Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 9. клас

Задача 4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 10. клас

Задача 4. Дадени са полиномите $f(x) = x^3 + ax + b$ и $g(x) = x^3 + a^2x^2 + b^2$, където a и b са реални параметри. Да се намерят всички стойности на a и b, за които точно едно от числата -2, -1 и 1 е общ корен за $f(x)$ и $g(x)$.

Задача 5. Даден е $\triangle ABC$ с центрове I_a и I_b на външновписаните окръжности към страните BC и AC съответно. Ако M е среда на страната AB и правите MI_a и MI_b пресичат страните BC и AC съответно в точки Q и P, да се докаже, че правата PQ е успоредна на AB и минава през центъра I на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 6. Дадена е компания от n души, n нечетно, в която има поне двама, които не се познават, и в която всички имат един и същ брой познати. Колко най-малко хора трябва да си тръгнат, за да остане група, в която всеки двама се познават?

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 11. клас

Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението
$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$
има точно едно решение.

Задача 5. Да се намерят всички прости числа p и q, за които pq дели $12^{p+q} - 1$ и $p = q + 2$.

Задача 6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.

Министерство на образованието, младежта и науката

61. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, втори ден, 9 април 2012 г.

Тема за 12. клас

Задача 4. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\lg(\lg(x^3 + ax + 1)) = \lg(\lg(2x^3 + a))$$

има точно едно решение.

Задача 5. а) Да се намери броят на реалните корени на уравнението $x = \cos x$.

б) Нека $a_1, a_2, \ldots$ е редица от реални числа, за които $a_{n+1} = \cos a_n$ при $n \geq 1$. Да се докаже, че редицата е сходяща.

Задача 6. Нека a е реално число и $P(x)$ е неконстантен полином с реални коефициенти така, че $P(x^2 + a) = (P(x))^2$ за всяко реално число x. Да се докаже, че $a = 0$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути.