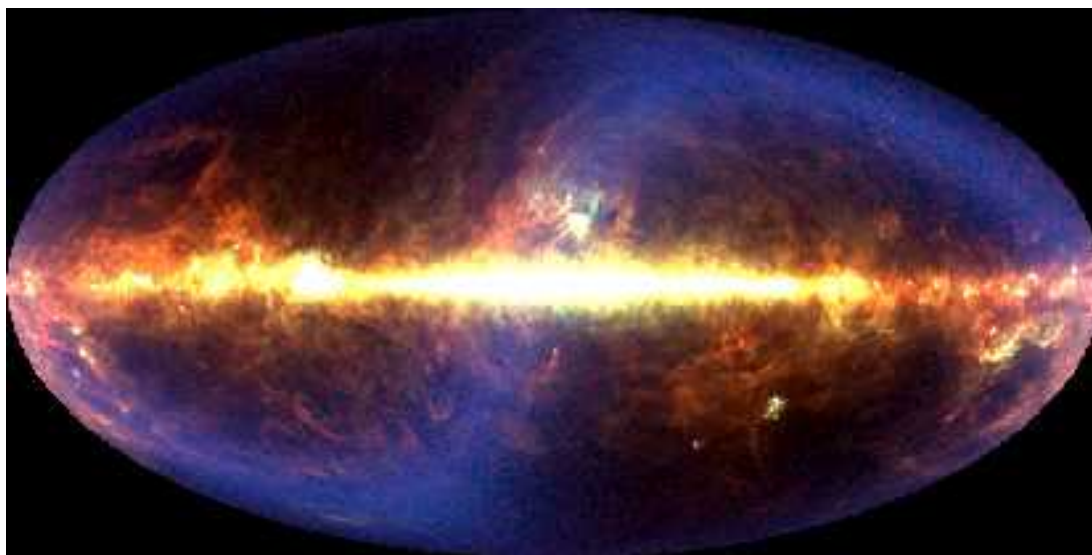
Ученици от 9-10 клас – решения

1 задача. Полюси.

- Определете ректасцензията и деклинацията на северния полюс на еклиптиката.
- Средната линия на Млечния път се пресича с небесния екватор под ъгъл 62° .

Ректасцензията на една от точките на пресичане е $18^{\text{h}}40^{\text{m}}$. Определете ректасцензията и деклинацията на северния галактичен полюс.

- Даденото ви изображение представлява карта на цялата небесна сфера, получена при наблюдения в инфрачервени лъчи. В кое съзвездие се намира централната част на картата? Използвайте това изображение, за да нарисувате схема, показваща разположението и ориентацията на Слънчевата система в Галактиката.

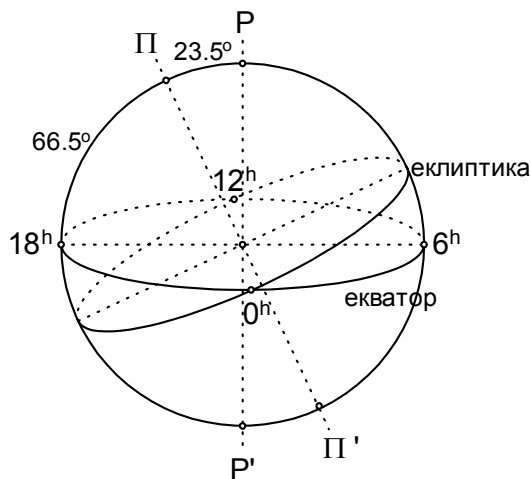


Решение:

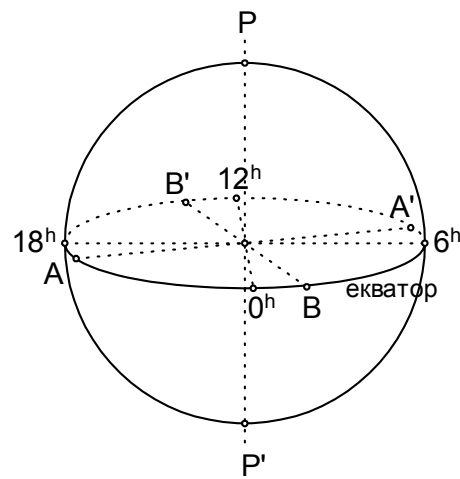
Както знаем, оста на земното кълбо е наклонена на ъгъл приблизително 23.5° към оста на земната орбита около Слънцето, или както е прието да се казва, оста на еклиптиката. На Фиг. 1 е представена небесната сфера. С Р и Р' са отбелязани северният и южният небесен полюс, а с П и П' – северният и южният еклиптичен полюс. Еклиптиката и небесният екватор се пресичат в две точки – пролетната и есенната равноденствени точки. Прието е ректасцензията да се отчита от пролетната равноденствена точка, т.е. тази точка има ректасцензия 0^{h} . След като премине през пролетната равноденствена точка при своето видимо годишно движение по небесната сфера, Слънцето започва да се издига в северната небесна полусфера и в деня на лятното слънцестоене достига до деклинация 23.5° . Тогава то има ректасцензия 6^{h} . Следователно северният полюс на еклиптиката има ректасцензия 18^{h} . Деклинацията на северния еклиптичен полюс е $90^\circ - 23.5^\circ = 66.5^\circ$.

Средната линия на Млечния път ни показва ориентацията на плоскостта на Галактиката. Щом тя се пресича с небесния екватор под ъгъл 62° , то деклинацията на северния полюс на Галактиката трябва да е $90^\circ - 62^\circ = 28^\circ$. На Фиг. 2 отново е дадена небесната сфера. С А и А' са отбелязани пресечните точки на средната линия на Млечния път и небесния екватор. Нека А е точката, чиято ректасцензия е 18^h40^m . Това означава, че ректасцензията на северния галактичен полюс може да е или 0^h40^m , или 12^h40^m – зависи как е ориентирана оста на Галактиката.

Добрите астрономи любители биха могли да знаят, че северният галактичен полюс се намира в съзвездието Косите на Вероника. То е в съседство със зодиакалните съзвездия Лъв и Дева. Там Слънцето се намира около началото на есента, което съответства на ректасцензия около 12^h . Следователно ректасцензията на северния еклиптичен полюс е 12^h40^m . До същия извод може да се стигне и като се използва друг известен факт. Ректасцензия 18^h съответства на положението на Слънцето в началото на зимата. Следователно тази област е близо до ядрото на Галактиката, намиращо се по направление на съзвездието Стрелец. А добрите познавачи на звездното небе трябва да знаят, че оттам по посока на нарастване на ректасцензията Млечният път се издига нагоре в северната небесна полусфера към съзвездията Орел и Лебед. Следователно оста на Галактиката трябва да е наклонена приблизително към есенната равноденствена точка, откъдето отново правим извода, че ректасцензията на Северния галактичен полюс е 12^h40^m .



Фиг. 1

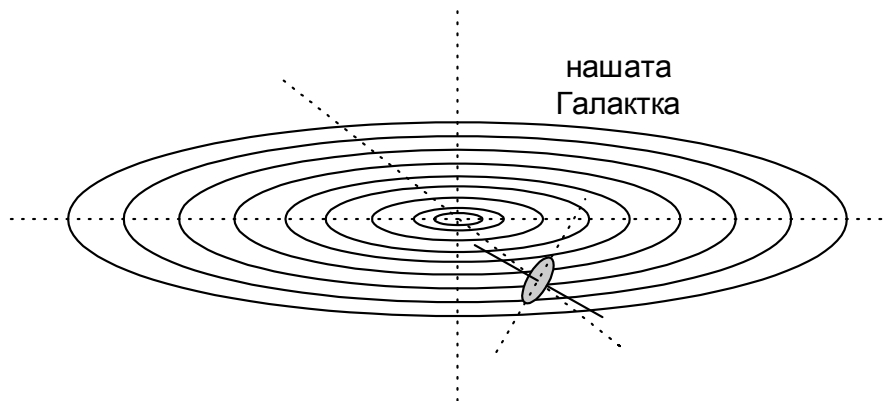


Фиг. 2

На изображението на небето в инфрачервени лъчи ярката жълтобяла ивица представлява Млечния път. Най-ярката област от него е в центъра на изображението. По направление към тази област е ядрото на нашата Галактика. Във видима светлина то е закрито от тъмни газова-прахови космически облаци. За разлика от видимата светлина, инфрачервените лъчи преминават през тези облаци, а и самите облаци преизлъчват под формата на инфрачервени лъчи погълнатото от тях лъчение на звездите. Следователно в центъра на изображението е областта на съзвездието Стрелец, в което както знаем, се намира центърът на Галактиката.

Да обърнем внимание на синкавата светла ивица, която се пресича с Млечния път. Тя се получава от инфрачервеното излъчване на праховите частици, съсредоточени около плоскостта на планетните орбити в нашата собствена Слънчева система. С други думи ориентацията и разположението на синкавата ивица са близки до тези на еклиптиката. Ясно се вижда, че плоскостта на планетните орбити в Слънчевата система сключва доста голям ъгъл с плоскостта на Галактиката. В резултат на тези разсъждения и като знаем, че

Слънцето се намира по-скоро към периферията на галактиката (на разстояние от галактичния център около $2/3$ от радиуса на Галактиката), можем да построим схемата на разположението на Слънчевата система в Галактиката, дадена по-долу.



Равнината на планетните орбити е дадена в перспективно изображение като сива елипса. Разбира се размерите на Слънчевата система са много силно преувеличени – ние знаем, че в сравнение с огромните галактични мащаби, те са нищожни.

Критерии за оценяване (общо 18 т.):

За правилно обяснение на начина и определяне на деклинацията на северния еклиптичен полюс – 2 т.

За правилно обяснение на начина и определяне на ректасцензията му – 3 т.

За правилно определяне на деклинацията на северния полюс на Галактиката – 2 т.

За правилни теоретични разсъждения относно определянето на ректасцензията на северния галактичен полюс – 2 т.

За проявени допълнителни знания, спомагащи за окончателното определяне на ректасцензията му и верен краен извод – 3 т.

За разбиране какво представлява ярката жълтобяла ивица на изображението в инфрачервени лъчи – 1 т.

За отговор кое съзвездие се намира в центъра на изображението – 1 т.

За обяснение какво представлява синкавата ивица – 1 т.

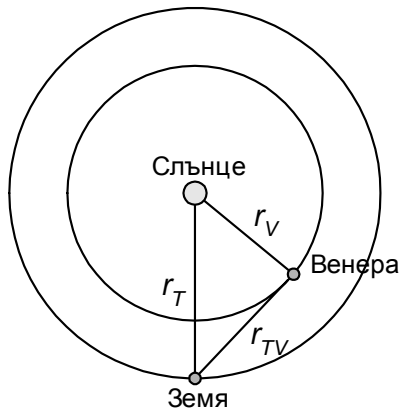
За правилно съставена схема на разположението на Слънчевата система в Галактиката и обяснения – 3 т.

2 задача. Наблюдения от Ганимед. Вие участвате в космическа експедиция по изучаване на Галилеевите спътници на Юпитер. В една нощ, когато се намирате на Ганимед и изпитвате носталгия по родната планета, вие преглеждате общопланетния компютърен алманах и се опитвате да разберете кога Земята е най-ярка, гледана от Ганимед. Поглеждате към небето и се опитвате да я откриете.

- Определете приблизително видимата звездна величина на Земята, когато тя се вижда от Ганимед и е най-ярка. Използвайте дадените справочни данни. Приемете, че когато виждаме осветен половината диск на една планета, примерно Луната в първа четвърт, тя е по-слаба с 1^m отколкото когато е осветен целият диск на планетата.

- Ще можете ли да видите Земята с невъоръжено око? А Луната? Ще можете ли да различите Земята и Луната като отделни обекти? Разделителната способност на човешкото око е около 1-2 дъгови минути.

Решение:



В справочните данни ни е дадена звездната величина на Венера, когато тя е в максимална елонгация. Да означим с r_T и r_V радиусите съответно на земната орбита около Слънцето и на орбитата на Венера, а с r_{TV} разстоянието от Земята до Венера, когато Венера е в максимална елонгация. Като използваме теоремата на Питагор, намираме:

$$r_{TV} = \sqrt{r_T^2 - r_V^2}$$

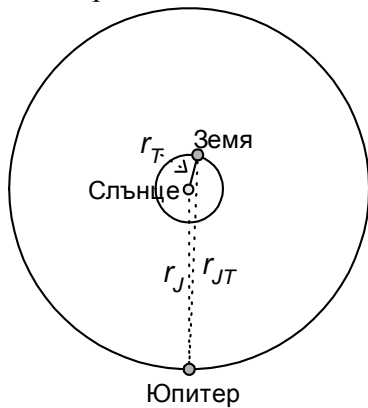
Означаваме още с L светимостта на Слънцето, а с R_V и A_V съответно радиуса и отражателната способност на Венера.

Осветеността E_{VT} , която Слънцето създава на единица повърхност на разстоянието до Венера, ще бъде $L/4\pi r_V^2$. Общата слънчева енергия, която попада върху повърхността на Венера, ще получим като умножим тази осветеност по площта на напречното сечение на Венера πR_V^2 . Правим приближение, според което тази светлинна енергия се разсейва равномерно от осветената част на Венера в полусфера. Осветеността, която Венера създава върху Земята, ще получим, като умножим общата попадаща светлинна енергия върху Венера на отражателната ѝ способност A_V и разделим на $2\pi r_{TV}^2$. Така пресмятаме:

$$E_{VT} = \frac{L}{4\pi r_V^2} \cdot \frac{A_V \pi R_V^2}{2\pi r_{TV}^2}$$

Трябва да отбележим, че при пресмятането на тази осветеност не сме отчели фазата на Венера, която в максимална елонгация е подобна на фазата на Луната в първа или последна четвърт. Следователно тази осветеност съответства не на действителната звездна величина на Венера -4.6^m , а на звездната величина, която тя би имала, ако беше изцяло обърната с осветената си страна към нас. Съгласно пояснението в задачата, тази звездна величина би трябвало да бъде $-4.6^m - 1^m = -5.6^m$.

За Юпитер Земята е вътрешна планета и би трябвало периодите на най-благоприятната ѝ видимост да са около моментите на максимална елонгация на Земята.



Нека не забравяме, обаче, че спътникът Ганимед няма атмосфера. Това означава, че като си закрием Слънцето с ръка, ние ще виждаме Земята в черното небе на този спътник, дори когато тя е на малко ъглово отстояние от Слънцето. В момент, близък до горно съединение, Земята ще е почти изцяло обърната към нас с осветената си от него страна. Това ще я прави по-ярка, отколкото в максимална елонгация, въпреки че тогава тя ще е малко по-далеч от нас. Разликата в разстоянието няма да оказва съществено влияние върху видимата звездна величина на Земята, защото земната орбита е с над пет пъти по-малък радиус от орбитата на Юпитер.

Разстоянието от Юпитер до Земята в такъв случай ще бъде $r_{JT} = r_J - r_T$, където r_J е радиусът на орбитата на Юпитер. За осветеността, създавана от Земята на Ганимед можем да напишем:

$$E_{TJ} = \frac{L}{4\pi r_T^2} \cdot \frac{A_T \pi R_T^2}{2\pi r_{JT}^2}$$

където с A_T сме означили отражателната способност на Земята, а с R_T нейния радиус.

Накрая намираме отношението на осветеността, която Венера създава върху Земята, и осветеността, която Земята създава върху Ганимед:

$$\frac{E_V}{E_T} = \frac{A_V}{A_T} \cdot \frac{R_V^2}{R_T^2} \cdot \frac{r_T^2}{r_V^2} \cdot \frac{r_{JT}^2}{r_{TV}^2} \approx 115.6$$

Видимият блясък на Земята, гледана при това положение от Ганимед, ще бъде 115.6 пъти по-слаб, отколкото блясъкът на Венера за земните наблюдатели. Като знаем, че намаление на осветеността 100 пъти отговаря на разлика в звездните величини 5^m , виждаме, че звездната величина на Земята, гледана от Ганимед, ще съответства на доста ярък блясък. С положителност Земята ще се вижда лесно с невъоръжено око от Ганимед. Като използваме логаритмичния вид на формулата на Погсон, получаваме по-точно видимата звездна величина на Земята за наблюдател от Ганимед:

$$m_T = -5.6^m + 2.5 \lg 115.6 \approx -0.44^m$$

За отношението на осветеностите, които Земята и Луната създават на Ганимед, можем да напишем:

$$\frac{E_T}{E_L} = \frac{A_T \pi R_T^2}{A_L \pi R_L^2} \approx 41.5,$$

където A_L и R_L са отражателната способност и радиусът на Луната. Звездната величина на Луната ще бъде:

$$m_L = -0.44^m + 2.5 \lg 41.5 \approx 3.4^m$$

Така че и нашият спътник ще е достатъчно ярък, за да го видим с невъоръжено око от Ганимед.

Дали ще можем обаче да различим Земята и Луната като отделни обекти? Ъгълът, под който ще виждаме разстоянието r_{TL} между Земята и Луната, ще бъде:

$$\Delta = \frac{r_{TL}}{r_{JT}} \cdot \frac{180^\circ}{\pi} \approx 0.024^\circ \approx 1.4'$$

Това е на границата на разделителната способност на човешките очи и следователно само хората с много добро зрение ще могат да различават двата обекта.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За пресмятане на осветеността, създавана на Земята от Венера в максимална елонгация – 3 т.

За вярно разсъждение и отчитане на ефекта, свързан с фазата на Венера – 1 т.

За правилни съображения и обяснения в каква позиция Земята ще е най-ярка за наблюдател на Ганимед – 2 т.

За пресмятане на осветеността, създавана от Земята на Ганимед – 2 т.

За правилен метод за определяне на звездната величина на Земята – 2 т.

За верен числен резултат и извод дали Земята ще се вижда с просто око – 2 т.

За определяне на звездната величина на Луната – 2 т.

За верен числен отговор и извод дали ще се вижда с просто око – 2 т.

За правилен метод за определяне дали ще различаваме двата обекта – 2 т.

За определяне на видимото ъглово отстояние между Земята и Луната – 1 т.

За правилно заключение дали ще се различават – 1 т.

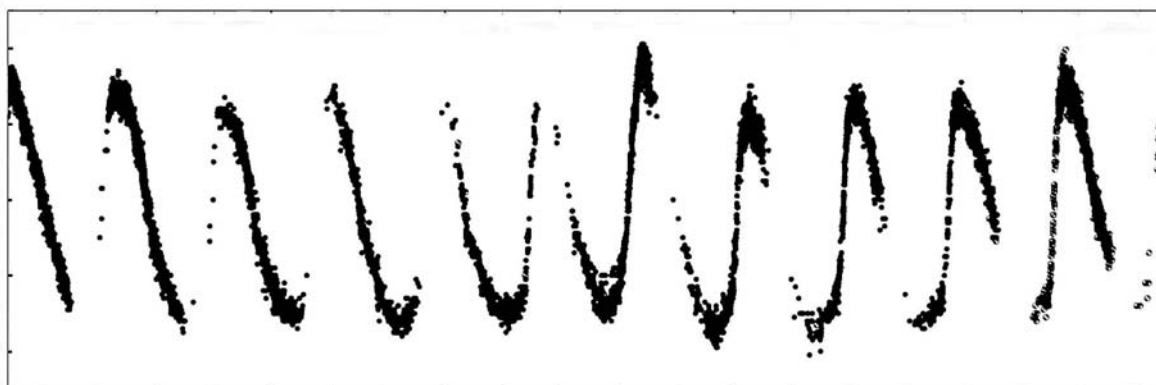
3 задача. Удивителната звезда. Звездата Мира от съвездието Кит е червен гигант, който се наблюдава като пулсираща променлива звезда. Тя дава името на цял клас променливи звезди, наречени мириди, които пулсират с много дълъг период, от порядъка на няколкостотин дни. Разполагате с крива на блясъка на Мира, получена по данни на Американската асоциация на наблюдателите на променливи звезди (AAVSO) за дълъг период от време. В AAVSO членуват стотици астрономи любители от цял свят, които работят много ентузиазирани и наблюдават винаги, когато е възможно.

- На какво се дължат прекъсванията в кривата на блясъка и през какъв период от време се повтарят?

- Разграфете хоризонталната ос – оста на времето – в подходящи мерни единици.

- Определете приблизително периода на изменение на блясъка на пулсиращата променлива звезда Мира.

- Спомнете си колко ярка става Мира в максимума на своя блясък, каква амплитуда има и се опитайте да възстановите оцифроването в звездни величини на вертикалната ос.



Решение:

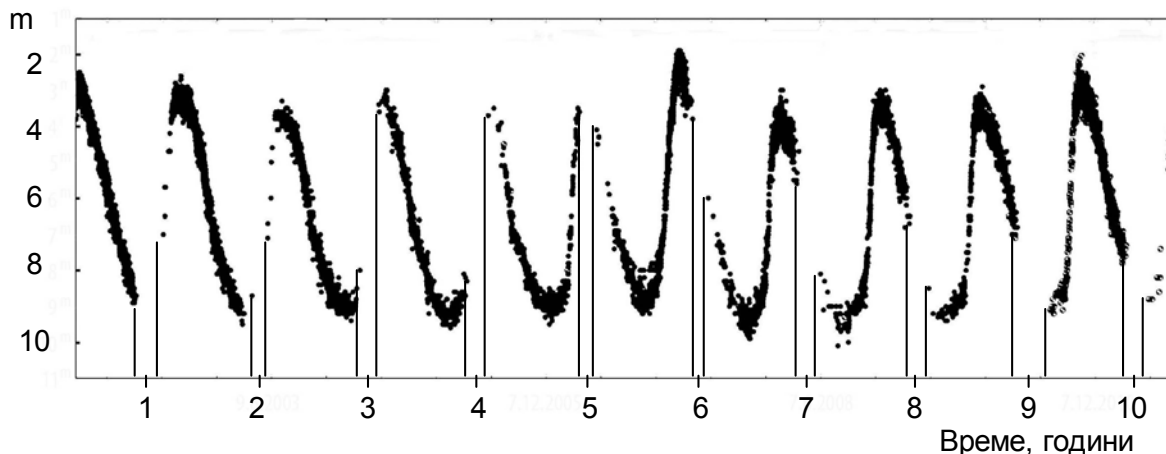
Спускаме перпендикуляри към оста на времето, ограничаващи интервалите, в които липсват данни. Виждаме, че тези интервали се повтарят през приблизително равни периоди от време. Предполагаме, че всеки от тези периоди е равен на една година. Мира е звезда от съвездието Кит, което е близо до еклиптиката. Нека си припомним, малко над него са зодиакалните съвездия Овен и Риби. Всяка година има интервал от време, когато Слънцето при видимото си годишно движение по еклиптиката, преминава недалеч от Мира. Тогава Мира не може да се наблюдава. Затова, колкото и ентузиазирани да са наблюдателите на променливи звезди, те няма как да изпращат наблюдателни данни в AAVSO през такива интервали от време. Следователно, използвайки средите на определените от нас интервали, ние можем приблизително да разграфим скалата на времето в години. Това няма да е много точно разграфяване, понеже не е сигурно, че всеки интервал от време без данни е симетричен по отношение на средата на неблагоприятния за наблюдение отрязък от време. Роля за това могат да окажат метеорологичните условия и други фактори, свързани със самите наблюдатели, доставящи данни. Освен това,

периодите от време, през които пулсиращите звезди от типа на Мира изменят блясъка си, не са съвсем постоянни.

За да определим по-точно мащаба на скалата на времето, измерваме разстоянието между средите на първия и осмия интервали без наблюдения. Деветият и десетият интервали изглеждат по-ненадеждни и не ги използваме. Получаваме 104 мм, които съответстват на 7 години. Оттук определяме, че една година отговаря на $104 / 7 \approx 14.9$ мм. След това измерваме разстоянието между първия изцяло наблюдаван максимум на блясъка и последния. То е 122 мм. В този интервал се съдържат 9 периода на пулсиране на звездата. Следователно на един период отговарят $122 / 9 \approx 13.6$ мм. За периода на изменение на блясъка на Мира в дни получаваме:

$$P = 365.25 \text{ дни} \cdot \frac{13.56}{14.86} \approx 333 \text{ дни}$$

В максимума на блясъка си Мира става една от сравнително ярките звезди на небето, достигайки до 2-ра звездна величина. В минимум блясъкът ѝ пада под 10-та звездна величина и вече трудно може да се види в малък телескоп. Използваме тези знания, за да нанесем звездните величини по вертикалната скала.



Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За графично установяване на факта, че интервалите без данни се повтарят през равни периоди – 2 т.

За предположение и обяснение защо тези периоди са по една година – 3 т.

За разграфяване на скалата на времето в години – 2 т.

За измерване и определяне на мащаба на скалата на времето – 2 т.

За измерване и определяне на периода на изменение на блясъка на Мира – 2 т.

За верен числен резултат 1 т.

За нанасяне на звездните величини по вертикалната скала – 2 т.

Справочни данни:

Радиус на Земята	6370 км	Отражателна способност на Земята	0.37
Радиус на Венера	6052 км	Отражателна способност на Венера	0.67
Радиус на Луната	1737 км	Отражателна способност на Луната	0.12
Радиуси на орбитите около Слънцето на:	Венера 0.723 AU;	Юпитер	5.20 AU
Радиус на орбитата на Луната около Земята:	0.00256 AU		
Звездна величина на Венера в максимална елонгация:	– 4.6 ^m		

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

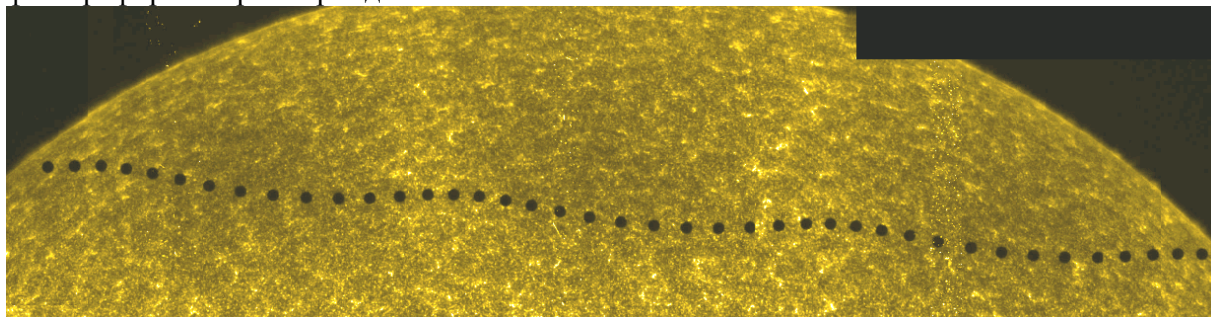
<http://astro-olymp.org>

III кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 9-10 клас – решение

Практическа задача. Пасаж на Меркурий.

На 7 май 2003 г. се е наблюдавал пасаж на Меркурий – преминаване на планетата на фона на видимия диск на Слънцето. Пасажът е заснет от спътника TRACE, който е предназначен за наблюдение на факелите в слънчевата фотосфера. На снимката виждате последователните положения на планетата Меркурий, на фона на Слънцето, фотографирани през период 450 сек.



Спътникът TRACE се движи по полярна орбита около Земята. Движението на спътника се настройва така, че равнината на орбитата му винаги да е перпендикулярна на направлението към Слънцето. В следващата таблица са дадени отклоненията на видимото положение на Меркурий от средната линия на пасажа за различни моменти от време.

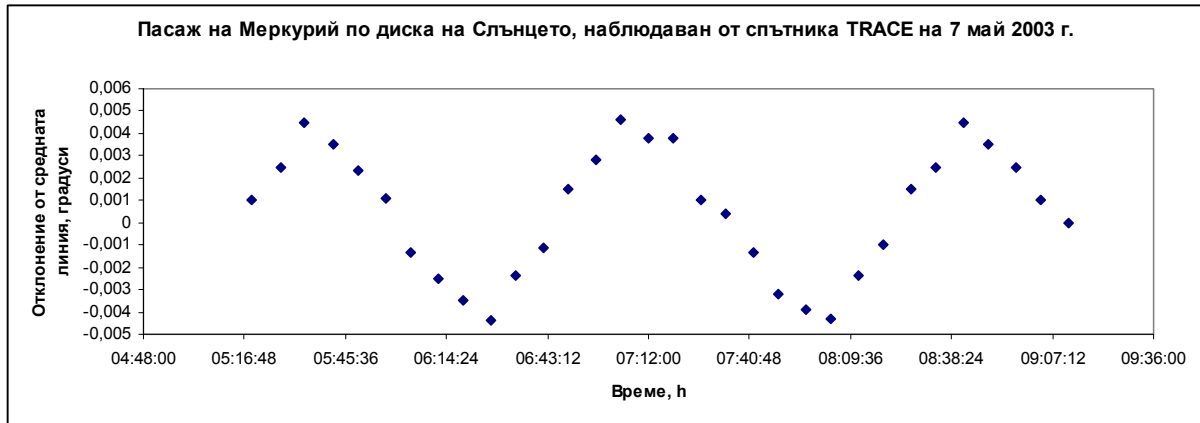
Време, h, min	5:19	5:27	5:34	5:42	5:49	5:57
Отклонение	+0.0010°	+0.0025°	+0.0045°	+0.0035°	+0.0023°	+0.0011°
Време, h, min	6:04	6:12	6:19	6:27	6:34	6:42
Отклонение	-0.0013°	-0.0025°	-0.0035°	-0.0044°	-0.0024°	-0.0011°
Време, h, min	6:49	6:57	7:04	7:12	7:19	7:27
Отклонение	+0.0015°	+0.0028°	+0.0046°	+0.0038°	+0.0038°	+0.0010°
Време, h, min	7:34	7:42	7:49	7:57	8:04	8:12
Отклонение	+0.0004°	-0.0013°	-0.0032°	-0.0039°	-0.0043°	-0.0024°
Време, h, min	8:19	8:27	8:34	8:42	8:49	8:57
Отклонение	-0.0010°	+0.0015°	+0.0025°	+0.0045°	+0.0035°	+0.0025°
Време, h, min	9:04	9:12				
Отклонение	+0.0010°	+0.0000°				

- Постройте графика на изменението на ъгловото отклонение на Меркурий с времето и определете амплитудата на това изменение.
- Определете орбиталния период на спътника и радиуса на неговата орбита.
- Определете разстоянието в километри от Земята до Меркурий по времето, когато се е наблюдавал пасажът. Обяснете вашия метод на работа.

Масата на Земята е 5.97×10^{24} кг, а гравитационната константа е 6.67×10^{-11} м³/кг.с².

Решение:

Като използваме данните от таблицата, построяваме графика на изменението на ъгловото отклонение на Меркурий от средната линия на пасажа с времето.



Като прекараме плавна линия през точките, определяме средна стойност на амплитудата на отклонението $\pm 0.0045^\circ$.

Вълнообразното видимо движение на Меркурий по време на пасажа се дължи на различните гледни точки, от които го фотографира спътникът при орбиталното си движение около Земята. Благоприятно обстоятелство за по-голямо видимо ъглово отместване на Меркурий е, че спътникът се движи винаги в равнина, перпендикулярна на направлението към Слънцето. Периодът на вълнообразното движение на Меркурий е равен на орбиталния период на спътника. Определяме този период от графиката или от снимката, като знаем, че на снимката изображенията са получени през интервал от време 450 секунди. По снимката например намираме, че три периода на лъкатушно движение на Меркурий са равни на $38 \times 450 \text{ с.} = 17100 \text{ с.}$ Следователно орбиталният период на спътника е $T = 17100 : 3 \approx 5700 \text{ с.} = 1 \text{ ч. } 35 \text{ мин.}$

Радиуса на орбитата на спътника r намираме чрез III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2},$$

където M е масата на Земята, а γ е гравитационната константа.

$$r = \sqrt[3]{\frac{\gamma M T^2}{4\pi^2}} \approx 6897 \text{ км}$$

Паралактичното отместване на Меркурий по време на пасажа показва, че за наблюдател от Меркурий радиусът на орбитата на спътника се е виждал под ъгъл, равен на 0.0045° . Нека разстоянието от Земята до Меркурий да е x . В сила е следното съотношение:

$$r = x \times 0.0045^\circ \times \frac{\pi}{180^\circ}$$

$$x \approx 88 \times 10^6 \text{ км}$$

Това разстояние е много близко до истинското разстояние, което е било по време на пасажа на Меркурий.

Критерии за оценяване (общо 16 т.):

За построяване на графиката – 3 т.

За определяне на амплитудата на отклонение на Меркурий – 2 т.

За обяснение на какво се дължи вълнообразното движение на Меркурий и извода, че периодът на движението е равен на орбиталния период на спътника – 3 т.

За определяне на периода на спътника по снимката или графиката – 2 т.

За пресмятане на радиуса на орбитата – 2 т.

За правилен математически подход при определяне на разстоянието до Меркурий и обяснение – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

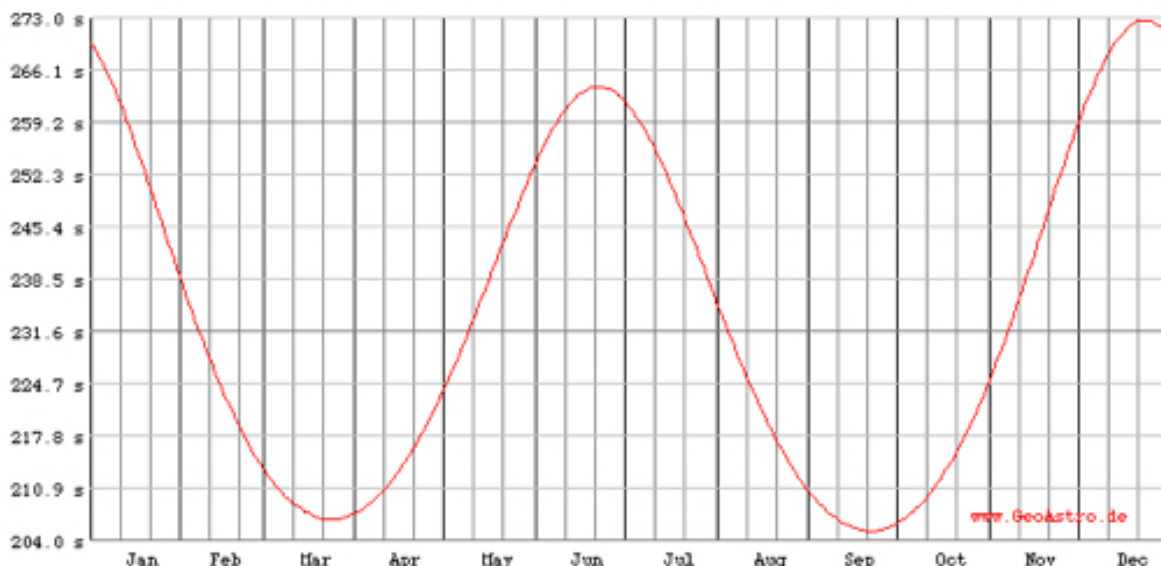
Национален кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 11-12 клас

1 задача. Нека под продължителност на слънчевия изгрев да разбираме времето между момента, когато най-горната точка от видимия слънчев диск докосне хоризонта, и момента, когато най-долната точка от слънчевия диск се издигне на хоризонта. Дадената ви диаграма показва как се изменя продължителността на изгрева на Слънцето.

- Обяснете защо максимумите и минимумите на диаграмата се случват в съответните периоди от годината. Защо максимумите имат различна височина?

- Определете географската ширина на мястото, за което се отнася диаграмата. Считайте, че средният видим ъглов диаметър на Слънцето е 32.15 дъгови минути.



2 задача. Тъмни небеса. Тайната звезда е скрита в плътен космически облак. Лъчението на звездата е отвяло веществото от централните части на облака към периферията. В това пространство, изпълнено само с много разрежена материя, около Тайната звезда практически без съпротивление по кръгови орбити се движат Пясъчната и Водната планета. Поради космическия облак, обаче, от повърхността на планетите нощем не може да се види нито една звезда. Учените от Водната планета вече са развили много добре теорията за гравитацията и познават всички закономерности, които следват от нея и се отнасят до движението на космическите тела. Освен това, те системно наблюдават Пясъчната планета, която е вътрешна за тях.

- Предложете метод, по който учените от Водната планета могат да определят отношението на радиусите на орбитите на двете планети и орбиталния период на своята планета. Опишете какви наблюдения трябва да се направят. Обосновайте метода чрез алгебрични пресмятания.

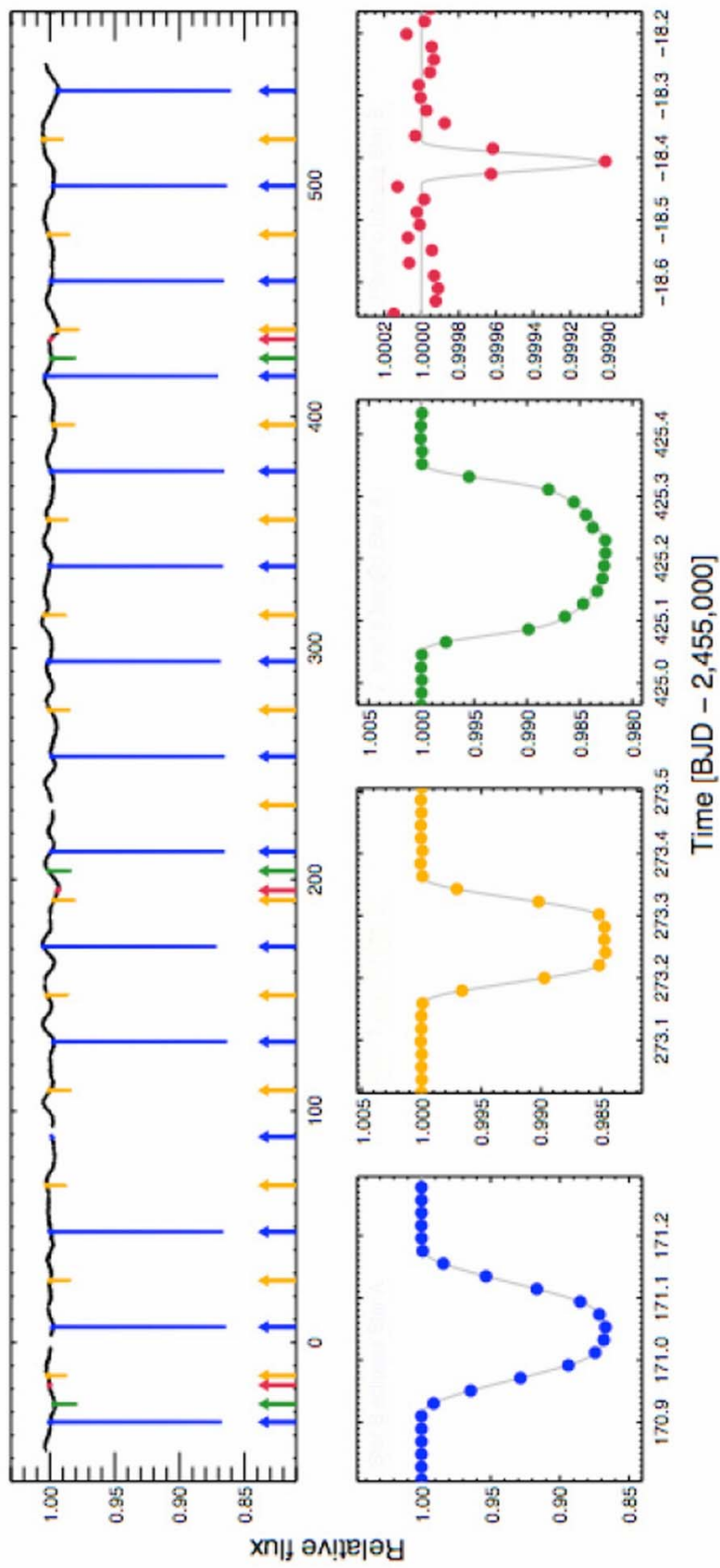
- След като са пресметнали величините, посочени в първото подусловие, астрономите от Водната планета искат да определят и масата на Тайната звезда. Опишете само качествено какви допълнителни наблюдения трябва да направят, какво ще определят от тях и как ще намерят масата на своята звезда.

3 задача. Планетата около двойна звезда. Преди няколко месеца, с помощта на космическия телескоп *Kepler*, е открита за първи път планета около двойна звезда. При това звездата се наблюдава като затъмнително-променлива. По-ярката звезда е от спектрален клас K и е с радиус приблизително 0.65 слънчеви радиуса. Планетата Kepler-16b е с размерите на Сатурн и се движи едновременно около двете звезди, като преминава пред всяка една от тях. На кривата на блясъка се виждат както затъмненията на звездите една от друга, така и пасажите на планетата пред дисковете на звездите. В четири допълнителни диаграми, в по-подходящ мащаб, са показани примери на такива затъмнения и пасажи.

- Каква звезда е втората компонента на двойната звезда? Защо?
- Коя допълнителна крива на блясъка за какъв вид явление се отнася? Обяснете защо. Обяснете формата на кривите на блясъка при всеки вид затъмнение. Коментирайте качествено както продължителността на затъмненията, така и амплитудата на всяка крива на блясъка. Нарисувайте една вероятна позиция на телата при максимална фаза за всеки вид затъмнение.

- На горната крива на блясъка са дадени затъмненията за дълъг период от време. Всяко затъмнение е посочено със стрелка. Кое затъмнение за какъв вид явление се отнася? Какви са приблизителните периоди на звездите и планетата при тяхното движение по орбитите им?

Кривите на блясъка са дадени не в относителни звездни величини, а в относителни потоци светлина.



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

Национален кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 11-12 клас

Практическа задача. Юпитер и спътникът Йо.

Дадени са ви две снимки, направени на 28 септември 2011. Фотографирани са два последователни момента от преминаването на сянката на спътника Йо по видимия диск на планетата Юпитер. На първата снимка самият спътник Йо се вижда вляво от Юпитер. На втората снимка спътникът се проектира върху Юпитер и е посочен със стрелка.

На 29 октомври 2011 г. Юпитер е бил в противостоене.

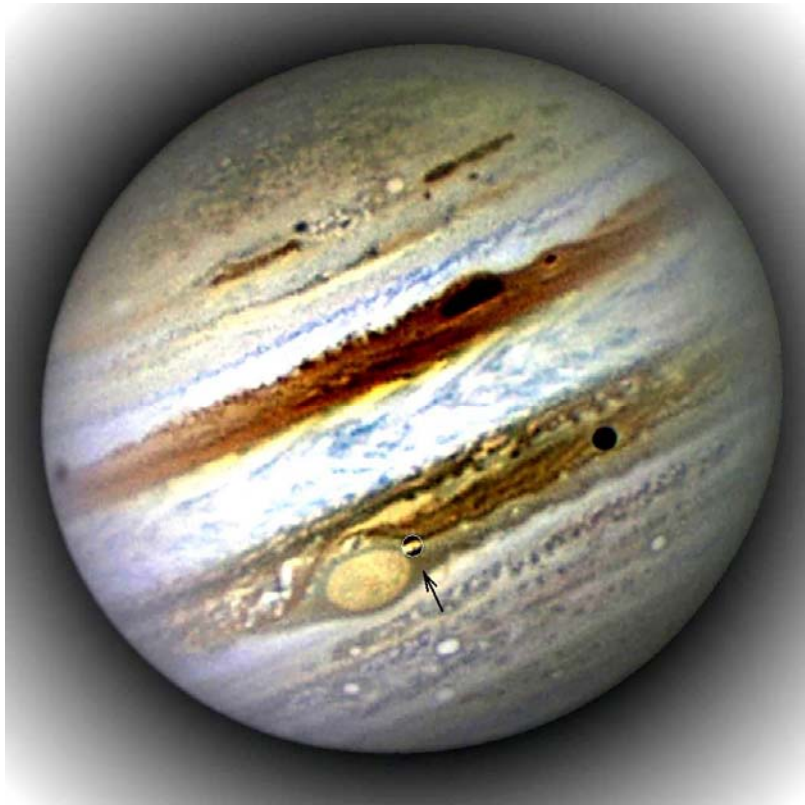
- Като използвате снимките, направете необходимите измервания и построения и пресметнете приблизително масата на Юпитер. Опишете вашия метод на работа.

Справочни данни:

Радиус на Юпитер	71 500 км,
Гравитационна константа	$6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$
Радиус на орбитата на Юпитер	5.2 AU
Орбитален период на Юпитер	11.862 год.



1:23 h UT



2:53:58 h UT

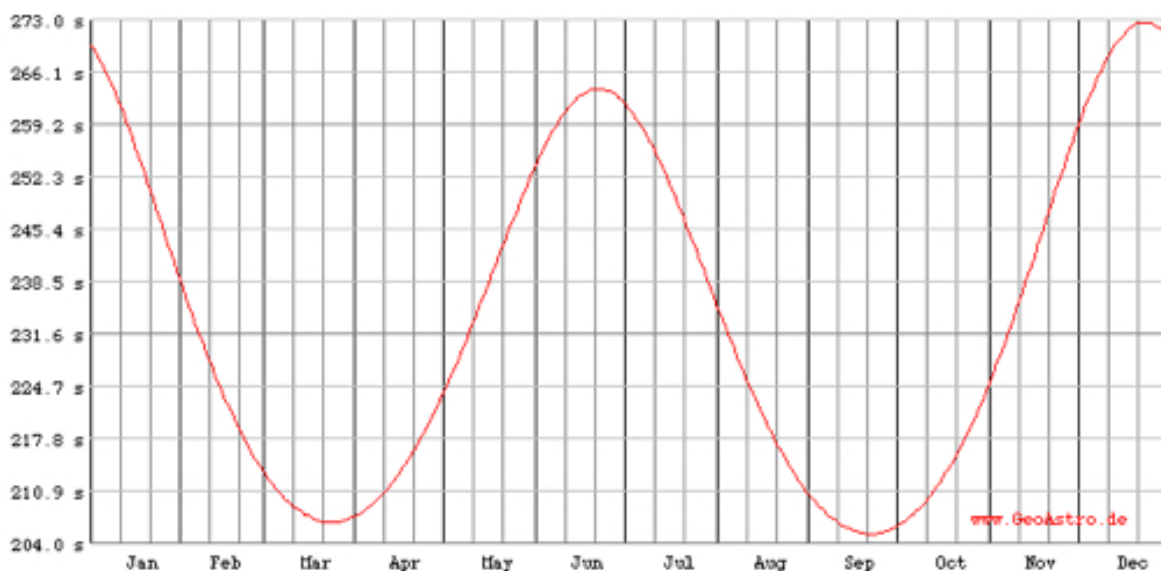
III кръг, 28 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 11-12 клас – решения

1 задача. Нека под продължителност на слънчевия изгрев да разбираме времето между момента, когато най-горната точка от видимия слънчев диск докосне хоризонта, и момента, когато най-долната точка от слънчевия диск се издигне на хоризонта. Дадената ви диаграма показва как се изменя продължителността на изгрева на Слънцето.

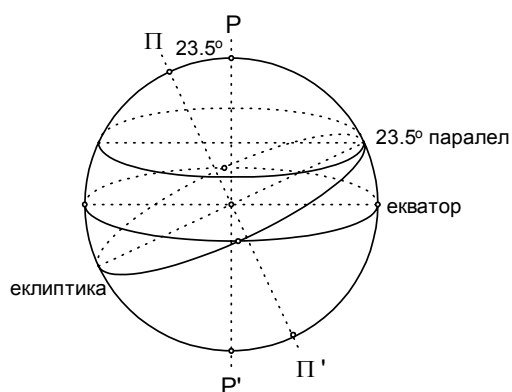
- Обяснете защо максимумите и минимумите на диаграмата се случват в съответните периоди от годината. Защо максимумите имат различна височина?

- Определете географската ширина на мястото, за което се отнася диаграмата. Считайте, че средният видим ъглов диаметър на Слънцето е 32.15 дъгови минути.



Решение:

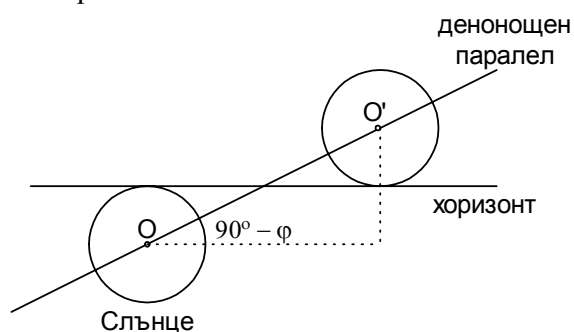
За времето, в което продължава изгревът, Слънцето трябва да измине определено разстояние по небесната сфера при своето видимо денонощно движение. Продължителността на изгрева е различна в различни периоди на годината, защото видимата ъглова скорост на преместване на Слънцето е различна. Факторите, от които зависи тя, са няколко.



Поради движението си по еклиптиката, през годината Слънцето мени своята деклинация. Затова паралелите от небесната сфера, които то описва, са различни по размер. Ако считаме, че слънчевото денонощие винаги е равно точно на 24 часа, то само по тази причина видимата ъглова скорост на преместване на Слънцето по различните денонощни паралели ще бъде различна.

Най-бавно Слънцето ще се движи по паралелите, които описва в дните на лятното или зимното слънцестоене. Те отстоят на 23.5 от екватора и видимата ъглова скорост на Слънцето тогава ще бъде $1/\cos 23.5^\circ \approx 1.09$ пъти по-малка (или с 9% по-малка), отколкото в дните на равноденствията, когато деклинацията му е нула и то описва денонощен паралел с размера на небесния екватор. Ето защо, както се вижда от диаграмата, има максимуми на продължителността на изгрева през юни и декември, когато са лятното и зимното слънцестоене, и минимума през март и септември, когато са равноденствията.

Максимумите имат различна височина. Продължителността на изгрева около лятното слънцестоене е малко по-малка, отколкото около зимното слънцестоене. Обяснението е свързано с неравномерното движение на Земята по нейната елиптична орбита около Слънцето. Всъщност върху видимото движение на Слънцето от изток на запад, поради околоосното въртене на Земята, се наслаждава видимото му годишно преместване в обратна посока – от запад на изток, поради орбиталното движение на Земята. Земята минава през перихелия на своята орбита в първите дни на януари. Тогава тя се движи с най-голяма скорост и е най-близо до Слънцето. Затова видимото годишно движение на Слънцето по еклиптиката е най-бързо и така най-силно се “забавя” видимото му денонощно движение по небето. Ето защо продължителността на изгревите около зимното слънцестоене е по-голяма, отколкото около лятното слънцестоене и максимумите имат различна височина.



Най-просто ще решим въпроса с определяне на географската ширина на наблюдателния пункт, като разгледаме случая на изгрев около равноденствията. Графиката показва, че тогава продължителността на изгрева е приблизително 206 секунди (взимаме средната продължителност от двата минимума на графиката).

Тогава Слънцето се движи по денонощен паралел с размерите на небесния екватор и датите са далеч от преминаването на Земята през перихелия и през афелия, така че не се налага да се въвеждат коригиращи коефициенти, поне за точността, с която работим. Денонощният паралел на Слънцето, съвпадащ с небесния екватор, е наклонен към хоризонта на ъгъл $90^\circ - \varphi$, където φ е търсената географска ширина. За времето, през което продължава изгревът, центърът на Слънцето изминава път OO' . Можем да го намерим чрез следната пропорция:

$$\begin{array}{rcl} 24 \text{ h} & - & 360^\circ \\ 206 \text{ s} & - & \text{OO}' \\ \hline \end{array}$$

$$\text{OO}' \approx 0.858^\circ$$

Както се вижда от чертежа, за време 206 s във вертикална посока центърът на Слънцето изминава разстояние колкото видимия ъглов диаметър на Слънцето δ_0 . Оттук намираме:

$$\begin{aligned} \sin(90^\circ - \varphi) &= \cos \varphi = \delta_0 / \text{OO}' \\ \varphi &= 51.37^\circ \end{aligned}$$

Критерии за оценяване (общо 16 т.):

За обяснение защо минимумите и максимумите се случват през съответните периоди от годината – 4 т.

За обяснение на различната височина на двата максимума – 4 т.

За подходящ избор на период през годината, данните от който да се използват за определяне на географската ширина и обяснение – 2 т.

За определяне на продължителността на изгрева, необходима за пресмятанията, от графиката – 1 т.

За правилна логическа постановка на решението на въпроса за ширината – 2 т.

За правилни пресмятания – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

2 задача. Тъмни небеса. Тайната звезда е скрита в плътен космически облак. Лъчението на звездата е отвяло веществото от централните части на облака към периферията. В това пространство, изпълнено само с много разрежена материя, около Тайната звезда практически без съпротивление по кръгови орбити се движат Пясъчната и Водната планета. Поради космическия облак, обаче, от повърхността на планетите нощем не може да се види нито една звезда. Учените от Водната планета вече са развили много добре теорията за гравитацията и познават всички закономерности, които следват от нея и се отнасят до движението на космическите тела. Освен това, те системно наблюдават Пясъчната планета, която е вътрешна за тях.

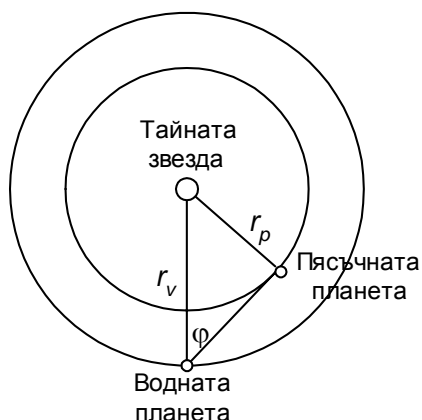
- Предложете метод, по който учените от Водната планета могат да определят отношението на радиусите на орбитите на двете планети и орбиталния период на своята планета. Опишете какви наблюдения трябва да се направят. Обосновете метода чрез алгебрични пресмятания.

- След като са пресметнали величините, посочени в първото подусловие, астрономите от Водната планета искат да определят и масата на Тайната звезда. Опишете само качествено какви допълнителни наблюдения трябва да направят, какво ще определят от тях и как ще намерят масата на своята звезда.

Решение:

Ако в небето на една планета не се виждат звезди, астрономите там не могат да проследяват видимото движение на другите планети от своята система и на своето слънце на фона на звездното небе. Те единствено могат да наблюдават относителните движения на звездите и слънцето. Понеже Пясъчната планета е вътрешна за Водната планета, учените от Водната планета могат да наблюдават редуващите се моменти на съединения и

максимални елонгации. От тези наблюдения те могат да измерват ъгловото отстояние φ на Пясъчната планета от Тайната звезда при максимална елонгация.



Това може да им помогне да определят съотношението на орбиталните радиуси на двете планети. Както се вижда от чертежа:

$$x = \frac{r_p}{r_v} = \sin \varphi$$

Извънземните същества могат да определят от наблюденията си и синодичния период на планетата T_S . Щом познават така добре теорията за гравитацията, можем да предположим, че знаят и III закон на Кеплер. Въз основа на това могат да се напишат следните уравнения:

$$\frac{1}{T_S} = \frac{1}{T_p} - \frac{1}{T_v}$$

$$\frac{r_v^3}{T_v^2} = \frac{r_p^3}{T_p^2}$$

където T_p и T_v са сидеричните периоди на Пясъчната и Водната планета. От тези уравнения получаваме:

$$T_v = T_S \cdot \frac{1 - \sqrt{x^3}}{\sqrt{x^3}}$$

Всъщност, астрономите от Водната планета могат да определят и орбиталния период на Пясъчната планета, макар това да не се иска в условието на задачата:

$$T_p = T_S \cdot (1 - \sqrt{x^3})$$

За да определят масата M на Тайната звезда, на извънземните астрономи им трябва да знаят само още поне един от радиусите на планетните орбити. Тогава те могат да напишат III закон на Кеплер във вида:

$$\frac{r^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

където r е орбиталният радиус на която и да е от планетите, а T е нейният сидеричен период. Оттук се получава:

$$M = \frac{4\pi^2 r^3}{\gamma T^2}$$

За да определят разстоянията на планетите до Тайната звезда, астрономите могат да наблюдават пасажа на Пясъчната планета по диска на Тайната звезда. За целта те трябва предварително да са определили размерите на собствената си планета и да наблюдават пасажа от най-малко два раздалечени един от друг пункта. При наблюденията от двата пункта Пясъчната планета ще се проектира на различни места върху диска на Тайната звезда. По това паралактично отместване, и като се знае разстоянието между двата наблюдателни пункта, може да се определи разстоянието от Водната до Пясъчната планета по време на пасажа. После лесно може да се определят и орбиталните радиуси на двете планети.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За разбиране на проблемите пред астрономите при липса на звезди и описание на идеята за метода за определяне на съотношението на орбиталните радиуси – 2 т.

За математическо представяне на метода – 2 т.

За правилно получаване на отношението на радиусите – 1 т.

За математическо представяне на метода за определяне на орбиталния период на Водната планета – 5 т.

За правилно пресмятане на периода – 1 т.

За математическо представяне на начина за определяне на масата на звездата – 2 т.

За качествено описание на начина за определяне на разстояния в планетната система – 2 т.

3 задача. Планетата около двойна звезда. Преди няколко месеца, с помощта на космическия телескоп *Kepler*, е открита за първи път планета около двойна звезда. При това звездата се наблюдава като затъмнително-променлива. По-ярката звезда е от спектрален клас К и е с радиус приблизително 0.65 слънчеви радиуса. Планетата Kepler-16b е с размерите на Сатурн и се движи едновременно около двете звезди, като преминава пред всяка една от тях. На кривата на блясъка се виждат както затъмненията на звездите една от друга, така и пасажите на планетата пред дисковете на звездите. В четири допълнителни диаграми, в по-подходящ мащаб, са показани примери на такива затъмнения и пасажи.

- Каква звезда е втората компонента на двойната звезда? Защо?
- Коя допълнителна крива на блясъка за какъв вид явление се отнася? Обяснете защо. Обяснете формата на кривите на блясъка при всеки вид затъмнение. Коментирайте качествено както продължителността на затъмненията, така и амплитудата на всяка крива на блясъка. Нарисувайте една вероятна позиция на телата при максимална фаза за всеки вид затъмнение.
- На горната крива на блясъка са дадени затъмненията за дълъг период от време. Всяко затъмнение е посочено със стрелка. Кое затъмнение за какъв вид явление се отнася? Какви са приблизителните периоди на звездите и планетата при тяхното движение по орбитите им?

Кривите на блясъка са дадени не в относителни звездни величини, а в относителни потоци светлина.

Решение: На горната крива на блясъка се вижда, че има два типа минимума, които са типични за двойна звезда. Това са дълбоките минимума, които се повтарят през точно определен интервал от време, и в средата на всеки интервал минимума, които са много по-плитки (с много по-малка амплитуда). На цветната крива те са означени съответни със син и с жълт цвят. При по-дълбоките минимума се затъмнява по-горещата звезда. Един индивидуален минимум е показан на втория ред, отляво. Виждаме, че промяната в потока светлина е плавен. Минимумът е заоблен. За разлика от него, вторичният минимум, чиято форма е показана вдясно от първичния, има плосък участък, който подсказва, че в този интервал от време ние виждаме само главната звезда, а по-малката по размери звезда е скрита зад нея за интервал от време равен, по продължителност, на плоския участък. Амплитудата на вторичния минимум е само един и половина процента от общия блясък на системата и следователно втората звезда е не само по-малка по размери от първата, но и

съществено по-слаба по блясък, а следователно по-студена и по-червена от главната звезда. Отгук правим извода, че втората компонента на двойната звезда е червено джудже.

Първият показан минимум е получен от затъмнение на главната звезда от вторичната, която е по-малка и по-студена. Виждаме че блясъкът първоначално спада сравнително равномерно, след това има заоблен минимум, след което блясъкът се покачва. Не се наблюдава равен участък, подобно на равния участък на вторичния минимум. Това се дължи на потъмнението към края на диска на главната звезда, а прекалено острият минимум подсказва и че затъмнението не е централно. Вторичният компонент преминава недалеч от края на звездата, поради което се движи в област силно повлияна от потъмнението към края на диска.

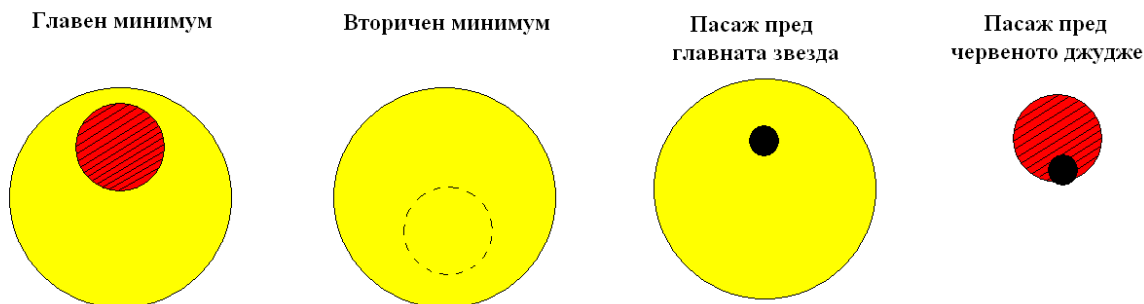
При вторичния минимум забелязваме, че равният участък е малко по-дълъг от една трета от продължителността на целия минимум. Следователно другите два участъка от кривата са малко по-къси от една трета от целия минимум. Знаейки вече, че затъмнението не е централно и че звездата се скрива и открива, пресичайки наклонен участък от края на диска на главния компонент, може да заключим, че най-вероятно вторичният компонент е около три пъти по-малък по размери от главния.

При внимателно сравнение на двата минимума забелязваме, че тяхната продължителност е различна. Ако орбитите на звездите са кръгови, това не е възможно. Следователно орбитите са елипси като апсидната линия на орбитите е насочена приблизително към наблюдателя. Затъмненията стават при преминаване на звездите през периастръра и апоастръра на техните орбити. Тъй като главният минимум е по-продължителен, то тогава звездите се намират недалеч от апоастръра на техните орбити. Във вторичния минимум, който е по-кратък, звездите са недалеч от периастръра на техните орбити и скоростта им е по-голяма.

Следващите два минимума са фотометрични профили на пасажа на планетата върху дисковете на звездите. Третият минимум (зеленият) се е получил вследствие на пасаж на планетата по диска на главната звезда. Той е по-продължителен, защото орбитата на планетата е по-голяма от орбитите на звездите. Затова планетата се движи по-бавно от звездите. *Все пак разликата не е много голяма. Причината за това е едно много странно обстоятелство. Въпреки предварителните представи, че около двойна звезда не може да има планета на стабилна орбита с радиус по-малък от седемкратното разстояние между компонентите на двойната звезда се оказва, че планетата Kepler-16b се намира на двойно по-малко разстояние, само три пъти и половина от разстоянието между звездите.* Формата на кривата е класическа за пасаж на планета върху диска на звездата. В началото има рязък спад на блясъка (макар и неголям по амплитуда) дължащ се на навлизането на диска на планетата пред диска на звездата. След това следва широк плавен участък който се формира при движението на планетата пред диска на звездата и чиято форма се определя от потъмнението към края на диска на звездата. Тъй като планетата преминава последователно и пред двете звезди, то тя вероятно пресича диска на главната компонента някъде между центъра и края на диска на звездата. Това също допринася за неголямата продължителност на затъмнението. Освен това този индивидуален минимум, както може да видим от горната крива на блясъка, е позициониран след главен минимум на двойната звезда, когато компонентите са преминали през апоастръра на своите орбити и главната компонента на двойната звезда се движи, макар и с относително неголяма скорост, в посока противоположна на движението на планетата по нейната орбита. Това, че планетата е по-малка по размери от звездите, също допринася минимумът да е по-кратък от очакваното. Освен това може да обърнем внимание на една лека вълничка след минимума на иначе много гладката крива. Тази неравномерност ни навежда на мисълта за

наличието на петна по диска на главната компонента. Наистина, ако планетата застане точно пред петно върху диска на планетата, тя ще блокира по-малко светлина, а ако преди това мине пред факелно поле, тя ще блокира малко повече светлина от средното. *(Както ще видим, наличието на петна ще установим и при анализа на общата крива на блясъка).*

Последната индивидуална крива на минимум, червената, на пръв поглед изглежда много странно. Тя е много кратка и с много малка амплитуда – само една хилядна от общия блясък на системата. Това се обяснява с преминаването на планетата пред диска на втората компонента – червеното джудже. Краткостта на затъмнението се дължи преди всичко на малките размери на вторичния компонент на двойната звезда. Приносът на червеното джудже към общия блясък на системата е много малък – половин процент. Затова затъмняването на част от диска му води до много малки промени в общия блясък на системата. Формата на минимума ни навежда на мисълта, че затъмнението не е пълно. Планетата навлиза пред диска на малката звезда странично, като част от нея остава извън диска на звездата. При максималната фаза планетата с вътрешния край на диска си, за много кратък интервал от време, блокира част от по-ярката централна област от звездата. Това води до кратък остър минимум, какъвто наблюдаваме.



На горната крива на блясъка е дадена промяната в блясъка на системата за продължителен период от време, около 600 дни. Най-дълбоките минимума, отбелязани със син цвят, са главните минимума. *Четвъртият главен минимум липсва. Вероятно не е наблюдаван по технически причини.* Вторичните минимума са почти точно между главните. Отбелязани са с оранжев цвят. Това, че са по средата, между главните минимума, показва, че апсидната линия е ориентирана по направление към наблюдателя.

Има три двойки пасажи отбелязани със зелен и червен цвят. Червените изглеждат като точки върху кривата на блясъка поради малката си амплитуда. Търсете червените стрелки по абсисата, които ги посочват. *Виждаме, че се наблюдава известна симетрия в разпределението на пасажите спрямо минимумите на двойната звезда. Първата двойка пасажи е преди вторичния минимум, втората – след, третата отново е преди вторичния минимум. Това вероятно се дължи на резонанси в периодите на телата от звездната система.* Зелените имат амплитуда приблизително равна на амплитудата на вторичните минимума. Въпреки, че планетата е по-малка, тя не дава принос към блясъка на системата, за разлика от червеното джудже.

Забелязва се и нещо много интересно. Общата крива на блясъка е вълнообразна. Това се дължи на наличието на големи петна и групи от петна по главната звезда на системата. Вижда се, че някои от минимумите са повдигнати или спуснати в зависимост от това в каква част от вълните са се случили. *Както видяхме преди, наличието на петна*

оказва влияние и върху формата на кривите на пасажите на планетата по главната звезда.

Отчитаме моментите на минимумите по абцисата за по-голям интервал от време и за периода на двойната звезда получаваме – 41.1 денонощия. За периода на пасажите – 226.5 денонощия.

И двете стойности са много близки до получените от професионалните астрономи, изследващи звездата.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За правилни разсъждения по въпроса каква е втората звезда – 3 т.

За правилно заключение за вида на тази звезда – 1 т.

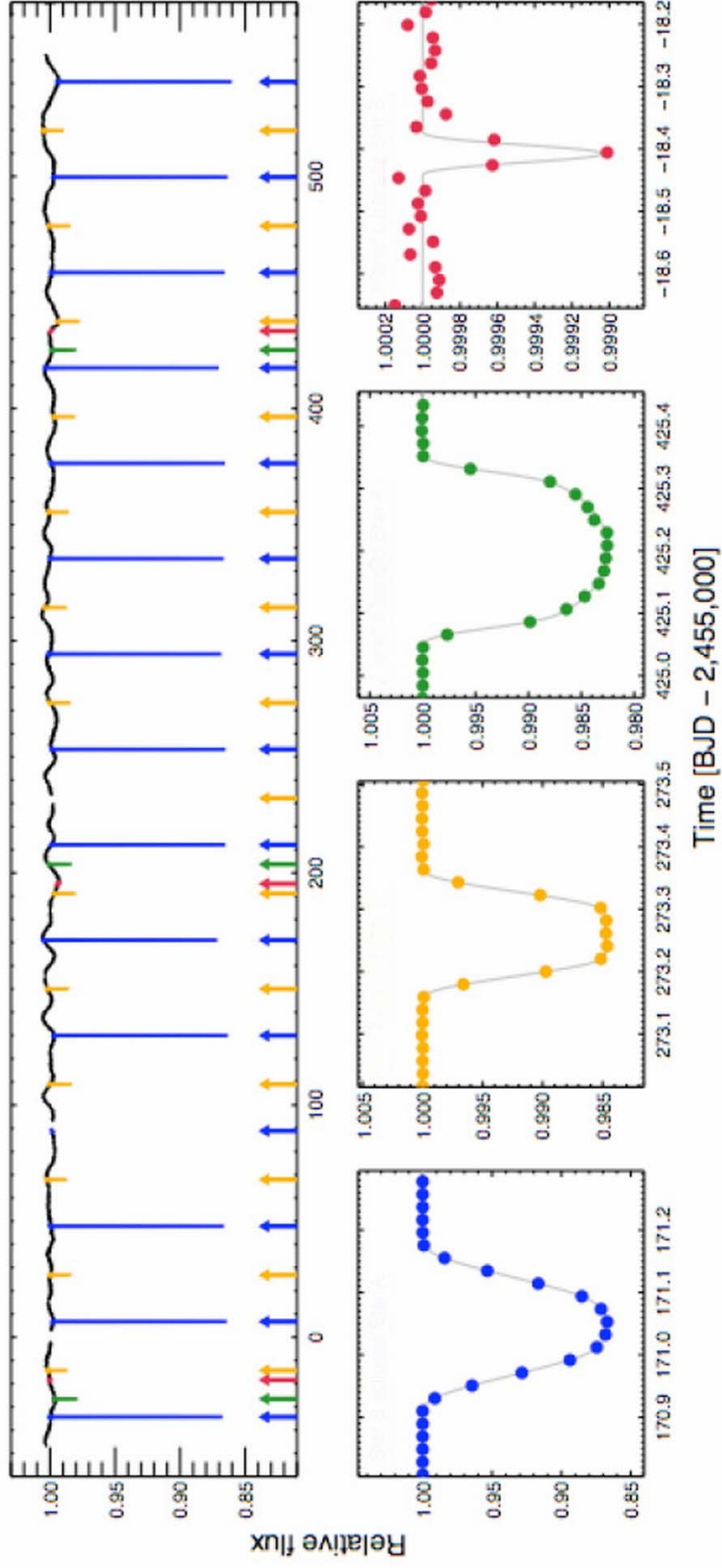
За правилни разсъждения върху формата, амплитудата и продължителността на графично представените минимума 4 т.

За правилни заключения по отъждествяване на графиките със съответните минимума – 2 т.

За правилно скициране на взаимните положения на компонентите – 4 т.

За отъждествяване на вида на затъмненията по горната графика – 4 т.

За определяне на периодите – 2 т.



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНА КОМИСИЯ ЗА ОРГАНИЗИРАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XV НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

III кръг, 29 април 2012 г., Ямбол

Ученици от 11-12 клас

Практическа задача. Юпитер и спътникът Йо.

Дадени са ви две снимки, направени на 28 септември 2011. Фотографирани са два последователни момента от преминаването на сянката на спътника Йо по видимия диск на планетата Юпитер. На първата снимка самият спътник Йо се вижда вляво от Юпитер. На втората снимка спътникът се проектира върху Юпитер и е посочен със стрелка.

На 29 октомври 2011 г. Юпитер е бил в противостоене.

- Като използвате снимките, направете необходимите измервания и построения и пресметнете приблизително масата на Юпитер. Опишете вашия метод на работа.

Справочни данни:

Радиус на Юпитер 71 500 км,

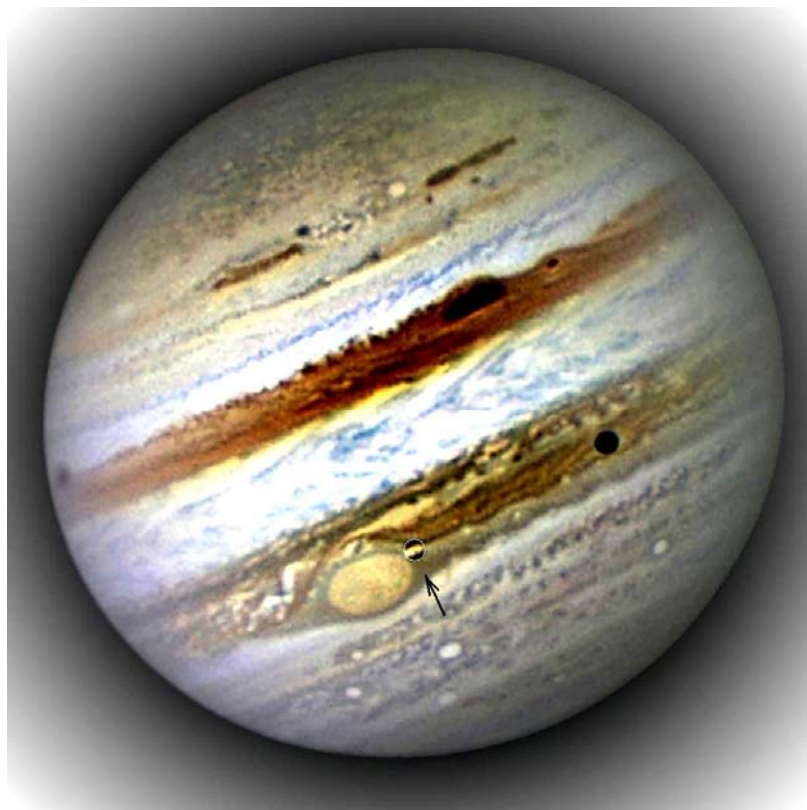
Гравитационна константа $6.67 \times 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг} \cdot \text{с}^2$

Радиус на орбитата на Юпитер 5.2 AU

Орбитален период на Юпитер 11.862 год.

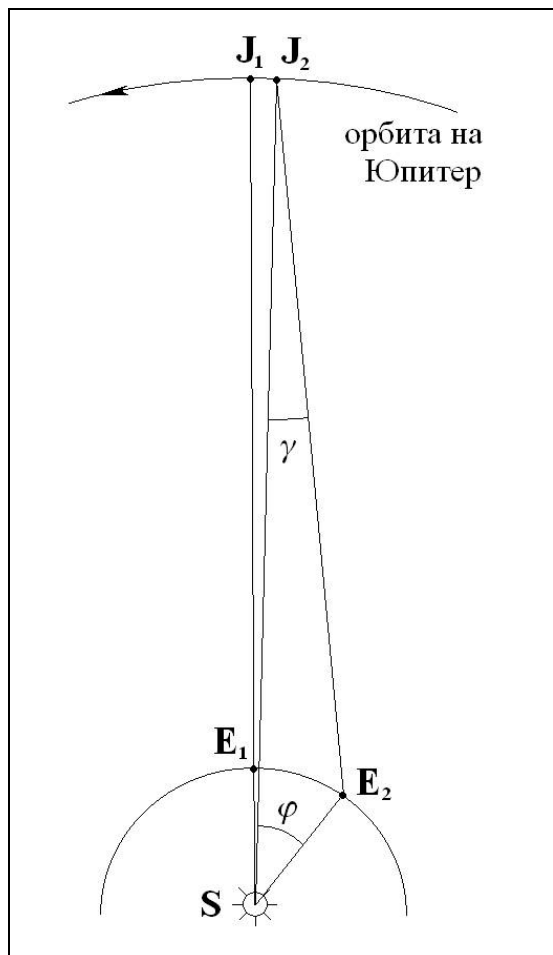


1:23 h UT



2:53:58 h UT

Решение: За да получим под какъв ъгъл Слънцето осветява Юпитер и спътниците му на 28 септември 2011г. относно линията Земя – Юпитер, използваме информацията за момента на опозиция. Ще фиксираме направлението Слънце – Юпитер в момента на противостояне, ще се върнем 31 дни назад и ще пресметнем ъгъла между направлението Слънце – Юпитер и Земя – Юпитер.



Нека в момента на опозиция, на 29 октомври 2011г., Юпитер се намира в точка J_1 , а Земята е в точка E_1 . На 28 септември, 31 дни по-рано, Юпитер и Земята ще са съответно в точки J_2 и E_2 . За да решим задачата, трябва да намерим ъгъл γ , който е фазовият ъгъл на Юпитер в момента на наблюденията. За целта първо намираме ъгъл ϕ . Определяме на какъв ъгъл се е завъртяла Земята по орбитата си от E_1 до E_2 и от този ъгъл изваждаме ъгъла, на който се е завъртял Юпитер за същото време. Ъглите на завъртане намираме като разделим 360° на броя на дните в годината за съответната планета, след което умножаваме по 31 дни. Получаваме ъгъла на завъртане на всяка една от планетите. За Земята получаваме, че ъгълът на завъртане е $29^\circ.54$, а за Юпитер - $2^\circ.50$. Търсеният ъгъл ϕ се получава като извадим втория ъгъл от първия. Получаваме:

$$\phi = 27^\circ.04$$

$$\phi \approx 27^\circ$$

Прилагаме косинусовата теорема за триъгълник J_2SE_2 и намираме разстоянието J_2E_2 . След това за същия триъгълник прилагаме синусовата теорема и намираме ъгъл $\gamma \approx 6^\circ$. Това е ъгълът под който Слънцето осветява спътниците на Юпитер спрямо линията Земя – Юпитер.

За реперни точки използваме сенките на спътника Йо върху повърхността на Юпитер. Ще прекараме линиите Слънце – Йо – сянка на Йо, като използваме определения по-горе ъгъл γ . След това ще ги пресечем с линии успоредни на линията Земя – Юпитер. Пресечните точки ще ни дадат две положения на спътника по неговата орбита. Провеждаме измервания върху снимките. Измерваме екваториалния диаметър на Юпитер. Пресмятаме радиуса на изображенията на планетата. Измерваме отстоянието на изображението на спътника и на сенките на спътника от линията, свързваща двата полюса на планетата и перпендикулярна на неговия екватор. Намираме отношенията на отстоянията на сенките към радиуса на изображението на Юпитер. Построяваме в подходящ мащаб полукръг върху лист милиметрова хартия. Това е обърнатата към наблюдателя половина от екватора на планетата. Върху този полукръг нанасяме точки, съответстващи на положенията на сенките на Йо върху повърхността на Юпитер. (На дадените снимки сенките не са на екватора, но това се дължи на наклона на оста на планетата и на орбитите на спътниците към плоскостта на орбитата на Юпитер. Този наклон, щом виждаме сенките далеч от екватора, е преимуществено в направление към

наблюдателя. Тогава положението на сенките се премества в посока перпендикулярна на екватора, без да се измества съществено встрани.) Приемаме, че направлението към наблюдателя е успоредно на линиите на милиметровата хартия. Тогава от сенките прекарваме прави линии под ъгъл γ . Проектираме положенията на изображенията на спътника върху линията на среза на екватора на Юпитер, използвайки подобни отношения от предоставените снимки. От тези проекции на спътника прекарваме прави линии, успоредни на направлението към наблюдателя, до пресичането им с наклонените линии от сенките на спътника. Пресечните точки са две положения на спътника върху неговата орбита. Намираме средното разстояние до центъра на планетата. Сравняваме с радиуса на построения полукватор на планетата и преминаваме към реални единици, използвайки дадения ни в условието радиус на планетата. Получаваме, че радиусът на орбитата е:

$$R = 451\,000 \text{ km}$$

Измерваме ъгъла с връх в центъра на Юпитер и лъчи към двете положения на Йо. Знаем какво време е изминало между двете положения на спътника. Оттук намираме периода на орбитално движение на Йо. Получаваме:

$$T = 168000\text{s} = 1^{\text{d}}22^{\text{h}}40^{\text{m}}$$

Прилагаме пълната форма на третия закон на Кеплер за Юпитер и параметрите на орбитата на Йо:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M_J}{4\pi^2}$$

и получаваме за масата на Юпитер:

$$M_J = \frac{4\pi^2}{\gamma} \frac{a^3}{T^2} = 1.924 \cdot 10^{27} \text{ kg}$$

Стойностите за радиуса на орбитата и за периода не са много точни, но неточностите се компенсират във формулата за масата и стойността, която получихме за нея се отличава от истинската изключително малко.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За математическа обосновка на метода за определяне на ъгъла, под който Слънцето осветява Юпитер спрямо линията Земя-Юпитер – 4 т.

За правилно определяне на този ъгъл – 2 т.

За обяснение на метод, по който да се построят точки от орбитата на Йо чрез измервания на положенията на спътника и неговата сянка на снимките – 5 т.

За прецизно приложение на метода и определяне на радиуса на орбитата на спътника около Юпитер – 3 т.

За построения и измервания с цел да се определи орбиталния период на Йо и за получаване на този период – 4 т.

За определяне на масата на Юпитер – 2 т.