Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 8-9 април 2012 г.
Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt{x-a}+\sqrt{x+a}=x$$

има целочислено решение.

Решение. Ако допуснем, че x е целочислено решение на уравнението, то $x \geqq |a|$ и след повдигане на квадрат достигаме до еквивалентното уравнение

$$2\sqrt{x^2-a^2}=x^2-2x.$$

Следователно $x \in [2,\infty)\cup\{0\}$ и след повторно повдигане на квадрат достигаме до

$$4x^3-x^4=4a^2.$$

Но $4a^2 \geqq 0$, т.е $x \in [2,4]\cup\{0\}$ и понеже x е цяло число, то $x=0,2,3$ или 4. Така окончателно получаваме $a=0,\pm 2$ или $\pm\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$.

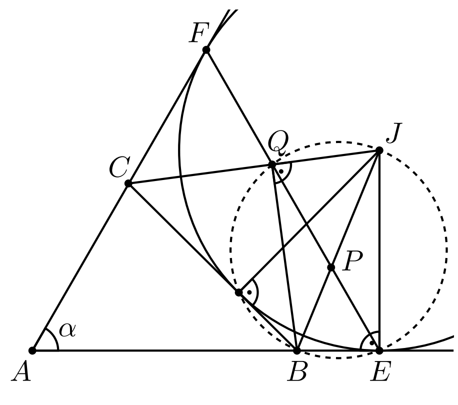
Оценяване. 1 т. за $x \geqq |a|$ и достигане до уравнението $2\sqrt{x^2-a^2}=x^2-2x$; 2 т. за $x \in [2,\infty)\cup\{0\}$ и достигане до уравнението $4x^3-x^4=4a^2$; 2 т. за $x \in [2,4]\cup\{0\}$; 2 т. за намиране на стойностите на параметъра a.

Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$. Външновписаната окръжност към страната BC има център J и се допира до правите AB и AC съответно в точки E и F. Ако BJ и CJ пресичат EF съответно в точки P и Q, и $BC=2PQ$, да се намери $\angle BAC$.

Решение. Нека $\angle BAC=\alpha$. Тогава

$$\angle BJC = 90^\circ - \frac{\alpha}{2} = \angle BEF$$

и следователно четириъгълникът $BEJQ$ е вписан в окръжност. Тъй като $\angle BEJ = 90^\circ$, то тази окръжност е с диаметър BJ. В същото време $\angle JQP = \angle EBP = \angle CBP$ и следователно четириъгълникът $CBPQ$ е вписан в окръжност (с диаметър BC). Тогава



$$\triangle JQP \sim \triangle JBC \Rightarrow \frac{JQ}{JB}=\frac{PQ}{BC}=\frac{1}{2},$$

т.е. $\angle JBQ = 30^\circ$, но $\angle JQB = 90^\circ$ и следователно

$$\angle BAC = \alpha = 180^\circ - 2\angle BJC = 2\angle JBQ = 60^\circ.$$

Оценяване. 2 т. за доказване, че $BEJQ$ е вписан четириъгълник; 2 т. за доказване, че $CBPQ$ е вписан четириъгълник; 1 т. за доказване, че $\triangle JQP \sim \triangle JBC$; 2 т. за намиране на $\angle BAC = 60^\circ$.

Задача 9.3. Нека a е естествено число, а p е просто число. Да се докаже, че съществуват безбройно много естествени числа n, за които числото $a^{p^n} + p^n$ има поне два различни прости делителя.

Решение. Ако $p|a$, имаме $a^{p^n} + p^n = p^n(pA + 1)$ и твърдението е очевидно. Оттук нататък ще считаме, че $(a, p) = 1$.

Нека p е нечетно, $n = pk$ и $a^{p^{n-1}} = x$, $p^k = y$ за краткост. Тогава

$$a^{p^n} + p^n = x^p + y^p = (x + y)(x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots - xy^{p-2} + y^{p-1})$$

и да допуснем, че това число има не повече от един прост делител, т.е. е равно на q^t за някое просто q и някое естествено t. Очевидно $q \neq p$. От $q|x + y$ следва, че $x \equiv -y \pmod q$ и тогава

$$x^{p-1} - x^{p-2}y + \cdots - xy^{p-2} + y^{p-1} \equiv py^{p-1} \pmod q$$

не се дели на q, противоречие.

Нека $p = 2$ и $n = 4k + 2$, $k \in \mathbb{N}$, $a^{2^{n-2}} = u$, $2^k = v$ за краткост. Тогава

$$a^{2^n} + 2^n = u^4 + 4v^4 = (u^2 + 2uv + 2v^2)(u^2 - 2uv + 2v^2),$$

като лесно се доказва, че двата множителя отдясно са взаимно прости и по-големи от 1 и значи имат различни прости делители.

Оценяване. 1 т. за отбелязване, че при $p|a$ работа върши всяко n, по 3 т. за всеки от случаите $p = 2$ и p нечетно.

Задача 9.4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Решение. Тъй като $g(1) = 1 + a^2 + b^2 > 0$, общият корен не може да бъде 1. Да допуснем, че -2 е общ корен на $f(x)$ и $g(x)$. Тогава $f(-2) = -8 - 2a + b = 0$ и $g(-2) = -8 + 4a^2 + b^2 = 0$, откъдето последовотелно получаваме $b = 2(a+4)$, $4a^2+4(a+4)^2 = 8 \iff a^2+4a+7 = 0$. Тъй като последното уравнение няма реални решения, и -2 не може да бъде общ корен на $f(x)$ и $g(x)$.

Ако -1 е общият корен, имаме $f(-1) = -1 - a + b = 0$ и $g(-1) = -1 + a^2 + b^2 = 0$, откъдето $b = a + 1$, $a^2 + (a + 1)^2 = 1 \iff 2a^2 + 2a = 0$, т.е. $a = 0$ или $a = -1$, като съответно $b = 1$ или $b = 0$.

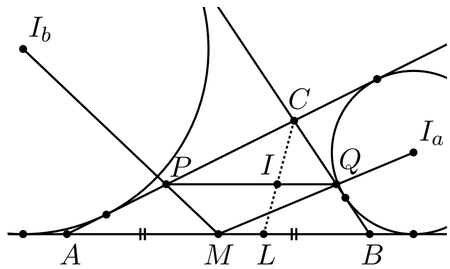
Оценяване. 1 т. за отхвърляне на 1; по 3 т. за останалите два случая.

Задача 9.5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Ако използваме стандартните означения за $\triangle ABC$, то

$$\frac{CP}{PA} = \frac{S_{CMI_b}}{S_{AMI_b}} = \frac{\frac{1}{2}S_{CBI_b} + \frac{1}{2}S_{CAI_b}}{\frac{1}{2}S_{ABI_b}} = \frac{r_b a + r_b b}{r_b c} = \frac{a+b}{c}.$$

Аналогично $\dfrac{CQ}{QB} = \dfrac{a+b}{c}$, т.е. $\dfrac{CP}{PA} = \dfrac{CQ}{QB}$ и следователно $PQ \parallel AB$. От друга страна, ако $CI^{\rightarrow}$ пресича страната AB в точка L, то



$$\frac{CI}{IL} = \frac{CB}{BL} = \frac{a}{\dfrac{ac}{a+b}} = \frac{a+b}{c}$$

и следователно $I \in PQ$.

Забележка. От теоремата на Пап, приложена за тройките точки A, M, B и I_b, C, I_a, лесно следва, че $I \in PQ$ независимо от избора на точката M върху страната AB. Да отбележим, че само когато M е среда на AB имаме, че $PQ \parallel AB$.

Оценяване. 4 т. за доказване, че $PQ \parallel AB$; 3 т. за доказване, че $I \in PQ$. (В случай, че се използва теоремата на Пап, да не се изисква доказателство.)

Задача 9.6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Решение. На езика на графите тази задача се формулира така: Даден е регулярен непълен граф G с n върха и степен d, където n е нечетно число. Каква е максималната мощност на клика в G?

Да допуснем, че в G съществува клика C с мощност $(n+1)/2$. Допълнителният граф $\overline{G}$ е също регулярен, като C е антиклика. Ако от всеки връх на $\overline{G}$ излизат $\overline{d} = n-1-d$ ребра, то общият брой на ребрата, излизащи от C е $(n+1)\overline{d}/2$. Този брой трябва да е равен на броя на ребрата, влизащи във $G - C$. Това е невъзможно, тъй като сумата от степените на върховете в $G - C$ е $\overline{d}(n-1)/2$. Следователно мощността на максимална клика не надхвърля $(n-1)/2$.

Да конструираме пример на регулярен граф с клика с мощност $(n-1)/2$. Нека $n = 4k+1$. Да означим върховете с $\{x_1, \ldots, x_{2k}, y_1, \ldots, y_{2k}, z\}$. Върху върховете $x_1, \ldots, x_{2k}$ от една страна и върху $y_1, \ldots, y_{2k}$ от друга, са построени $2k$-клики. Добавени са и ребрата $zy_1, \ldots, zy_k, zx_1, \ldots, zx_k$, както и $x_{k+1}y_{k+1}, \ldots, x_{2k}y_{2k}$.

Нека $n = 4k+3$. G се получава като обединение на $2k+1$-клика и $2k+2$-клика, от която е изтрит 1-фактор (множество от ребра, съдържащо всеки връх точно веднъж).

Оценяване. 1 т. за намиране на отговора; 3 т. за доказване на горната граница; 3 т. за намиране на конструкции.

Задача 10.1 Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\sqrt[3]{1+3^x} + \sqrt[3]{1-3^x} = a$$

има решение.

Решение. Даденото уравнение има смисъл за всяко x. Да положим $u = \sqrt[3]{1+3^x}$ и $v = \sqrt[3]{1-3^x}$, като u и v са реални числа и $u > 1 > v$. Имаме $u + v = a$ и

$$2 = u^3 + v^3 = (u+v)((u+v)^2 - 3uv) = a(a^2 - 3uv),$$

откъдето $a \neq 0$ и тогава $uv = \dfrac{a^3-2}{3a}$. Следователно u и v са корените на уравнението $f(t) = t^2 - at + \dfrac{a^3-2}{3a} = 0$. Необходимо и достатъчно условие u и v да са реални числа и $u > 1 > v$ е $f(1) < 0$, т.е.

$$1 - a + \frac{a^3-2}{3a} < 0 \Leftrightarrow a(a-2)(a^2-a+1) < 0.$$

Следователно търсените стойности на параметъра са $a \in (0,2)$. (Друго възможно решение е да не се отбележи, че $u > 1 > v$, а само $u > v$, $D > 0$, откъдето отново достигаме до $a \in (0,2)$.)

Оценяване. 1 т. за полагането $u = \sqrt[3]{1+3^x}$, $v = \sqrt[3]{1-3^x}$ и отбелязване, че $u > 1 > v$; 3 т. за получаване на квадратно уравнение с корени u и v (или съответни изрази на x), 3 т. за обосновано намиране на стойностите на параметъра a.

Задача 10.2. Виж Задача 9.2.

Задача 10.3. Виж задача 9.3.

Задача 10.4. Виж задача 9.4.

Задача 10.5. Виж задача 9.5.

Задача 10.6. Виж задача 9.6.

Задача 11.1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които уравнението

$$\sin x + a \sin 2x + \sin 5x = 2a$$

има решение.

Решение. Имаме

$$(1)\qquad 2|a| = |\sin x + a\sin 2x + \sin 5x| \le |\sin x| + |a||\sin 2x| + |\sin 5x| \le 2 + |a|,$$

откъдето $|a| \le 2$.

Директно проверяваме, че $x = 0$ е решение при $a = 0$ и $x = \pm 90^\circ$ е решение при $a = \pm 1$.

При $a = 2$ уравнението става $\sin x + 2\sin 2x + \sin 5x = 4$ и (1) показва, че $\sin x = \sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = 1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$.

При $a = -2$ уравнението става $\sin x - 2\sin 2x + \sin 5x = -4$ и (1) показва, че $\sin x = -1$, $\sin 2x = 1$. Това е невъзможно, защото при $\sin x = -1$ имаме $\cos x = 0$ и $\sin 2x = 2\sin x\cos x = 0$.

Оценяване. 2 т. за намиране на решение при $a = 0$ и $a = \pm 1$; 2 т. за отхвърляне на случая $|a| > 2$; 3 т. за случая $a = \pm 2$.

Задача 11.2. В остроъгълен $\triangle ABC$ с ортоцентър H и среда M на страната AB, ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$ пресича HM в точка T. Да се докаже, че:

а) $\dfrac{HT}{TM} = \dfrac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}$, където $\gamma = \sphericalangle ACB$.

б) H лежи на отсечката с краища петите на перпендикулярите от T към AC и BC.

Решение. а) Нека точка K е средата на дъгата AB, не съдържаща точка C. Тогава $KM \perp AB$ и $\triangle CHT \sim \triangle KMT$. Следователно

$$\frac{HT}{TM} = \frac{CH}{KM} = \frac{2R\cos\gamma}{R - R\cos\gamma} = \frac{2\cos\gamma}{1-\cos\gamma}.$$

б) Нека A_1, P и Q са петите на перпендикулярите съответно от A, T и M към BC. Тогава $\dfrac{PQ}{PA_1} = \dfrac{TM}{TH}$. Понеже Q е среда на BA_1, от а) следва, че $PA_1 = \dfrac{BA_1\cos\gamma}{1+\cos\gamma}$. Тъй като $HA_1 = BA_1 \mathrm{cotg}\gamma$, от $\triangle PHA_1$ намираме $\mathrm{cotg} \sphericalangle HPA_1 = \mathrm{tg}\dfrac{\gamma}{2}$ и следователно $\sphericalangle HPC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$.

Аналогично, ако R е петата на перпендикуляра от T към AC, то $\sphericalangle HRC = 90^\circ - \dfrac{\gamma}{2}$. Тогава от четириъгълника $RHPC$ получаваме $\sphericalangle PHR = 180^\circ$.

Оценяване. 2 т. за а); 5 т. за б).

Задача 11.3. Разглеждаме ъгли, съставени от едно ъглово квадратче, 2012 хоризонтални съседни и 2012 вертикални съседни квадратчета.

Колко най-много ъгли могат да се разположат върху безкрайна клетъчна дъска така, че всеки два ъгъла да имат поне едно общо квадратче?

Решение. Търсеният максимум е 16092. Да разгледаме ъглите, сочещи нагоре и надясно. Ще докажем, че има най-много 4023 такива ъгъла, всеки два от които имат поне едно общо квадратче. Да въведем стандартни координати на единичните квадратчета в равнината и да разгледаме върховете на всички ъгли. Ако за координатите (a, b) и (c, d) на върховете на два ъгъла е изпълнено $a < c$ и $b < d$ (или съответно $a > c$ и $b > d$), то двата ъгъла не се пресичат.

Нека най-горният и най-ляв връх е с координати (i, j) и съответно най-долният и най-десен връх е (p, q). За да се пресичат съответните ъгли е необходимо $p - i \leq 2011$ и $j - q \leq 2011$.

Да забележим, че всеки друг връх е с координати (a, b), където $i \leq a \leq p$ и $j \leq b \leq q$. От всички такива върхове да изберем връх с най-голяма втора координата. Да забележим, че ако преместим този връх едно квадратче наляво, условието за пресичане на ъглите е изпълнено. Това означава, че можем да приемем, че всички върхове с най-голяма втора координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето (i, b). Аналогично, можем да считаме, че всички върхове с най-голяма първа координата са разположени един до друг, започвайки от квадратчето с координати (c, q).

Сега разглеждаме върховете, ограничени от квадратчетата с координати (i, b) за най-голямото b и (c, q) за най-голямото c. Повтаряме горната процедура и т.н. Ще получим, че всички върхове се съдържат в начупена линия, започваща от квадратчето (i, j) и завършваща в квадратчето (p, q), която се движи само надясно и надолу. Понеже такава начупена линия съдържа 4021 върха, получаваме, че можем да разположим най-много 4023 ъгли.

Аналогично за всяко от другите три разположения на ъглите имаме най-много 4023 ъгли, изпълняващи условието на задачата.

Следователно има най-много $4.4023 = 16092$ ъгли. Ако изберем едно квадратче и разгледаме всички ъгли, които го съдържат, ще получим точно 16092 ъгли с исканото свойство.

Оценяване. 1 т. за верен отговор; 1 т. за разглеждане на ъгли от определен вид; 5 т. за доказване, че има най-много 4023 ъгъла от определен вид.

Задача 11.4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$

има точно едно решение.

Решение. Уравнението е еквивалентно на

$$x^3 + ax + 1 = 2x^3 + a > 1.$$

Тогава

$$0 = x^3 - ax + a - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1 - a).$$

Значи $x = 1$ е решение на даденото уравнение, когато $2 + a > 1$, т.е. $a > -1$.

Уравнението $x^2 + x + 1 - a = 0$ има реални корени при $1 - 4(1 - a) \geq 0$, т.е. $a \geq 3/4$.

Ако някой от тези корени е 1, то $a = 3$. Тогава другият корен е -2 и той не е решение на началното уравнение, защото $2(-2)^3 + 3 \leq 1$.

Ако и двата корена са различни от 1, за тях трябва

$$2x^3 \leq 1 - a = -x^2 - x, \quad \text{т.е.} \quad x(2x^2 + x + 1) \leq 0.$$

Понеже $2x^2 + x + 1 > 0$, тези корени трябва да неположителни. Тъй като тяхата сума е -1, а произведението им е $1 - a$, това означава, че $a \leq 1$.

И така, $a \in (-1, 1] \cup \{3\}$.

Оценяване. 1 т. за получаване на $0 = (x-1)(x^2 + x + 1 - a)$; 1 т. за намиране на $x = 1$ при $a > -1$; 1 т. за това, че $a = 3$ е измежду търсените стойности; 4 т. за довършване на решението (от които 2 т. за неположителността на съответните корени).

Задача 11.5. Да се намерят всички прости числа p и q, за които pq дели $12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Решение. От малката теорема на Ферма получаваме, че $p | 12^{q+1} - 1$ и $q | 12^{p+1} - 1$.

От $q | 12^{p+1} - 1$ следва, че показателят k на 12 по модул q дели $p+1$ и тъй като k дели и $q-1 = p-3$, то k е делител на 4. Следователно $k = 1, 2, 4$.

При $k = 1$ намираме $q = 11$ и $p = 13$.

При $k = 2$ намираме $q = 13$, което не дава решение, понеже 15 не е просто число.

При $k = 4$ намираме $q = 5$ и $p = 7$, $q = 29$ и $p = 31$.

Оценяване. 1 т. за използване на малката теорема на Ферма; 2 т. за разглеждане на показателя k на 12 по модул q; 2 т. за намиране $k = 1, 2, 4$; 2 т. за намиране на решенията.

Задача 11.6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

Решение. (*Н. Николов и Ал. Иванов*) От $P^2(x) = P^2(-x)$ следва, че P е или четна, или нечетна функция.

Ако P е четна функция, то $P(x) = Q(x^2)$. Тогава $Q((x^2 + a)^2) = Q^2(x^2)$ и следователно $Q((x + a)^2) = Q^2(x)$ за всяко x. Оттук $Q(x^2) = Q^2(x - a)$, т.е. полиномът $Q(x - a)$ също изпълнява даденото условие, като deg $P =$ 2deg Q.

Продължавайки по същия начин, ще стигнем до полином от нечетна степен, изпълняващ даденото условие. Той не може да е четна функция.

И така, остана да разгледаме случая, когато P е нечетна функция. Тогава $P(x) = xR(x^2)$ и следователно $(x^2 + a)R((x^2 + a)^2) = x^2R^2(x^2)$. Оттук $(x + a)R((x + a)^2) = xR^2(x)$, т.е. $P(x) = (x - a)R^2(x - a)$ за всяко x. Нека $R(x - a) = x^k S(x)$, където $S(0) \neq 0$. Лесно се вижда, че $(x - a)R^2(x - a) = x^{2k+1}T(x) - aS^2(0)x^{2k}$. Понеже P е нечетна функция, следва, че $a = 0$.

Забележки. а) Лесно се доказва, че ако $P(x^2) = P^2(x) \neq \text{const}$ за всяко x, то $P(x) = x^n$.

б) Задачата е много частен случай на теорема на Дж. Ф. Рит, която описва комутиращите (относно композиция) полиноми.

Оценяване. 1 т. за това, че P е или четна, или нечетна функция; 3 т. за свеждане до нечетна фукция; 3 т. за случая на нечетна функция.

Задача 12.1. Вж. задача 11.1.

Задача 12.2. Вж. задача 11.2.

Задача 12.3. Естествените числа са оцветени в два цвята.

а) Да се докаже, че съществуват безбройно много двойки от различни едноцветни числа x и y, за които $x+y$ е точен квадрат.

б) Вярно ли е, че винаги съществуват две различни едноцветни числа x и y, чиито сбор е степен на двойката?

Решение. а) За всяко естествено число $x>1$ е изпълнено равенството $(2x+1)^2-(2x^2-2)+(2x+2)^2-(2x^2-2)=(2x+3)^2$. Ако $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ или $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ е в цвета на $2x^2-2$, то имаме необходимото представяне. В противен случай $(2x+1)^2-(2x^2-2)$ и $(2x+2)^2-(2x^2-2)$ са в един и същи цвят и отново имаме нужното представяне.

б) Не! Да оцветим всички числа от вида $2^m(4t+3)$ в цвят A, а всички числа от вида $2^n(4k+1)$ в цвят B. Да допуснем, че сборът на две различни числа с цвят B е степен на двойката. Тогава $2^{n_1}(4k_1+3)+2^{n_2}(4k_2+3)=2^l$. Ако $n_1\neq n_2$, получаваме противоречие по модул 2, а ако $n_1=n_2$, имаме, че $4(k_1+k_2+1)+2$ е степен на двойката, което е невъзможно. Случаят, когато сборът на две различни числа с цвят A е степен на двойката, се разглежда аналогично.

Оценяване. 3 т. за а) (най-много 1 т. за частни случаи); 4 т. за б) (1 т. за верен отговор).

Задача 12.4. Вж. задача 11.4.

Задача 12.5. а) Да се намери броят на реалните корени на уравнението $x=\cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, \dots$ е редица от реални числа, за които $a_{n+1}=\cos a_n$ при $n\geq 1$. Да се докаже, че редицата е сходяща.

Решение. а) За $f(x)=x-\cos x$ имаме, че $f'(x)=1+\sin x>0$ при $x\neq -\pi/2+2k\pi$ ($k\in\mathbb{Z}$) и значи f е строго растяща функция. Понеже $f(0)<0<f(1)$, следва, че f има точно една нула.

б) Нека x_0 е нулата на f. Тъй като $x_0\in(0,1)$ и $a_n\in[-1;1]$ при $n\geq 2$, то

$$|a_{n+1}-x_0|=|\cos a_n-\cos x_0|=2|\sin\frac{x_0+a_n}{2}\sin\frac{x_0-a_n}{2}|\leq k|a_n-x_0|,$$

където $k=\sin 1\in(0,1)$. Следователно $|a_n-x_0|\leq k^{n-2}|a_2-x_0|$ при $n\geq 2$ и значи $a_n\to x_0$.

Оценяване. 1 т. за а); 6 т. за б), от които 2 т. за представяне на $a_{n+1}-x_0$ като удвоено произведение на синуси.

Задача 12.6. Вж. задача 11.6.

Задачите са предложени от: Стоян Боев – 9.1, 9.2 (10.2), 9.5 (10.5); Петър Бойваленков – 9.3 (10.3), 9.4 (10.4); Керопе Чакърян – 10.1; Иван Ланджев – 9.6 (10.6); Александър Иванов и Емил Колев – 11.1 (12.1), 11.2 (12.2), 11.3, 11.5, 12.3; Николай Николов – 11.4 (12.4), 11.6 (12.6), 12.5.