

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

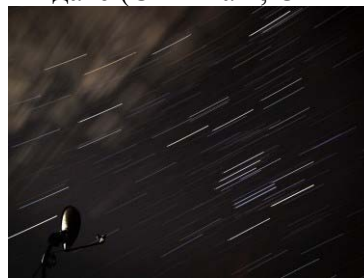
ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – VII-VIII КЛАС

ТЕОРЕТИЧЕН КРЪГ

1 задача. Звездни следи. Астрономите любители често обичат да правят красиви снимки на звездното небе, като тези, които виждате (Снимка 1, Снимка 2).



Снимка 1



Снимка 2

Те се получават, като затворът на фотоапарата се задържа отворен продължително време (време на експонация) и няма включено водещо устройство. Тогава, поради денонощното въртене на небесната сфера, звездите оставят на кадъра следи като дъги. На Фиг. 1 и 2 са ви дадени същите снимки, но в негативно изображение и в по-голям мащаб. Използвайте тези изображения при решаването на задачата.

- Направете необходимите построения и измервания върху Фиг. 1 и определете колко време е продължила експонацията, с която е получена първата снимка.
- Като използвате Фиг. 2 и дадената ви звездна карта на Фиг. 3, определете продължителността на експонацията, с която е направена втората снимка.

2 задача. Уран. Вие изследвате планетата Уран, като пътешествате в горните слоеве на нейната атмосфера с реактивен летателен апарат. За улеснение въвеждате уранографски координати, подобни на географските координати на Земята. Оста на въртене на Уран е много силно наклонена – ъгълът между оста на планетата и нейната орбитална равнина е само около 8° . Както и при другите планети, при движението на Уран около Слънцето, оста му на въртене остава успоредна сама на себе си.

- Каква е максималната височина над хоризонта, на която ще се издига за вас Слънцето, ако сте примерно на северния полюс на Уран? Каква е уранографската ширина на точката, от която в този момент Слънцето ще се вижда в зенита?
- В области с какви уранографски ширини ще можете понякога през уранианската година да виждате Слънцето в зенита?
- При вашите навигационни изследвания сте установили, че като полярна звезда за северния полюс на Уран може да се използва звездата η Змиеносец, а на южния полюс – звездата 15 Орион. На 3 октомври 2014 г. Уран ще бъде в противостояние за земните наблюдатели. Кой от полюсите на Уран ще се вижда от Земята тогава – северният или южният?

Обяснете вашите отговори.

3 задача. Затъмнение. Слънчевото затъмнение е много впечатляващо явление, особено когато е пълно. Пълната фаза на затъмнението може да трае минути, но понякога може да е много по-кратка.

Намираме се на земния екватор и наблюдаваме слънчево затъмнение. Затъмнението се случва в зенита на нас. Продължителността на пълната фаза е само миг. Слънчевата корона се показва за момент и ведната изчезва.

- Начертайте схема на такова затъмнение.
- Сравнете ъгловите размери на Луната и Слънцето.
- Определете разстоянието между центровете на Луната и Земята в момента на пълното затъмнение.

Геостационарните спътници се движат по орбита с радиус 42164 километра в равнината на земния екватор. Тя е избрана така, че периодът на спътниците, при движението им по орбитата, да е равен на периода на завъртане на Земята около нейната ос. Нека един геостационарен спътник преминава централно през сянката на Луната по време на наблюдаваното от нас пълното слънчево затъмнение.

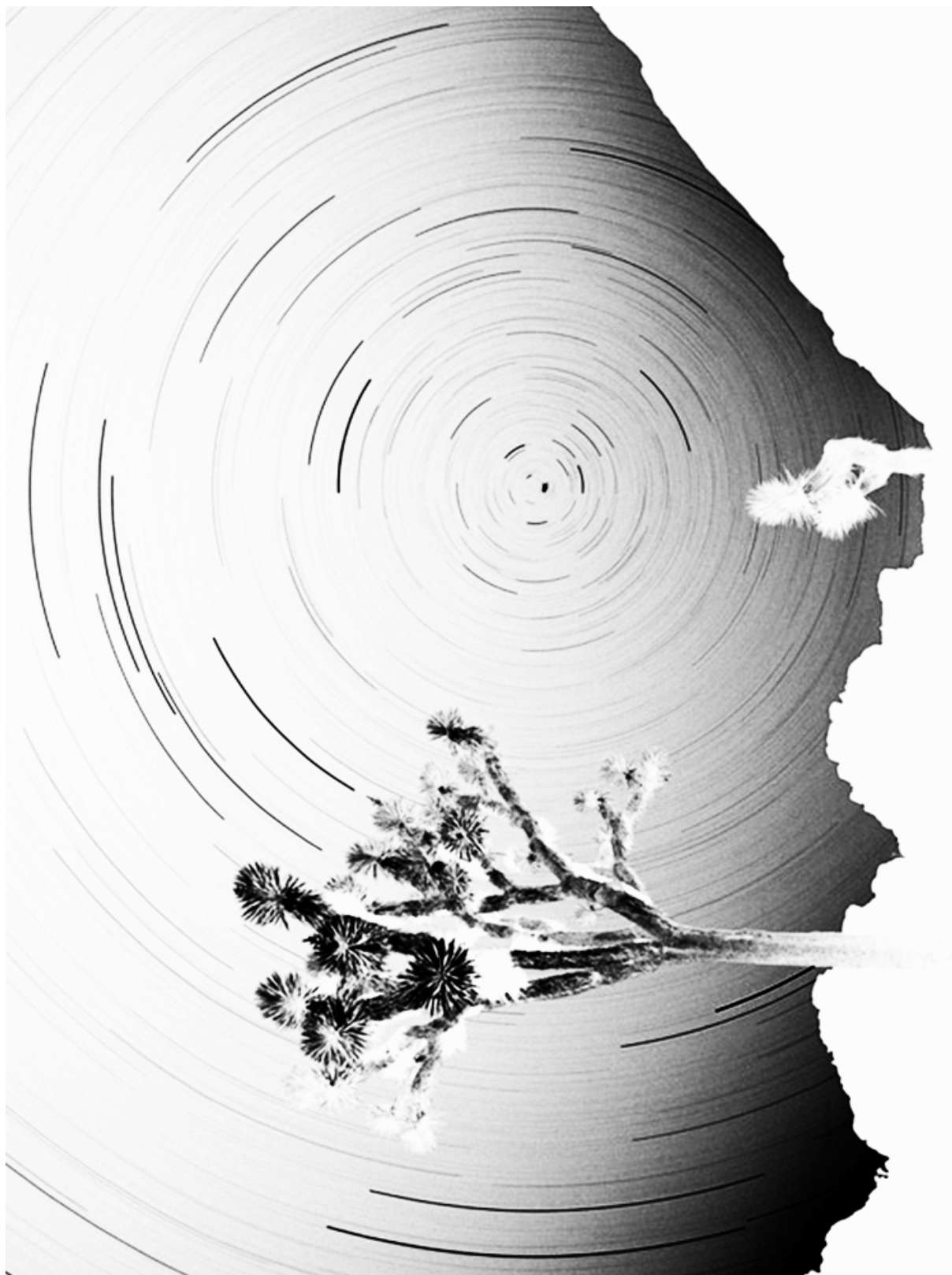
- Определете продължителността на пълното затъмнение за наблюдател на спътника, т.е. за колко време спътникът ще пресече сянката на Луната.

Приемете, че Луната се движи по кръгова екваториална орбита.

Указание: Считайте, че по време на пресичането на сянката, Луната, и спътникът се движат успоредно и праволинейно.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето	– 696000 км
Екваториален радиус на Земята	– 6378 км
Радиус на Луната	– 1738 км
Разстояние Земя – Слънце	– 149 600 000 км
Период на въртене на Земята около оста	– 23 ^h 56 ^m
Период на движение на Луната около Земята	– 27.32 денонощия



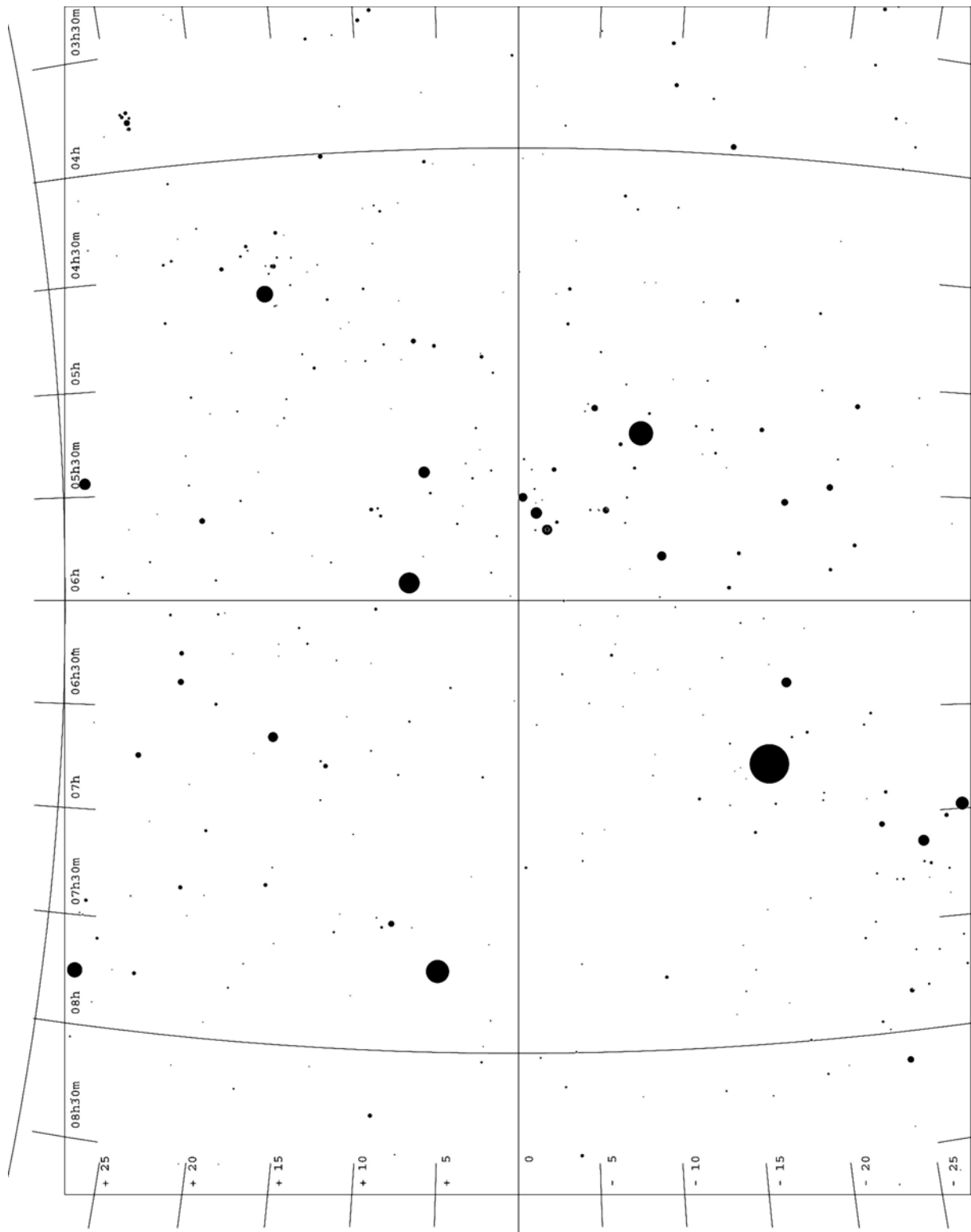
Фиг. 1

Предайте този лист заедно с писмената си работа на квесторите!



Фиг. 2

Предайте този лист заедно с писмената си работа на квесторите!



Фиг. 3

Предайте този лист заедно с писмената си работа на квесторите!

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

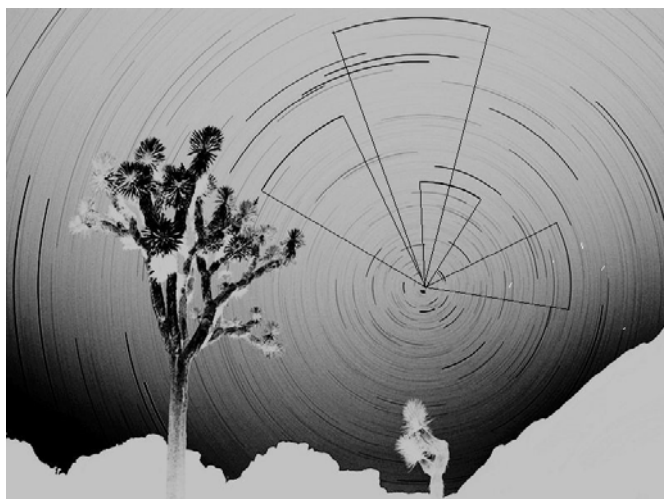
Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

**ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – VII-VIII КЛАС
Решения**

1 задача. Звездни следи.

Решение:

На Фиг. 1 определяме къде е центърът на всички концентрични дъги, описани от звездите. Това трябва да е северният небесен полюс. Начертаваме радиусите, достигащи до крайните точки на няколко от дъгите и с транспортир измерваме ъгъла, на който те съответстват. Чрез усредняване се получава ъгъл $\psi \approx 35^\circ$.



След това намираме за какво време звездите описват такава дъга при денонощното въртене на небесната сфера:

$$\Delta t_1 = (\psi / 360^\circ) \times T_s$$

където $T_s = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ е звездното денонощие. Получаваме:

$$\Delta t_1 \approx 2.33^{\text{h}} \approx 2^{\text{h}}20^{\text{min}}$$

Такава е била продължителността на експонацията при първата снимка.

На втората снимка виждаме област от звездното небе около небесния екватор. Звездните дъги са с незначителна кривина. Разпознаваме съзвездието Орион. Почти същата област от небето е отразена и на картата на Фиг. 3. По скалата на деклинациите измерваме отсечката, която съответства примерно на 20° , дължината се оказва 71 мм и така получаваме мащаба на картата. Измерваме разстоянието между звездите Саиф и Белатрикс на картата (те са достатъчно ярки, но не са изобразени с твърде големи кръгчета и можем да мерим по-точно), което е 53 мм. Това съответства на ъгъл:

$$(53 \text{ мм} / 71 \text{ мм}) \times 20^\circ \approx 14.9^\circ$$

Измерваме разстоянието между звездите Саиф и Белатрикс на снимката на Фиг. 2 – разстоянието между двете десни крайни точки на дъгите (или между двете леви). То е 83 мм. Вече знаем, че на тези 83 мм върху снимката съответства ъглово разстояние 14.9° . Накрая измерваме дължините на няколко дъги, описани от звездите на Фиг. 2. Усредняваме и получаваме 35.5 мм. За ъгъла, на който това съответства, намираме:

$$\xi = (35.5 \text{ мм} / 83 \text{ мм}) \times 14.9^\circ$$

$$\xi \approx 6.4^\circ$$

За времето на експонация на втората снимка чрез пропорция намираме:

$$\Delta t_2 = (\xi / 360^\circ) \times T_s$$

$$\Delta t_2 \approx 0.43^h \approx 25.5^{\text{min}}$$

Критерии за оценяване (общо 14 т.):

За правилна теоретична идея за определяне на времето на експонация на първата снимка – 2 т.

За построения и измервания – 2 т.

За пресмятанията – 2 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За правилна идея за определяне на времето на експонация на Снимка 2 – 2 т.

За измервания и определяне на мащаби – 2 т.

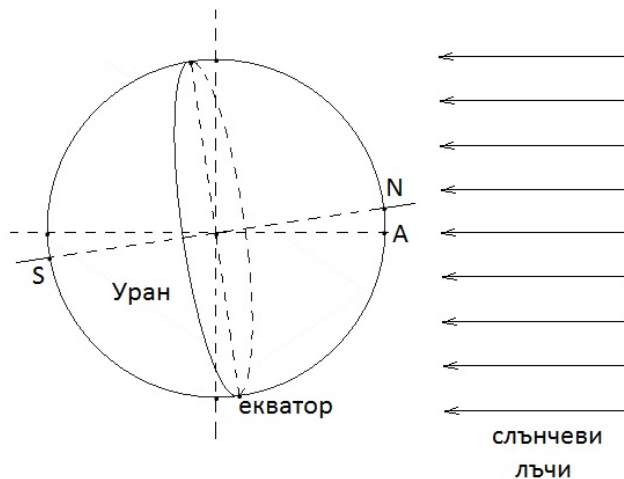
За пресмятанията – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

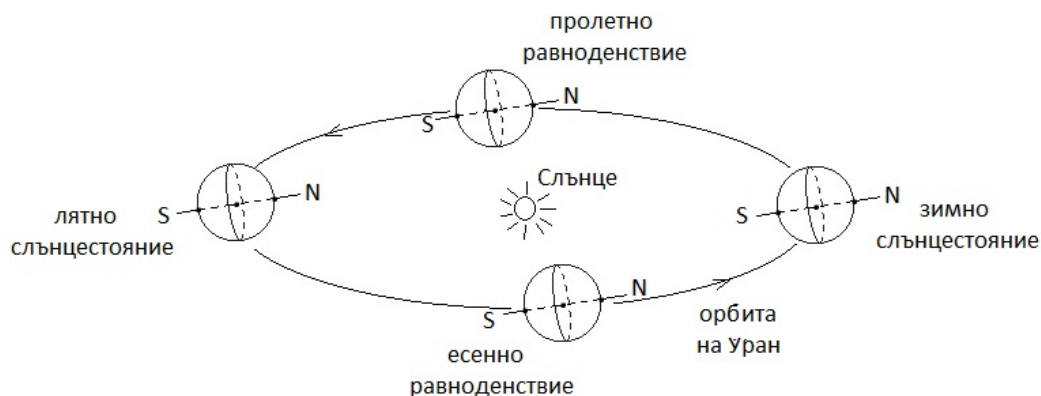
2 задача. Уран.

Решение:

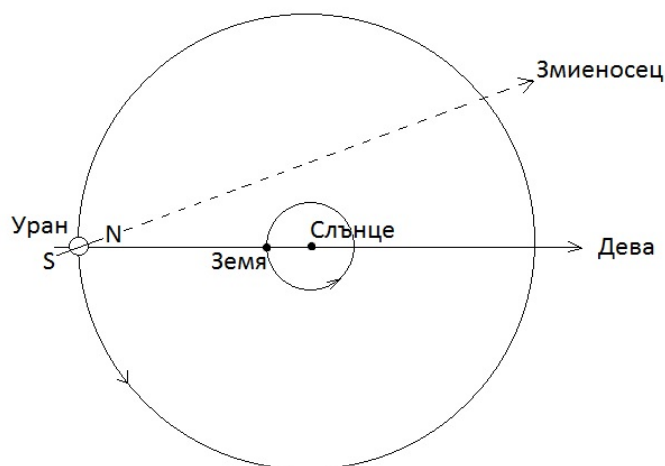
Най-голяма височина над хоризонта за северния полюс на Уран Слънцето трябва да достига в момента на лятно слънцестояние за северното полукълбо на планетата. На схемата е представена именно такава ситуация. Тогава Слънцето ще отстои само на 8° от зенита за наблюдател на северния полюс на планетата. Следователно максималната височина над хоризонта, на която ще се издига Слънцето, ще бъде $h = 90^\circ - 8^\circ = 82^\circ$. В този момент Слънцето ще бъде в зенита за точката А, отстояща на 8° от северния полюс. Нейната уранографска ширина ще бъде също 82° .



С отминаване на слънцестоянието и приближаване на пролетното равноденствие Слънцето ще може да се издига до зенита за точки, които са все по-близо до екватора на Уран. При пролетното равноденствие Слънцето ще преминава през зенита по пладне за наблюдател на екватора. По-нататък през годината на Уран Слънцето ще достига до зенита за точки от южното полукълбо на Уран до 82° южна уранографска ширина. Така заключаваме, че точките, в които понякога през годината на Уран можем да наблюдаваме преминаване на Слънцето през зенита, са разположени между 82° северна и 82° южна уранографска ширина.



В началото на октомври Слънцето се намира в зодиакалното съзвездие Дева (През октомври то е в астрологическия зодиакален знак Везни, но поради прецесията на земната ос съзвездие, в което в действителност се намира Слънцето, е Дева). Северната полярна звезда за Уран е в Змиеносец. Част от това съзвездие е разположена между Скорпион и Стрелец. Северният полюс на Уран трябва да е ориентиран в такова направление, т.е. към точка от небесната сфера, която е на 30-40 градуса източно от Слънцето. Уран е в противостояние, така че за земния наблюдател той се намира в посока противоположна на посоката към Слънцето. Следователно, както става ясно от схемата, от Земята ще се вижда северният полюс на Уран.



Критерии за оценяване (общо 12 т.)

За правилно определяне на максималната височина на Слънцето за северния полюс на Уран – 2 т.

За определяне на ширината на точката, за която Слънцето е в зенита – 2 т.

За верни разсъждения къде на Уран можем да видим Слънцето в зенита – 2 т.

За верен краен извод – 2 т.

За правилни разсъждения по въпроса кой от полюсите на Уран се вижда от Земята – 3 т.

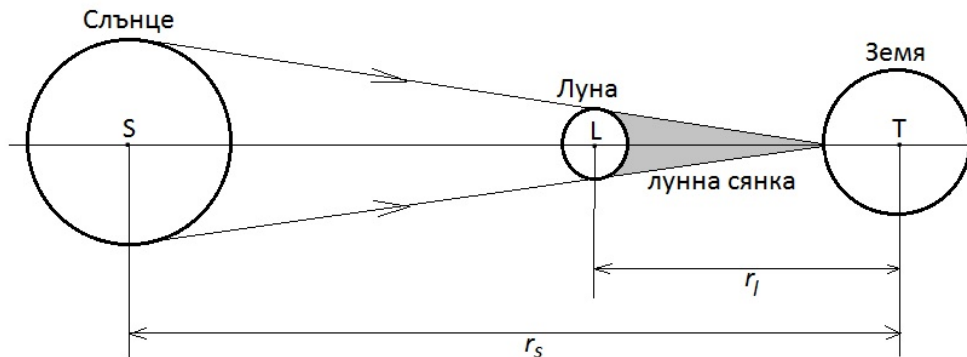
За вярно заключение – 1 т.

3 задача. Затъмнение.

Решение:

Времетраенето на пълната фаза на едно слънчево затъмнение се определя от това с колко видимият ъглов размер на Луната превишава видимия ъглов размер на Слънцето. По друг начин казано, това е времето, за което лунната сянка преминава през наблюдателния пункт. Поради елиптичната форма на лунната орбита около Земята и на

земната орбита около Слънцето, при различни случаи на слънчево затъмнение видимите ъглови размери на Слънцето и на Луната могат да са различни. Сянката на Луната има конусовидна форма. Ако пълната фаза на слънчевото затъмнение трае само миг, това означава, че върхът на конуса на лунната сянка се опира в земната повърхност. Схемата на затъмнението в този случай изглежда така:



За земен наблюдател видимите ъглови размери на Луната и Слънцето при такова затъмнение са еднакви. Наблюдателят е застанал на екватора, Слънцето и Луната за него в зенита.

Да означим с r_s и r_l разстоянията от центъра на Земята до центровете на Слънцето и на Луната. Нека R_t , R_l и R_s са радиусите на Земята, Луната и Слънцето. Както се вижда от чертежа, в сила е следното съотношение:

$$R_l / R_s = (r_l - R_t) / (r_s - R_t)$$

Оттук намираме разстоянието между центровете на земята и Луната:

$$r_l = (r_s R_l + R_t(R_s - R_l)) / R_s$$

$$r_l \approx 379\,900 \text{ км}$$

Геостационарният спътник ще премине през по-широка част от лунната сянка и за наблюдател там пълната фаза на затъмнението няма да е само един миг. Тъй като видимият ъглов диаметър на Луната е много малък, за линейния диаметър d на лунната сянка на височината на геостационарната орбита можем да напишем следното приблизително съотношение:

$$d / 2R_l = (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

където r_{gs} е радиусът на орбитата на геостационарния спътник.

$$d = 2R_l (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

$$d \approx 333 \text{ км}$$

Да определим скоростите v_l и v_{gs} , с които се движат по орбитите си Луната и спътникът. Означаваме с T_l периода на обикаляне на Луната около Земята, а с $T_t = 23^{\text{h}}56^{\text{m}}$ – периода на околоосно въртене на Земята (звездно денонощие), на който се равнява орбиталният период на геостационарния спътник. Така получаваме:

$$v_l = 2\pi r_l / T_l \approx 1.01 \text{ км / с}$$

$$v_{gs} = 2\pi r_{gs} / T_t \approx 3.07 \text{ км / с}$$

Спътникът и Луната се движат около Земята в една и съща посока. Около момента на затъмнението можем да считаме, че те се движат успоредно, а също, че лунната сянка се движи със скоростта на Луната. Спътникът е по-бърз – той ще настигне и ще прекоси лунната сянка. Относителната скорост на спътника спрямо сянката ще бъде:

$$v' = v_{gs} - v_l = 2.06 \text{ км / с}$$

Времето, за което спътникът ще пресече сянката, ще бъде:

$$\Delta t = d / v'$$

$$\Delta t \approx 162 \text{ с} \approx 2^{\text{m}}42^{\text{s}}$$

Продължителността на пълната фаза на затъмнението за наблюдател на геостационарния спътник ще бъде около 2^m42^s .

Критерии за оценяване (общо 14 т.)

За правилна представа за геометрията на слънчевото затъмнение в дадената ситуация – 1 т.

За правилна схема – 2 т.

За правилен математически метод за определяне на разстоянието между Луната и Земята – 3 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За правилна представа защо от геостационарния спътник пълната фаза няма да е само миг – 1 т.

За верен математически метод за намиране на продължителността на пълната фаза – 3 т.

За отчитане на движението на Луната и определяне на относителното движение на спътника спрямо сянката – 2 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето – 696000 км

Екваториален радиус на Земята – 6378 км

Радиус на Луната – 1738 км

Разстояние Земя – Слънце – 149 600 000 км

Период на въртене на Земята около оста – $23^h 56^m$

Период на движение на Луната около Земята – 27.32 денонощия

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград

ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – VII-VIII КЛАС

ПРАКТИЧЕСКИ КРЪГ

Практическа задача. Фази на Галилеевите спътници. Фантастичен жител на спътника на Юпитер Ганимед наблюдава гигантската планета и другите нейни големи спътници – Йо, Европа и Калисто. Той е решил да състави календар за себеподобните си същества от Ганимед, като използва изменението на фазите на Юпитер и на спътниците.

- Като използвате данните от таблицата, начертайте в подходящ мащаб схема с Юпитер и орбитите на четирите Галилееви спътници, или луни – Йо, Европа, Ганимед и Калисто. Отбележете някаква посока, от която приемате, че идват слънчевите лъчи.

- Нанесете върху схемата точките G_1 , G_2 , G_3 и G_4 , в които се намира спътникът Ганимед в моментите, когато за неговите жители Юпитер е в четирите основни фази по аналогия с лунните фази за нас:

1. „новопланетие”
2. първа четвърт
3. „пълнопланетие”
4. последна четвърт.

- Да приемем, че Ганимед се намира в точка G_1 . Отбележете върху схемата къде трябва тогава да се намират луните Йо, Европа и Калисто, така че за жителя на Ганимед те да са в новолуние, пълнолуние, първа или последна четвърт. Ще могат ли всички тези фази наистина да се наблюдават от Ганимед?

- Направете същото и за случаите, когато Ганимед се намира в точките G_2 , G_3 и G_4 .

- За да не се претрупва чертежът, начертайте отново схемата с Юпитер, орбитите на четирите спътника и слънчевите лъчи, но без отбелязваните в първата схема точки. Отбележете върху новата схема всички положения на Ганимед по неговата орбита, от които е възможно в някакви моменти Европа да се наблюдава в четвърт, т.е. като кръг, осветен точно наполовина.

- Отбележете върху схемата всички положения на Ганимед по неговата орбита, от които е възможно в някакви моменти Калисто да се наблюдава в четвърт.

Обяснете вашите отговори.

№	Спътник	Радиус на орбитата около Юпитер, км
1	Йо	422 000
2	Европа	671 000
3	Ганимед	1 070 000
4	Калисто	1 880 000

Радиусът на Юпитер е 70 000 км.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград

Възрастова група VII-VIII клас – практически кръг – решения

Практическа задача. Фази на Галилеевите спътници.

Решение:

Начертаваме в подходящ мащаб Юпитер, означен с J , и орбитите на спътниците. Отбелязваме посоката, от която приемаме, че идват слънчевите лъчи, както и посоката, в която става орбиталното движение на спътниците. Обозначаваме с черен цвят неосветените от Слънцето страни на всяко от телата.

„Новопланетието” за Ганимед ще бъде, когато Юпитер е обърнат изцяло с тъмната си страна към него. За целта Ганимед трябва да се намира в точка G_1 . „Пълнопланетието” ще е, когато гигантската планета е обърната изцяло с осветената си страна към спътника. Тогава спътникът следва да е в точка G_3 . В четвърт планетата ще се вижда от Ганимед, когато отстои на 90° от Слънцето в небето на ганимедианските жители. Имайки предвид посоката на орбиталното движение на Ганимед, можем да определим, че Юпитер ще се вижда във фаза първа четвърт след фазата „новопланетие” (G_2), и съответно в последна четвърт – след фазата „пълнопланетие” (G_4).

Нека Ганимед се намира в точка G_1 .

Жителят на Ганимед ще вижда спътниците Йо и Европа в новолуние, когато те се намират в точките I_1 и E_1 . Би могъл по принцип да ги вижда в новолуние и когато се намират съответно в точките I_3 и E_3 , но тогава те ще бъдат закрити от гигантската планета Юпитер. На схемата Юпитер е даден в реален мащаб спрямо радиусите на спътниковите орбити, а спътниците са отбелязани със силно преувеличени размери, за да се отличават фазите им. Иначе те са извънредно малки в сравнение с Юпитер. Освен това наклоните на орбитите им спрямо екватора на Юпитер са значителни и не превишават половин градус. Затова няма шанс някой от тях да се наблюдава от Ганимед малко над или под Юпитер в случаите, когато са от другата страна на планетата, въпреки че тя ще осигури удобно за такова наблюдение слънчево затъмнение.

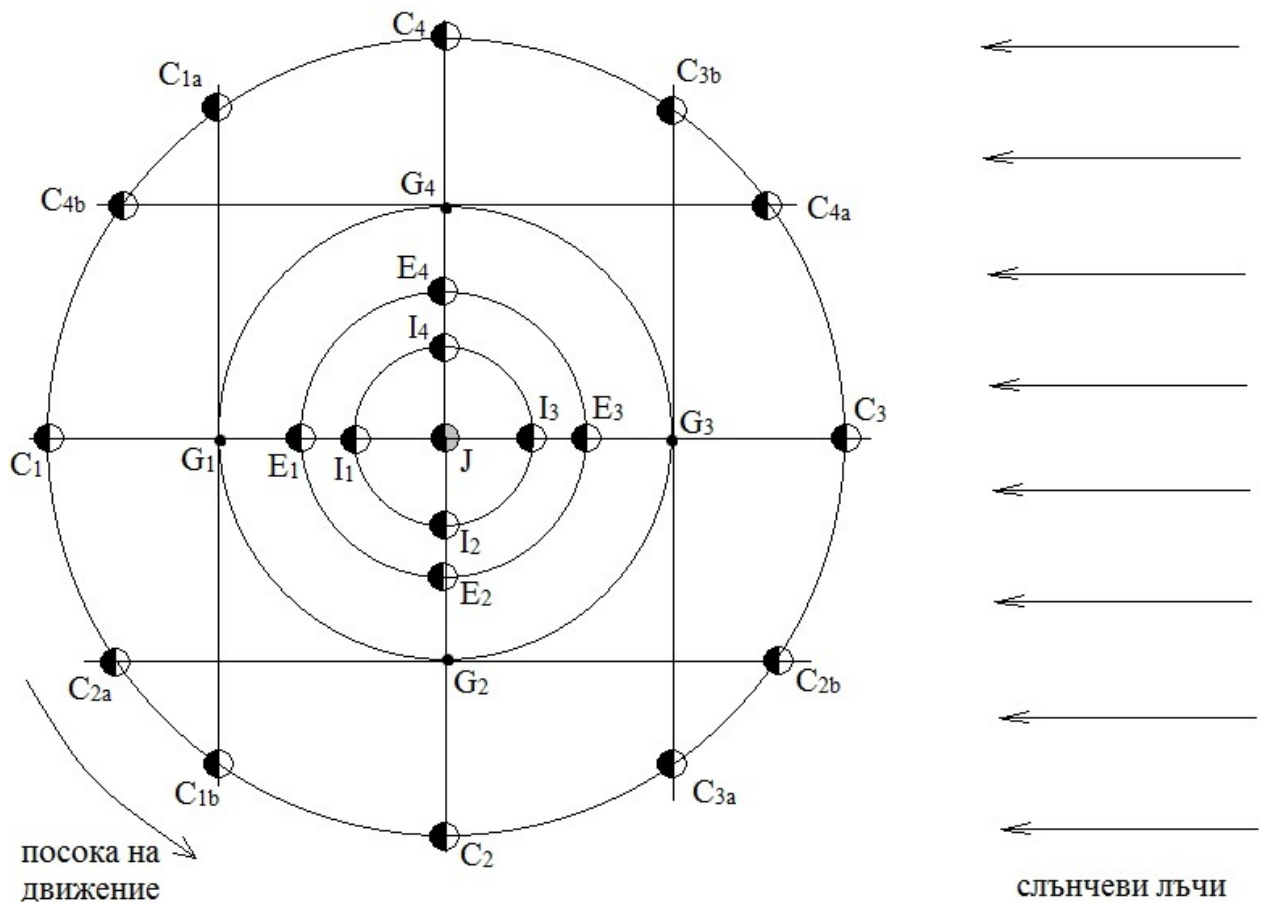
От това положение на Ганимед няма начин Йо и Европа да се наблюдават в пълнолуние, първа или последна четвърт, където и да се намират по своите орбити.

Калисто ще се вижда в пълнолуние, когато е в точка C_1 . В точките C_{1a} и C_{1b} този спътник ще се вижда от Ганимед в четвърт. Ганимед, като по-вътрешен спътник, се движи по-бързо около Юпитер. Следователно, последователно във времето, наблюдателят от Ганимед първо ще вижда Калисто в положение C_{1b} , после в положение C_1 – т.е. в пълнолуние, а след това в положение C_{1a} . По тази логика можем да кажем, че в точка C_{1b} Калисто е в първа четвърт, а в точка C_{1a} – в последна четвърт. Жителят на Ганимед би наблюдавал Калисто в новолуние в точка C_3 , ако не пречеше планетата Юпитер.

Нека Ганимед се намира в точка G_3 .

Разсъждения, подобни на горните, ни довеждат до заключението, че спътниците Йо и Европа ще се наблюдават в пълнолуние, когато са в точките I_3 и E_3 . Тези спътници никога няма да се виждат в четвърт, а когато са в точките I_1 и E_1 , макар да са в пълнолуние за ганимедианския наблюдател, те няма да се виждат, понеже ще са скрити зад Юпитер.

Спътникът Калисто в положение C_3 ще бъде в новолуние, а в положения C_{3a} и C_{3b} съответно в първа и в последна четвърт. Поради закритието от Юпитер пълнолунието на Калисто в точка C_1 няма да се вижда.



Нека Ганимед се намира в точка G_2 .

Тогава спътниците Йо и Европа в точки I_2 и E_2 ще се виждат в четвърт. Те се движат по-бързо от Ганимед. При по-нататъшното развитие на фазите им те ще се доближават до новолуние. Затова можем да заключим, че в точки I_2 и E_2 те са в последна четвърт. В точки I_4 и E_4 двата спътника биха били в първа четвърт за наблюдателя на Ганимед, но ще са скрити от Юпитер. В точка C_{2a} Калисто ще се вижда в новолуние, а в точка C_{2b} – в пълнолуние.

Спътникът Калисто в положение C_2 ще бъде в първа четвърт. Когато Калисто е в точка C_4 , ако не го скриваше Юпитер, щеше да се наблюдава от Ганимед също в четвърт, Спътникът Калисто в точка C_4 ще бъде в последна четвърт, в точка C_{4a} ще се вижда в пълнолуние, а в точка C_{4b} – в новолуние.

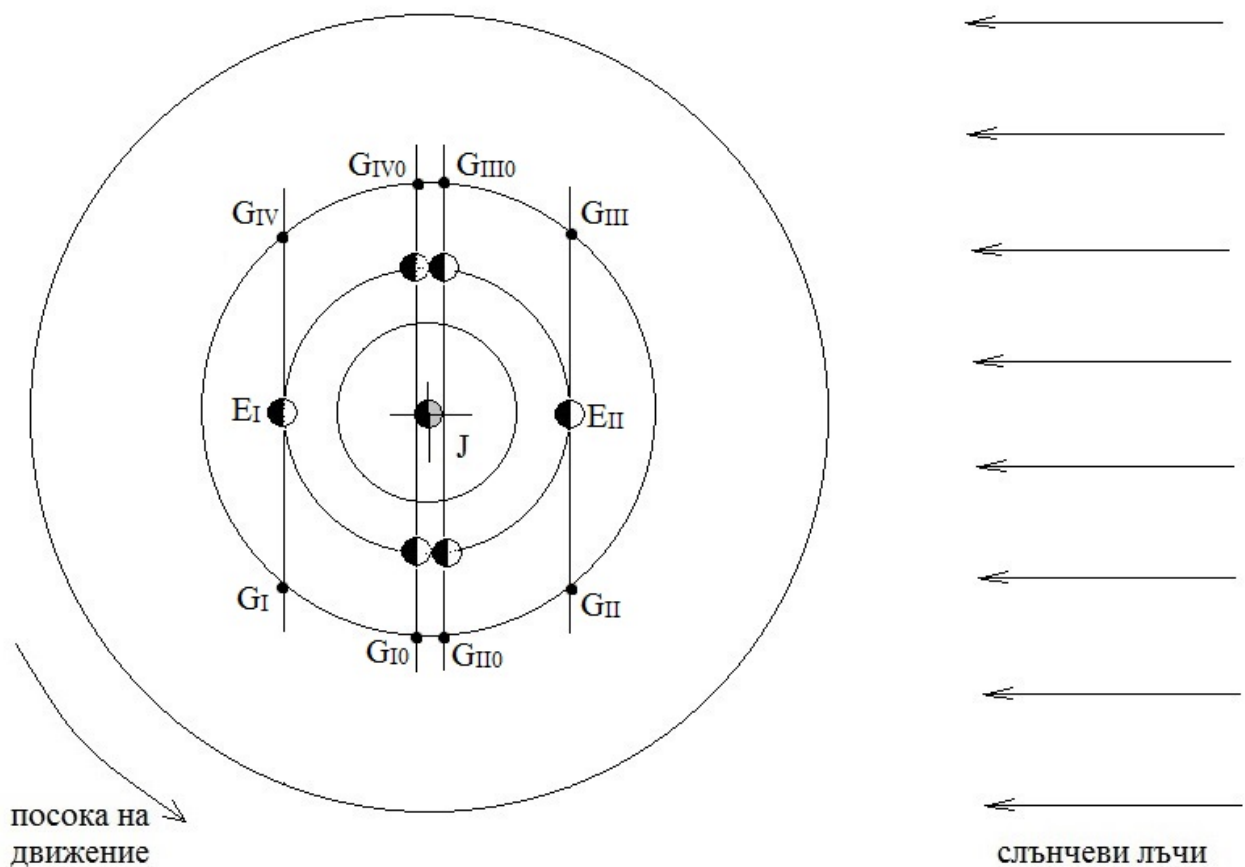
Нека Ганимед се намира в точка G_4 .

Отново подобни разсъждения ни водят до извода, че тогава спътниците Йо и Европа в точки I_4 и E_4 биха били в първа четвърт, а в пълнолуние или новолуние не могат да се виждат никога. Спътникът Калисто в точка C_2 ще бъде в последна четвърт, в точка C_{4a} ще се вижда в новолуние, а в точка C_{4b} – в пълнолуние.

Сега начертаваме още веднъж схемата с орбитите. За да се наблюдава от Ганимед някой спътник в четвърт, трябва правата, свързваща Ганимед със спътника, да е перпендикулярна на правата Ганимед – Слънце. Спътникът Европа може да се наблюдава в четвърт, само когато Ганимед се намира върху дъгата $G_I G_{II}$, или когато е върху дъгата $G_{III} G_{IV}$. За всяка точка от тези дъги, в която се намира Ганимед, са възможни две положения

на Европа, в които тя е във фаза четвърт. Само когато Ганимед се намира точно в граничните точки G_I или G_{IV} , има само едно положение на Европа – точката E_I , в което тя може да се види в четвърт. Аналогично, когато Ганимед е в някоя от точките G_{II} или G_{III} , Европа ще се вижда в четвърт само в една точка – точката E_{II} . Когато Ганимед се намира между точките G_{IO} и G_{IIO} , или G_{III0} и G_{IV0} , спътникът Европа ще се вежда в четвърт, само когато е в близкото до Ганимед от двете възможни положения, но не и когато е зад Юпитер.

За всяко положение по орбитата на Ганимед съществуват точно две точки от орбитата на Калисто, в които този спътник би бил във фаза четвърт за ганимедианския наблюдател. Лесно можем да се убедим в това. Нека Ганимед е в произволна точка от орбитата си. Построяваме права, минаваща през тази точка и перпендикулярна на направление Ганимед – Слънце. Тази права винаги ще пресича орбитата на Калисто в две точки. Следователно цялата орбита на Ганимед отговаря на условието, поставено в задачата.



Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За построяване на схемата с орбитите в мащаб – 1 т.

За определяне на положенията G_1 , G_2 , G_3 и G_4 , в които от Ганимед ще се наблюдават основните фази на Юпитер – 2 т.

За отбелязване на положенията, в които спътниците ще се виждат в съответните фази от Ганимед, и обяснения за 4-те случая G_1 , G_2 , G_3 и G_4 – $4 \times 3 = 12$ т.

За построяване на втората схема и обяснение на идеята – 2 т.

За правилно заключение относно спътника Европа – 2 т.

За правилен извод относно Калисто – 2 т.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – IX-X КЛАС

ТЕОРЕТИЧЕН КРЪГ

1 задача. Лунен изгрев и залез. Ентузиазирани астроном любители се намират на скромна яхта в Гвинейския залив, на екватора, точно на Гринуичкия меридиан. В 02^h UT той най-после с радост вижда залеза на центъра на видимия лунен диск. Лунната светлина повече няма да му пречи и ще може спокойно да наблюдава метеори.

- В противоположната точка на екватора, в голяма яхта се намира друг, доста сънлив астроном. В колко часа по Универсално време (UT) той ще види изгрева на центъра на видимия лунен диск? Колко часа ще е тогава по неговото поясно време?

- Сънливият астроном се надява в предстоящата за него нощ Луната да залезе в по-късен час, отколкото за неговия приятел, защото така ще може да си поспи до по-късно през нощта с чиста съвест. Ще се оправдаят ли неговите надежди?

При вашите пресмятания се придържайте към стила на сънливия астроном, който за по-лесно счита, че лунната орбита лежи в екваториалната равнина на Земята.

2 задача. Уран. Вие изследвате планетата Уран, като пътешествате в горните слоеве на нейната атмосфера с реактивен летателен апарат. За улеснение въвеждате уранографски координати, подобни на географските координати на Земята. Оста на въртене на Уран е много силно наклонена – ъгълът между оста на планетата и нейната орбитална равнина е само около 8°. Както и при другите планети, при движението на Уран около Слънцето, оста му на въртене остава успоредна сама на себе си.

- Каква е максималната височина над хоризонта, на която ще се издига за вас Слънцето, ако сте примерно на северния полюс на Уран?

- В области с какви уранографски ширини ще можете понякога през уранианската година да виждате Слънцето в зенита?

- При вашите навигационни изследвания сте установили, че като полярна звезда за северния полюс на Уран може да се използва звездата η Змиеносец, а на южния полюс – звездата 15 Орион. На 3 октомври 2014 г. Уран ще бъде в противостояние за земните наблюдатели. Кой от полюсите на Уран ще се вижда от Земята тогава – северният или южният?

- Какъв сезон от уранианската година ще е по това време за северното полукукло на Уран (онова, в което е северният полюс)? Приблизително след колко време от Земята ще започне да се вижда другият полюс на Уран?

Обяснете вашите отговори.

3 задача. Слънчево петно. Млад астроном любитель е предупреден, че в никакъв случай не бива да поглежда към Слънцето през оптически уред без филтър. Поради големия ентузиазъм, обаче, той изработва специален екран с малък отвор. Поставен във фокалната плоскост на обектива на телескопа, екранът закрива Слънцето с изключение на появилото се голямо слънчево петно с диаметър 30 000 км. Размерът на отвора е точно такъв, че през него се вижда само слънчевото петно.

- Определете колко пъти осветеността, създавана само от петното, е по-слаба от осветеността, създавана от цялото Слънце, когато на него няма петна.

- Диаметърът на обектива на телескопа е 15 см. Сравнете количеството светлина, което ще попадне в окото на любителя астроном при наблюдение само на петното през телескопа и при наблюдение на цялото Слънце без телескоп. Как мислите, ще бъде ли безопасно за младия астроном да го наблюдава по такъв начин? При силно осветяване диаметърът на зеницата на окото е около 1 мм. Загубите на светлина в телескопа да не се отчитат.

- Определете видимата звездна величина на петното.

- Представете си едно по-малко слънчево петно с радиус равен на радиуса на Луната. Петното е „изрязано” от слънчевата фотосфера и доближено до Земята на разстояние, каквото е разстоянието Земя – Луна. Каква ще е неговата видима звездна величина тогава?

Считайте, че температурата на слънчевите петна е 4200 К.

Справочни данни:

Радиус Земята 6378 км

Радиус на Луната 1378 км

Орбитален период на Луната около Земята 27.3 денонощия

Радиус на лунната орбита 384 000 км.

Орбитален период на Уран 84 земни години

Радиус на Слънцето 700 000 км

Видима звездна величина на Слънцето -26.74^m

Температура на Слънцето 5800 К

Разстояние от Земята до Слънцето 149 600 000 км

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

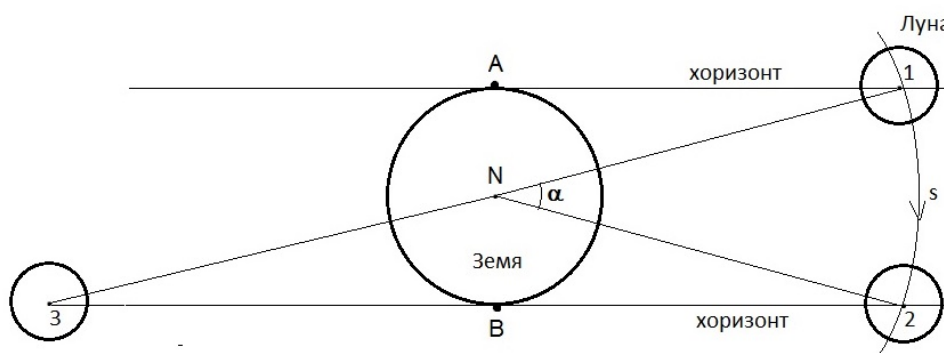
Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

Възрастова група IX-X клас – теоретичен кръг – решения

1 задача. Лунен изгрев и залез.

Решение:

На чертежа Земята е изобразена така, че северният ѝ полюс е обърнат към нас, астрономът на Гринуичкия меридиан се намира в точка А, а неговият колега на 180-градусовия меридиан – в точка В.



Ще разглеждаме ситуацията в координатна система, въртяща се заедно с денонощното въртене на Земята. В такава координатна система Луната се движи около Земята от изток на запад с ъглова скорост:

$$\omega = \omega_T - \omega_L$$

където ω_T е ъгловата скорост на оклоосното въртене на Земята, а ω_L е ъгловата скорост на орбиталното движение на Луната. Да означим с T_T периодът на околоосно въртене на Земята (звездно денонощие) и с T_L периодът на орбитално движение на Луната (сидеричен лунен месец). Тогава:

$$\omega = \frac{360^\circ}{T_T} - \frac{360^\circ}{T_L}$$

С тази ъглова скорост Луната ще прави едно видимо завъртане около Земята с период:

$$T = \frac{T_T T_L}{T_L - T_T}$$

$$T \approx 1.035 \text{ денонощия} \approx 1 \text{ денонощие и } 50 \text{ минути}$$

От момента на залеза за астронома в точка А до изгрева за астронома в точка В, Луната трябва да измине път s по своята орбита, или да опише ъгъл α . Разстоянието от Земята до Луната е голямо в сравнение със земния радиус. Можем да считаме, че $s \approx 2R_T$, където R_T е радиусът на Земята. Тогава за ъгъла α получаваме:

$$\alpha = 360^\circ \cdot \frac{2R_T}{2\pi r} = 360^\circ \cdot \frac{R_T}{\pi r}$$

където r е радиусът на лунната орбита. Този път Луната ще измине за време:

$$t = \frac{\alpha}{360^\circ} \cdot T = \frac{R_T}{\pi r} \cdot T$$

$$t \approx 7.88 \text{ минути} \approx 7 \text{ минути } 53 \text{ секунди}$$

Би трябвало да отчетем и рефракцията. Ъгълът на рефракция на хоризонта е около $35'$. Луната при видимото си движение изминава такъв ъгъл за време:

$$t_1 = \frac{35'}{360^\circ} \cdot T$$

$$t_1 \approx 2 \text{ минути } 25 \text{ секунди}$$

За наблюдателя А залезът на Луната ще закъснее с толкова време, а за наблюдателя В изгревът ѝ ще подрани със същото време. Следователно интервалът между залеза на Луната в единия пункт и изгрева в другия пункт ще се съкрати с величината:

$$2 \times 2 \text{ минути } 25 \text{ секунди} = 4 \text{ минути } 50 \text{ секунди}$$

Така търсуеният интервал ще стане:

$$7 \text{ минути } 53 \text{ секунди} - 4 \text{ минути } 50 \text{ секунди} = 3 \text{ минути } 03 \text{ секунди}$$

В крайна сметка изгревът на Луната за сънливия астроном ще е в $2^{\text{h}}03^{\text{m}}3^{\text{s}}$ по Универсално време, или $14^{\text{h}}03^{\text{m}}3^{\text{s}}$ по неговото поясно време.

До следващия залез на Луната за втория астроном тя има да измине още ъгъла до положение 3, който е допълнителен на α до 180° . По-лесно е да сметнем интервала от залеза на Луната за астронома в точка А до залеза ѝ за наблюдателя в точка В. Този интервал ще е половината от периода T , или 12 часа 25 минути. Тук поправка за рефракцията не се налага, защото и на двете места залезът ще закъснее с еднакво време. По пояското време на сънливия астроном Луната ще залезе в $2^{\text{h}}25^{\text{m}}$ и той ще може да си почива цели 25 минути в повече от своя колега.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилен теоретичен начин за пресмятане на момента на изгрева на Луната за астронома в точка В – 5 т.

За отчитане на рефракцията – 2 т.

За пресмятане в колко часа по Универсално и поясно време ще настъпи изгревът за втория астроном – 2 т.

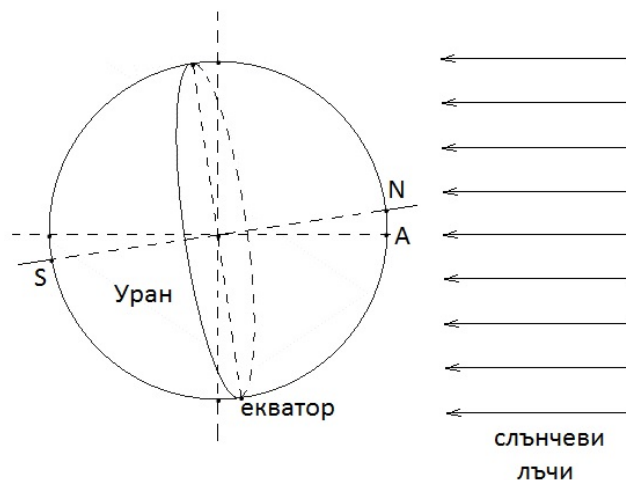
За правилен начин за пресмятане на часа на залеза на Луната за втория астроном в точка В – 4 т.

За отчитане на факта, че рефракцията не влияе на отговора – 1 т.

За верен числен резултат – 1 т.

2 задача. Уран.

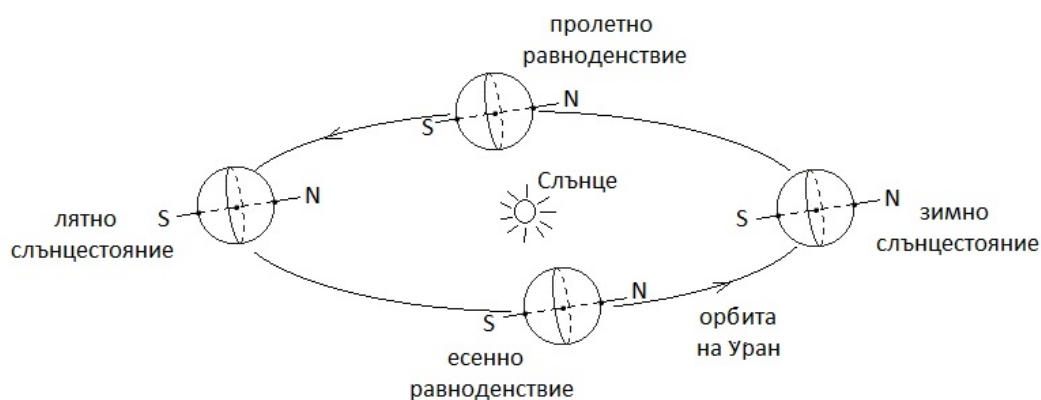
Решение:



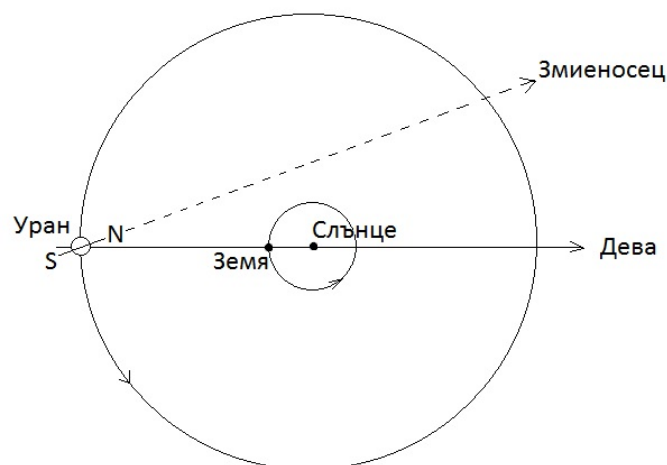
Най-голяма височина над хоризонта за северния полюс на Уран Слънцето трябва да достига в момента на лятно слънцестояние за северното полукуълбо на планетата. На

схемата е представена именно такава ситуация. Тогава Слънцето ще отстои само на 8° от зенита за наблюдател на северния полюс на планетата. Следователно максималната височина над хоризонта, на която ще се издига Слънцето, ще бъде $h = 90^\circ - 8^\circ = 82^\circ$. В този момент Слънцето ще бъде в зенита за точката А, отстояща на 8° от северния полюс. Нейната уранографска ширина ще бъде също 82° . Фактически тя лежи на северната тропична окръжност за тази планета.

С отминаване на слънцестоянието и приближаване на пролетното равноденствие Слънцето ще може да се издига до зенита за точки, които са все по-близо до екватора на Уран. При пролетното равноденствие Слънцето ще преминава през зенита по пладне за наблюдател на екватора. По-нататък през годината на Уран Слънцето ще достига до зенита за точки от южното полукукло на Уран до 82° южна уранографска ширина. Така заключаваме, че точките, в които понякога през годината на Уран можем да наблюдаваме преминаване на Слънцето през зенита, са разположени между 82° северна и 82° южна уранографска ширина.



В началото на октомври Слънцето се намира в зодиакалното съзвездие Дева (През октомври то е в астрологическия зодиакален знак Везни, но поради прецесията на земната ос съзвездие, в което в действителност се намира Слънцето, е Дева). Северната полярна звезда за Уран е в Змиеносец. Част от това съзвездие е разположена между Скорпион и Стрелец. Северният полюс на Уран трябва да е ориентиран в такава направление, т.е. към точка от небесната сфера, която е на 60 градуса източно от Слънцето. Уран е в противоположие, така че за земния наблюдател той се намира в посока противоположна на посоката към Слънцето. Следователно, както става ясно от схемата, от Земята ще се вижда северният полюс на Уран.



От схемата се вижда, че при по-нататъшното движение на Уран по неговата орбита, все повече ще се приближава моментът на лятно слънцестояние за северното

полукълбо на планетата, защото северният полюс ще е все по-точно ориентиран към Слънцето. Ъгълът, на който трябва да се завърти планетата по орбитата си, за да стане това, е приблизително колкото ширината на два зодиакални знака, или около 60° . Това съответства на 2 ураниански „месеца“. Следователно в северното полукълбо на Уран ще е началото на пролетта, или нещо подобно на края на март и началото на април на Земята.

За да започне да се вижда от Земята другият полюс на Уран, трябва да свърши лятото и да дойде есенното равноденствие. Това ще стане след около 5 ураниански месеца, или след $5/12$ от годината на Уран. Така пресмятаме, че другият полюс ще започне да се вижда след около $(5/12) \cdot 84 = 35$ години.

Критерии за оценяване (общо 15 т.)

За правилно определяне на максималната височина на Слънцето за северния полюс на Уран – 2 т.

За верни разсъждения къде на Уран можем да видим Слънцето в зенита – 2 т.

За верен краен извод – 2 т.

За правилни разсъждения по въпроса кой от полюсите на Уран се вижда от Земята – 3 т.

За вярно заключение – 1 т.

За правилни разсъждения и отговор какъв сезон е на Уран – 2 т.

За правилно определяне след колко време ще се вижда другият полюс – 3 т.

3 задача. Слънчево петно.

Решение:

Ще си послужим с приближение, като ще приемем Слънцето за светещ диск. Осветеността E_0 , която то създава на Земята, ще е пропорционална на излъчващата площ на целия слънчев диск, а осветеността от петното E_1 ще е пропорционална на площта на петното. Освен това, съгласно закона на Стефан-Болцман осветеността ще е пропорционална и на потока светлина от единица повърхност, който зависи от температурата. В сила е съотношението:

$$\frac{E_0}{E_1} = \frac{\pi R_0^2 \cdot \sigma T_0^4}{\pi R_1^2 \sigma T_1^4} = \frac{R_0^2 T_0^4}{R_1^2 T_1^4}$$

Където R_0 и T_0 са радиусът и температурата на Слънцето, а R_1 и T_1 – тези на петното, σ е константата на Стефан-Болцман.

$$\frac{E_0}{E_1} \approx 7920$$

Блясъкът на петното около 8000 пъти по-слаб от блясъка на цялото Слънце.

Да приемем, че цялата светлина от обектива на телескопа попада в зеницата на окото. Обективът събира толкова пъти повече светлина от зеницата на окото, колкото пъти площта на обектива е по-голяма от тази на окото. Да означим с D диаметъра на обектива, а с d диаметъра на зеницата.

$$\frac{\pi D^2/4}{\pi d^2/4} = \frac{D^2}{d^2} = 22500$$

Следователно при наблюдение с телескоп отделното слънчево петно ще бъде 22500 пъти по-ярко, отколкото при наблюдение с невъоръжено око. В сравнение със Слънцето, гледано без телескоп, блясъкът само на петното в телескопа ще бъде $22500/7920 \approx 3$ пъти по-силен! Наистина, не е за препоръчване дори само едно слънчево петно да се наблюдава в телескоп по този начин.

Да означим видимата звездна величина на Слънцето с m_0 , а на петното с m_1 . От формулата на Погсън получаваме:

$$\frac{E_0}{E_1} = 2.512^{m_1 - m_0}$$

$$m_1 = m_0 + 2.5 \lg \frac{E_0}{E_1}$$

$$m_1 \approx -17^m$$

Както виждаме, дори и само едно такова слънчево петно да грее на небето, то ще е много по-ярко от Луната (Грубата оценка показва, че петното ще е десетки пъти по-ярко от Луната в пълнолуние).

Ако „изрежем“ от слънчевото петно парченце, голямо колкото Луната, то неговата площ ще бъде $(30000 \text{ км} / 1378 \text{ км})^2 \approx 474$ пъти по-малка от цялата площ на голямото петно. Да отбележим с r_L разстоянието от нас до Луната, а с r_S разстоянието до Слънцето. Осветеността, която един светлинен източник създава, е обратно пропорционална на квадрата на разстоянието до него. Можем да пресметнем колко пъти ще се увеличи осветеността от парченцето от слънчевото петно, когато го приближим до разстоянието, на което се намира Луната:

$$\frac{r_S^2}{r_L^2} \approx 152000$$

Като разделим това на 474, ще получим колко пъти парченцето от петното, пренесено на разстоянието до Луната, ще е по-ярко от цялото петно на Слънцето. Получаваме около 320 пъти.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилно определяне колко пъти блясъкът на петното е по-слаб от този на Слънцето – 3 т.

За правилен математически подход при определяне на блясъка на петното, гледано с телескопа – 3 т.

За верен числен отговор и сравнение с блясъка на Слънцето – 2 т.

За правилен начин на определяне на звездната величина на петното – 2 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За правилен начин на определяне на яркостта на парчето от петното на разстоянието до Луната – 3 т.

За верен числен резултат – 1 т.

Справочни данни:

Радиус Земята 6378 км

Радиус на Луната 1378 км

Орбитален период на Луната около Земята 27.3 денонощия

Радиус на лунната орбита 384 000 км.

Орбитален период на Уран 84 земни години

Радиус на Слънцето 700 000 км

Видима звездна величина на Слънцето -26.74^m

Температура на Слънцето 5800 К

Разстояние от Земята до Слънцето 149 600 000 км

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград

ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – IX-X КЛАС

ПРАКТИЧЕСКИ КРЪГ

Практическа задача. Орбитата на Марс. В своята книга „Нова астрономия” знаменитият немски астроном Йохан Кеплер излага резултатите от десетгодишния си труд по изследването на орбитата на планетата Марс и откриването на трите закона за движението на планетите около Слънцето. Той описва метода, чрез който е успял да построи орбитата на Марс и да докаже, че тя не е окръжност, а елипса. От наблюденията на датския астроном Тихо Брахе Кеплер е разполагал с данни за еклиптичната дължина на Марс в различни моменти от време. Еклиптичната дължина е видимото от земния наблюдател ъглово отстояние на планетата от пролетната равноденствена точка. За да получи дадено положение на Марс по неговата орбита, Кеплер е използвал двойка данни за еклиптичната дължина на Марс – веднъж при противостояние на планетата и веднъж в момент точно един орбитален период на Марс след противостоянието. Марс се завърта около Слънцето за 686.791 денонощия.

- Начертайте в подходящ мащаб земната орбита около Слънцето. Приемете, че тя е кръгова. Изберете някакво направление, в което да се намира пролетната равноденствена точка. Използвайте данните от таблицата и се опитайте да възстановите метода на Кеплер – постройте орбитата на Марс. Опишете вашия начин на работа. Препоръчително е да използвате листа милиметрова хартия, да разположите земната орбита по средата и нейният радиус да не е по-голям от 6 см.

- Определете голямата полуос на марсианската орбита в астрономически единици. Определете разстоянието Между Марс и Слънцето в перихелия и в афелия на орбитата.

- Кога приблизително Марс е бил във велико противостояние?

<i>Някои противостояния на Марс</i>					<i>Един орбитален период след противостоянието</i>			
№	Година	Дата	УТ, h, m	Екл. дължина на Марс	Година	Дата	УТ, h, m	Екл. дължина на Марс
1	1982	31.03.	10:14	190 38	1984	16.02.	09:32	226 53
2	1984	11.05.	08:52	231 04	1986	29.03.	08:10	270 36
3	1986	10.07.	05:27	287 52	1988	27.05.	04:46	333 06
4	1988	28.09.	03:32	005 23	1990	16.08.	02:50	051 44
5	1990	27.11.	20:35	065 20	1992	14.10.	19:53	106 32
6	1993	07.01.	22:43	107 40	1994	25.11.	22:01	145 02
7	1997	17.03.	07:55	176 46	1999	02.02.	07:13	212 41
8	1999	24.04.	17:38	214 06	2001	11.03.	16:56	252 16
9	2003	28.08.	17:59	335 01	2005	15.07.	17:17	022 25
10	2005	07.11.	07:59	045 01	2007	29.09.	07:17	090 08
11	2007	24.12.	19:47	092 46	2009	10.11.	19:05	131 12
12	2010	29.01.	19:37	129 33	2011	17.12.	18:55	165 54

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград

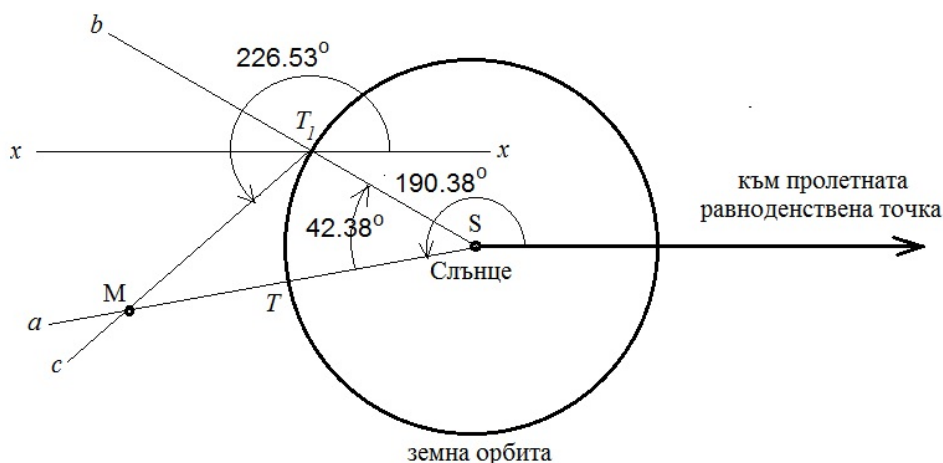
Възрастова група IX-X клас – практически кръг – решения

Практическа задача. Орбитата на Марс.

Решение:

Начертаваме кръговата земна орбита и отбелязваме направлението, което приемаме, че е към пролетната равноденствена точка. При противостоянието в 1982 г. еклиптичната ширина на Марс е била 190.38° . Тъй като става дума за противостояние, Земята тогава се е намирала на линията Марс-Слънце, т.е. нейният радиус-вектор е бил завъртян също на 190.38° спрямо направлението към пролетната равноденствена точка. Отмерваме с транспортир този ъгъл от направлението към пролетната равноденствена точка и построяваме правата Sa . Земята се е намирала тогава в пресечната точка T на тази права със земната орбита. На същата права се е намирал и Марс.

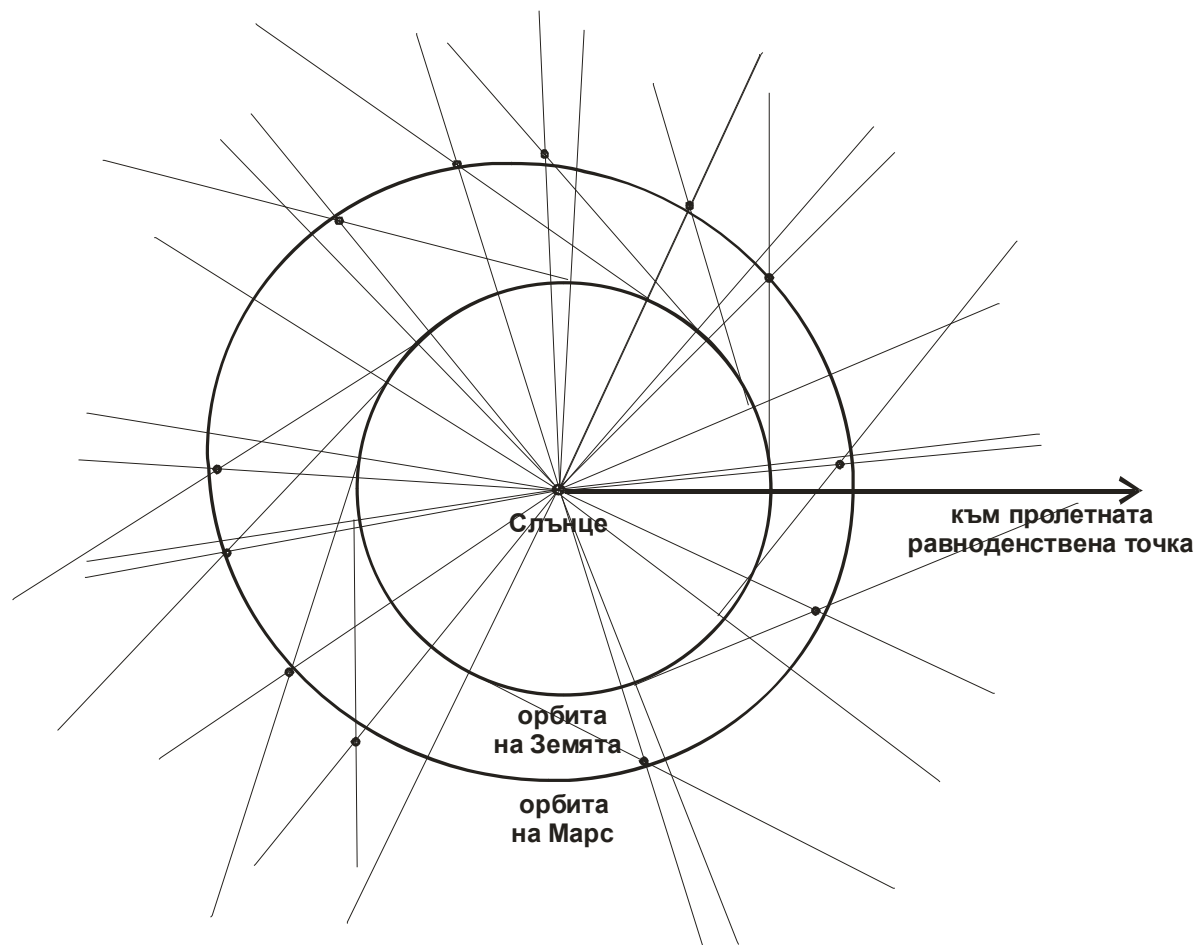
Забелязваме, че датата на противостоянието е 31 март, а след точно един марсиански орбитален период през 1984 г. датата е била 16 февруари. Това е така, защото орбиталният период на Марс е малко по-малък от две земни години. Датата 16 февруари е с 43 дни по-ранна от 31 март. При това моментите в универсално време не се различават много. Можем да пресметнем, че на 16 февруари 1984 г. Земята се е намирала приблизително на ъгъл $360^\circ \times (43^d / 365.25^d) \approx 42.38^\circ$ по-назад по своята орбита в сравнение с 31 март 1982 г. От правата Sa отмерваме в посока обратна на движението на Земята ъгъл 42.38° и построяваме правата Sb . Тя пресича земната орбита в точка T_1 , където се е намирала Земята на 16 февруари 1984 г. От таблицата виждаме, че тогава еклиптичната дължина на Марс е била 226.53° . Пренасяме успоредно направлението към пролетната равноденствена точка в точка T_1 и получаваме правата x . Отмерваме от нея ъгъл 226.53° и построяваме правата T_1c , която ни дава направлението към Марс на 16 февруари 1984 г. Но това е точно един марсиански период след противостоянието на 31 март 1982 г.. Следователно на двете дати Марс се е намирал в една и съща точка от своята орбита. Това е точката, в която се пресичат правите Sa и T_1c , сочещи направленията от Земята към Марс на тези дати. Така получаваме точката M , където е бил Марс тогава. Това е била идеята на Кеплер.



По същия начин процедираме и с другите данни от таблицата и получаваме още точки от орбитата на Марс. Накрая прекарваме и самата орбита през получените точки. Виждаме, че тя наистина не е кръгова, а елиптична.

Определяме приблизително направлението на голямата ос на марсианската орбита. Измерваме я и като я сравняваме с размера на земната орбита, виждаме, че са в съотношение 1.58 : 1. Това означава, че голямата полуос на марсианската орбита е около 1.58 астрономически единици. Полученият резултат е с много добра точност. В действителност голямата полуос на марсианската орбита е приблизително 1.52 астрономически единици.

За разстоянието между Марс и Слънцето, когато Марс е в афелий, получаваме около 0.88 астрономически единици, а за разстоянието в перихелий 0.70 астрономически единици. Разликата е значителна и това съществено влияе върху климата на Марс. Не случайно често когато Марс е в перихелий, се наблюдават глобални прашни бури, обхващащи цялата планета.



От противостоянията, дадени в таблицата, най-близо до перихелия на Марс се е случило това през 2003 г. То е било велико противостояние на Марс.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За правилна идея и теоретическа обосновка на метода – 5 т.

За пресмятания и правилно графично изпълнение – 6 т.

За окончателно начертаване на орбитата на Марс – 2 т.

За определяне на голямата полуос – 3 т.

За определяне на афелийното и перихелийното разстояние – 2 т.

За определяне кога е имало велико противостояние – 2 т.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – XI-XII КЛАС

ТЕОРЕТИЧЕН КРЪГ

1 задача. Космическа катастрофа. Звездата Вега е една от най-ярките звезди на небето. Тя е от спектрален клас A0 с температура 9600 K, светимост 40 пъти по-голяма от тази на Слънцето и маса 2.14 слънчеви маси. Вега има необикновено бързо околоосно въртене с период само 12.5 часа. Поради това тя има значителна сплеснатост – полярният ѝ радиус е 2.36 слънчеви радиуса, а екваториалният – 2.82 слънчеви радиуса. Около звездата се наблюдава обширен прахов диск и се смята, че в него може да са се образували много планети, някои от които подобни на Юпитер.

Изследванията на новоткритите гигантски планети около други звезди показват, че много от тях се движат по орбитите си в посока обратна на околоосното въртене на звездите. Предполага се, че това се получава при гравитационното взаимодействие между самите планети в планетните системи на звездите или с кафяво джудже, което е спътник на основната звезда.

Да предположим, че в резултат от подобно взаимодействие планета с масата на Юпитер на разстояние 5 AU от Вега придобива начална скорост, перпендикулярна на посоката към звездата, и тръгва по силно изтеглена елиптична орбита с такова обратно движение. Периастрият на орбитата се намира на един звезден екваториален радиус от центъра на Вега.

- Определете енергията, която се отделя при сблъсъка на планетата и звездата.
- Сравнете енергията на експлозията с енергията, която Вега излъчва за една секунда. Приемете, че цялата кинетична енергия при сблъсъка се превръща в излъчване.

2 задача. Лунни спътници. В XXII век на Луната са построени големи обитаеми лунни бази и около нея кръжат множество изкуствени спътници. Земен ученик от 11 клас се намира в такава база точно на северния полюс на Луната. Много често той наблюдава един от изкуствените спътници, който минава точно през зенита за него. Единадесетокласникът е установил, че времето, през което спътникът се вижда над хоризонта, е двойно по-кратко, отколкото времето, за което той е под хоризонта в рамките на всяка една обиколка около Луната.

- Пресметнете радиуса на орбитата на спътника и неговия орбитален период.

Друг земен ученик – от 12 клас – се намира в лунна база на екватора на Луната. Той наблюдава два спътника, които прелитат през зенита за него. Те се движат в две противоположни посоки по орбити със същия радиус, както спътника, наблюдаван от единадесетокласника на полюса. Орбитите им се различават съвсем незначително, колкото спътниците да не се сблъскат помежду си, но това различие няма да отчитаме.

• В даден момент дванадесетокласникът в екваториалната лунна база наблюдава двата спътника да изгряват едновременно – единият от изток, а другият от запад. Обяснете защо те няма да залезат едновременно. Пресметнете интервала от време между залеза на единия и залеза на другия спътник.

- На каква височина над хоризонта двата спътника ще се разминат?

3 задача. Затъмнение. Слънчевото затъмнение е много впечатляващо явление, особено когато е пълно. Намираме се на земния екватор и наблюдаваме слънчево затъмнение. Затъмнението се случва в зенита за нас. Продължителността на пълната фаза е само миг. Слънчевата корона се показва за момент и ведната изчезва.

- Начертайте схема на такова затъмнение. Определете разстоянието между центровете на Луната и Земята в момента на пълното затъмнение.
- По кое време на годината може да се случи това затъмнение?

Геостационарните спътници се движат по екваториална орбита с радиус 42164 километра в равнината на земния екватор. Тя е избрана така, че периодът на спътниците, при движението им по орбитата, да е равен на периода на завъртане на Земята около нейната ос. Нека един геостационарен спътник преминава централно през сянката на Луната по време на наблюдаваното от нас пълното слънчево затъмнение.

- Определете продължителността на пълното затъмнение за наблюдател на спътника, т.е. за колко време спътникът ще пресече сянката на Луната. В случая приемете, че Луната се движи по кръгова орбита.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето	696000 km
Маса на Юпитер	1.89×10^{27} кг
Маса на Слънцето	1.99×10^{30} кг
Гравитационна константа	6.67×10^{-11} м ³ / кг.с ²
Константа на Стефан-Болцман	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Вт / м ² К ⁴
Светимост на Слънцето	3.846×10^{26} Вт
Екваториален радиус на Земята	6378 km
Радиус на Луната	1738 km
Маса на Луната	7.35×10^{22} кг
Период на орбитално движение на Луната около Земята	27.32 денонощия
Наклон на лунната орбита към еклиптиката	5.15°
Наклон на земния екватор към еклиптиката	23.43°
Разстояние Земя – Слънце	149 600 000 km
Период на въртене на Земята около оста	23 ^h 56 ^m

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ**

Национален кръг, 26 април 2014 г., Димитровград

Възрастова група XI-XII клас – теоретичен кръг – решения

1 задача. Космическа катастрофа.

Решение:

За да определим скоростта на сблъсъка на планетата със звездата, трябва първо да определим скоростта на планетата в периастръ. Ще използваме закона за запазване на енергията и втория закон на Кеплер.

От закона за запазване на енергията следва:

$$\frac{m_J v_a^2}{2} - \frac{\gamma m_J M_{Vega}}{r_a} = \frac{m_J v_p^2}{2} - \frac{\gamma m_J M_{Vega}}{r_p}$$

където m_J е масата на планетата, M_{Vega} е масата на Вега, v_a и v_p са скоростите на планетата в апоастръ и периастръ, а r_a и r_p са разстоянията от планетата до звездата в апоастръ и периастръ. Трябва да имаме предвид, че разстоянието в периастръ е равно на радиуса на Вега.

Записваме и втория закон на Кеплер, който за двете характерни точки на орбитата, в които моментната скорост е перпендикулярна на радиус-вектора, има следния вид:

$$r_a v_a = r_p v_p$$

От това уравнение изразяваме скоростта v_a чрез другите величини и заместваем в първото уравнение. След елементарни преобразования получаваме следния израз за скоростта в периастръ на орбитата, т.е. в момента на сблъсъка на планетата със звездата:

$$v_p = \sqrt{\frac{2\gamma M_{Vega} \cdot r_a}{r_p \cdot (r_a + r_p)}}$$

Обръщаме внимание, че изразът $r_a / (r_a + r_p)$ е много близък по стойност до единица, поради това, че r_p е много по-малко от r_a . Получаваме разлика от две единици в четвъртия знак. Затова при пресмятанията може да използваме формулата:

$$v_p \approx \sqrt{\frac{2\gamma M_{Vega}}{r_p}}$$

Виждаме, че това е формулата за втора космическа скорост за повърхността на Вега, което можеше да се очаква предвид голямата разлика в периастръното и апоастръното разстояние.

Пресмятаме, използвайки масата на Слънцето от справочните данни, и получаваме:

$$v_p \approx 538 \text{ km/s}$$

Това, обаче, не е скоростта, с която планетата ще се сблъска с Вега. Вега се върти много бързо, а планетата се движи по орбитата си в посока, противоположна на въртенето на звездата около оста ѝ. Сблъсъкът се осъществява в атмосферата на

звездата. Затова планетата взаимодейства с веществото от атмосферата, което се движи срещу нея с линейна скорост, определена от скоростта на околоосно въртене на звездата. Да пресметнем линейната скорост на движение на точка от фотосферата на Вега. За целта разделяме дължината на екваториалната обиколка на Вега на периода на въртене:

$$v_{rot} = \frac{2\pi R_{Vega}}{T_{Vega}} = 274 \text{ km/s}$$

Виждаме, че линейната скорост, с която се върти атмосферата на Вега, е много голяма, по-голяма от скоростта на планетата в периастръра на елиптичната орбита. Относителната скорост на планетата спрямо атмосферата на Вега получаваме като съберем двете скорости. Събираме скоростите поради това, че планетата и атмосферата на звездата, в момента на сблъсък, се движат в противоположни посоки.

$$v = v_p + v_{rot} = 812 \text{ km/s}$$

Това е скоростта, при която се осъществява сблъсъкът на планетата със звездата. Тази скорост трябва да се използва при пресмятане на енергията, отделена при удара. Предполагаме, че цялата кинетична енергия се преобразува в друг вид енергии. Тогава отделената енергия е равна на кинетичната енергия на сблъсък:

$$E_k = \frac{m_J v^2}{2} \approx 6.23 \cdot 10^{38} \text{ J}$$

Светимостта на звездата получаваме от закона на Стефан-Болцман:

$$L_{Vega} = 4\pi\sigma R_{Vega}^2 T_{Vega}^4 \approx 1.97 \cdot 10^{28} \text{ W}$$

Можем да използваме и информацията от условието на задачата, че Вега има 40 пъти по-висока светимост от Слънцето и следователно $L_{Vega} = 40 L_s \approx 1.54 \times 10^{28} \text{ W}$.

Виждаме, че енергията отделена при сблъсък е приблизително 40000000000 (четиридесет милиарда) пъти по-голяма от енергията, която звездата излъчва за една секунда. Разбира се, тази енергия не се отделя за една секунда, но количеството ѝ е впечатляващо.

Това можеше да се очаква, защото едни от най-мощните процеси във Вселената, избухванията на свръхнови звезди, както и процесите ставащи в квазарите, всъщност се дължат на отделена кинетична енергия – в първия случай това е колапс на звезда (става дума за свръхнови звезди от II тип), а във втория е падане на големи количества вещество под действие на мощните гравитационни полета на свръхмасивни обекти.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правлен математически метод за определяне на скоростта на планетата в периастръй – 5 т.

За верен числен резултат – 1 т.

За определяне и отчитане на скоростта на въртене на повърхността на Вега – 4 т.

За правилен краен резултат за енергията – 1 т.

За пресмятане на светимостта на звездата – 2 т.

За сравнение и с енергията на планетата и извод – 2 т.

2 задача. Лунни спътници.

Решение:

1. Наблюдател на лунния полюс.

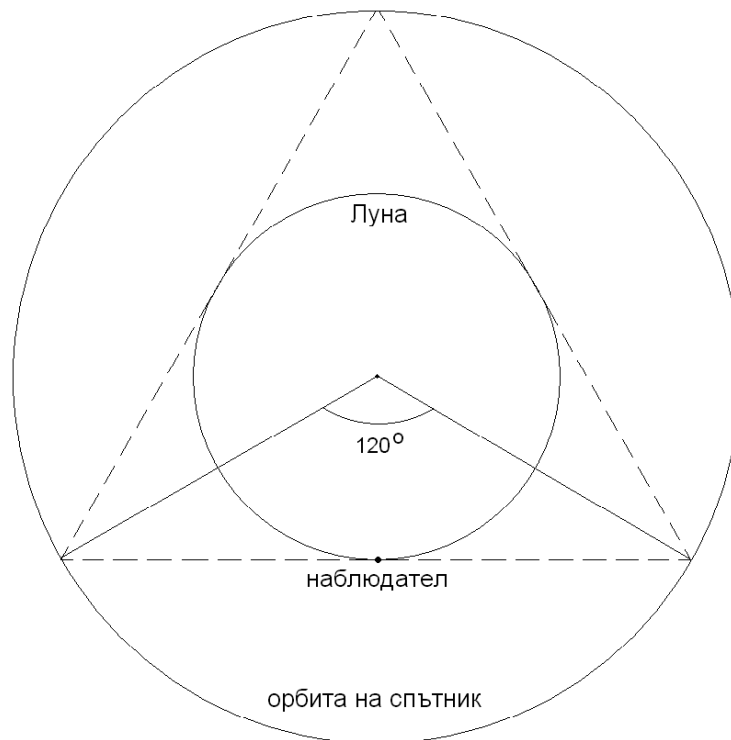
За да бъде една трета от орбитата на спътника над хоризонта, трябва централният ъгъл на този участък от орбитата да е 120° . Възможен е само един случай, при който радиусът на орбитата на спътника е два пъти по-голям от радиуса на Луната. В този случай фигурата на Луната се вписва в равностранен триъгълник, който от своя страна е вписан в орбитата на спътника (Фиг.1). Периодът на обикаляне на спътника може да се намери от формулата за кръгова скорост или от третия закон на Кеплер, като използваме масата и радиуса на Луната от справочните данни.

Според третия закон на Кеплер:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{\gamma M}{4\pi^2}$$

Следователно:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\gamma M}}$$



Фиг.1

Понеже радиусът на орбитата е два пъти по-голям от радиуса на Луната, след заместване на голямата полуос a с удвоения радиус на Луната, получаваме:

$$T = 4\pi R \sqrt{\frac{2R}{\gamma M}} = 18390^s = 5^h 06^m 30^s$$

2. Наблюдател на екватора.

Щом спътниците изгряват от изток или запад и залязват на запад или изток, като при това преминават през зенита на наблюдателя, то те се движат по екваториална орбита. Луната, макар и бавно, се върти около своята ос. Следователно, за наблюдател

на екватора на Луната, спътниците няма да се завъртат за един свой сидеричен период, а за един синодичен период, който е по-голям или по-малък, в зависимост от това дали спътникът се движи по посоката на въртене на Луната или в противоположна посока. Затова спътниците няма да залязват едновременно, а един след друг. За спътника движещ се в права посока синодичния период получаваме от уравнението:

$$\frac{1}{T_{Syn}} = \frac{1}{T_{Sid}} - \frac{1}{T},$$

$$T_{Syn} = \frac{T \cdot T_{Sid}}{T - T_{Sid}} = 5^h 08^m 54^s$$

За спътника движещ се в обратна посока:

$$\frac{1}{T'_{Syn}} = \frac{1}{T_{Sid}} + \frac{1}{T},$$

$$T'_{Syn} = \frac{T \cdot T_{Sid}}{T + T_{Sid}} = 5^h 04^m 08^s$$

Това са синодичните периоди на двата спътника за наблюдател на екватора. За да изминат една трета от орбитата си, в система свързана с наблюдателя на екватора, на спътниците ще е необходимо време равно на една трета от синодичния им период.

За спътника движещ се в права посока:

$$t = \frac{T_{Syn}}{3} = 1^h 42^m 58.1^s,$$

а за спътника, движещ се в обратна посока:

$$t' = \frac{T'_{Syn}}{3} = 1^h 41^m 22.6^s$$

Разликата между двете времена дава интервала от време между залеза на единия спътник и залеза на другия спътник. Първи ще залезе спътникът с по-кратък синодичен период. Това е спътникът движещ се обратно на въртенето на Луната. След него ще залезе спътникът движещ се в права посока. Интервалът между двата залеза е:

$$\Delta t = t - t' = 1^m 35.4^s = 95.5^s$$

Поради различната видима ъглова скорост, за наблюдател намиращ се в центъра на Луната и въртящ се с нея, спътниците до момента на срещата ще изминат различни дъги от видимата от повърхността на Луната част от орбитата. Отношението на дължините на тези дъги (l и l') е право пропорционално на отношението на видимите ъглови скорости, или обратно пропорционално на отношението на периодите на спътниците, както и на отношението на третините на тези периоди:

$$\frac{l}{l'} = \frac{T'}{T} = \frac{t'}{t},$$

Освен това сумата от дъгите е 120° :

$$l + l' = 120^\circ$$

Решаваме тази система уравнения относно l' и l и за разликата им получаваме:

$$l' - l = 120^\circ \left(\frac{t - t'}{t + t'} \right) = 56' 01'' .4 \approx 56'$$

Следователно по-бързият спътник от изгрева си до срещата ще измине дъга от 60° плюс $56' / 2 = 28'$, а по-бавният ще измине дъга от 60° минус $28'$. Това означава, че за наблюдател в центъра на Луната срещата на двата спътника ще се осъществи в точка, отстояща на $28'$ от зенита в посока запад. Но ние разглеждаме наблюдател на лунната повърхност, който се намира два пъти по-близо до орбитата на спътниците. Тъй като

Ъгълът е малък, може да приемем, че същата дъга от орбитата на спътниците наблюдателят от повърхността на Луната ще вижда под два пъти по-голям ъгъл. Следователно зенитното отстояние на точката на разминаване на двата спътника е:

$$z \approx 56' .$$

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилен начин на определяне на радиуса на орбитата и периода на полярния спътник – 2 т.

За верни числени резултати – 2 т.

За обяснение защо двата екваториални спътника няма да залязат едновременно – 1 т.

За правилен метод на пресмятане на разликата във времената на залез – 4 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За правилен метод за определяне на точката на срещата на спътниците – 3 т.

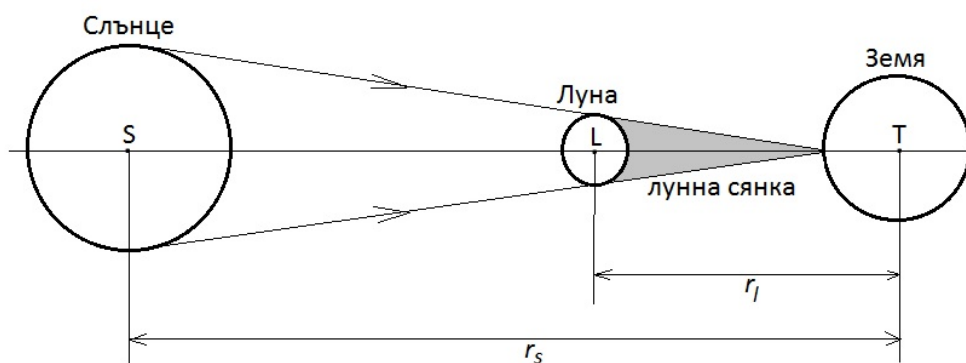
За верен числен резултат – 1 т.

За отчитане на факта, че наблюдателят е на повърхността, а не в центъра на Луната – 1 т.

3 задача. Затъмнение.

Решение:

Времетраенето на пълната фаза на едно слънчево затъмнение се определя от това с колко видимият ъглов размер на Луната превишава видимия ъглов размер на Слънцето. По друг начин казано, това е времето, за което лунната сянка преминава през наблюдателния пункт. Поради елиптичната форма на лунната орбита около Земята и на земната орбита около Слънцето, при различни случаи на слънчево затъмнение видимите ъглови размери на Слънцето и на Луната могат да са различни. Сянката на Луната има конусовидна форма. Ако пълната фаза на слънчевото затъмнение трае само миг, това означава, че върхът на конуса на лунната сянка се опира в земната повърхност. Схемата на затъмнението в този случай изглежда така:



За земен наблюдател видимите ъглови размери на Луната и Слънцето при такова затъмнение са еднакви. Наблюдателят е застанал на екватора, Слънцето и Луната за него са в зенита.

Да означим с r_s и r_l разстоянията от центъра на Земята до центровете на Слънцето и на Луната. Нека R_t , R_l и R_s са радиусите на Земята, Луната и Слънцето. Както се вижда от чертежа, в сила е следното съотношение:

$$R_l / R_s = (r_l - R_t) / (r_s - R_t)$$

Оттук намираме разстоянието между центровете на Земята и Луната:

$$r_l = (r_s R_l + R_t(R_s - R_l)) / R_s$$

$$r_l \approx 379\,900 \text{ км}$$

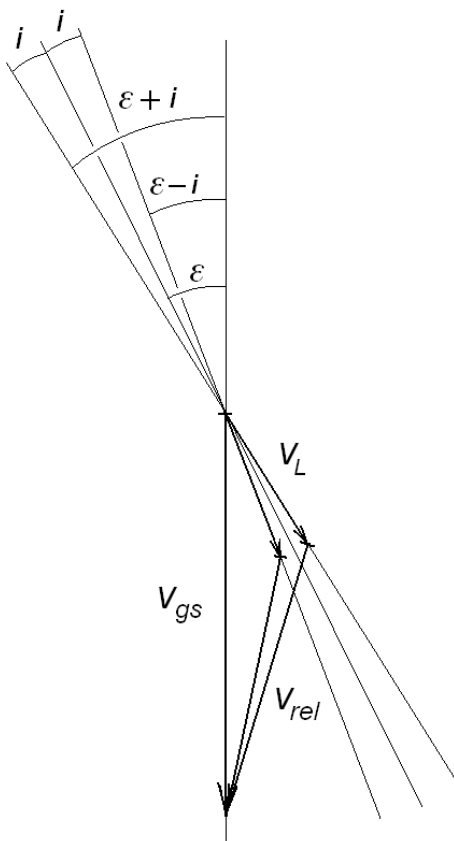
Да определим скоростите v_l и v_{gs} , с които се движат по орбитите си Луната и спътникът. Означаваме с T_l периода на обикаляне на Луната около Земята, а с $T_t = 23^h 56^m$ – периода на околоосно въртене на Земята (звездно денонощие), на който се равнява орбиталният период на геостационарния спътник. Така получаваме:

$$v_l = 2\pi r_l / T_l \approx 1.01 \text{ км / с}$$

$$v_{gs} = 2\pi r_{gs} / T_t \approx 3.07 \text{ км / с}$$

Орбитата на геостационарните спътници лежи в екваториалната равнина на Земята. Щом затъмнението е централно, за такъв спътник, и освен това е в зенита за наблюдател на екватора, то следователно Слънцето и Луната се намират също в екваториалната равнина на Земята. Това е възможно само по време на равноденствие – пролетно или есенно.

Луната се движи по орбита, която е наклонена относно еклиптиката на ъгъл $i = 5.15^\circ$. Движението на лунната сянка става в посока, която сключва ъгъл с екватора $\varepsilon + i$ или $\varepsilon - i$, в зависимост от това дали Луната е във възходящ възел на орбитата си или в нисходящ възел. Тук ε е наклонът на земния екватор към еклиптиката.



Слънцето също се движи, в система свързана със Земята, като линейната му скорост е равна на линейната скорост на Земята при движението ѝ по орбитата. Приносът на това движение е малък и сега ние ще го пренебрегнем.

От получените линейни скорости виждаме, че спътникът се движи приблизително три пъти по-бързо от Луната. Следователно той настига движещата се сянка на Луната и преминава през нея. Тъй като двете движения стават под ъгъл едно относно друго, то трябва да извадим векторно скоростите на спътника и лунната сянка, за да получим относителното им движение. Големината на относителната скорост на спътника за двата случая, възходящ и нисходящ възел, получаваме от косинусовата теорема:

$$v_{l \text{ rel}}^2 = v_{gs}^2 + v_l^2 - 2 v_l v_{gs} \cos(\varepsilon + i)$$

$$v_{l \text{ rel}} = 2.236 \text{ км/с}$$

$$v_{2 \text{ rel}}^2 = v_{gs}^2 + v_l^2 - 2 v_l v_{gs} \cos(\varepsilon - i)$$

$$v_{2 \text{ rel}} = 2.135 \text{ км/с}$$

Геостационарният спътник ще премине през по-широка част от лунната сянка и за наблюдател там пълната фаза на затъмнението няма да е само един миг. Тъй като видимият ъглов диаметър на Луната е много малък, за линейния диаметър d на лунната сянка на височината на геостационарната орбита можем да напишем следното приблизително съотношение:

$$d / 2R_t = (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

където r_{gs} е радиусът на орбитата на геостационарния спътник.

$$d = 2R_t (r_{gs} - R_t) / (r_l - R_t)$$

$$d \approx 333 \text{ км}$$

Времето, за което спътникът ще пресече сянката в двата случая ще бъде:

$$\Delta t = d / v_{rel}$$
$$\Delta t_1 \approx 149^s \approx 2^m 29^s$$
$$\Delta t_2 \approx 156^s \approx 2^m 36^s$$

Отчитането на движението на Слънцето, т.е. на Земята по нейната орбита, ще намали тези времена с около 4-5 секунди.

Критерии за оценяване (общо 15 т.):

За правилна представа за геометрията на затъмнението и схема – 2 т.

За правилен математически метод за определяне на разстоянието между Луната и Земята – 2 т.

За верен числен отговор – 1 т.

За обяснение по кое време на годината се случва затъмнението – 2 т.

За верен математически метод за намиране на продължителността на пълната фаза – 2 т.

За отчитане на движението на Луната и определяне на относителното движение на спътника спрямо сянката – 2 т.

За отчитане на наклона на екуатора към еклиптиката и наклона на лунната орбита – 2 т.

За разглеждане на двата възможни случая – 1 т.

За правилен числен отговор – 1 т.

Справочни данни:

Радиус на Слънцето	696000 km
Маса на Юпитер	1.89×10^{27} кг
Маса на Слънцето	1.99×10^{30} кг
Гравитационна константа	6.67×10^{-11} м ³ / кг.с ²
Константа на Стефан-Болцман	$\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ Вт / м ² К ⁴
Светимост на Слънцето	3.846×10^{26} Вт
Екваториален радиус на Земята	6378 km
Радиус на Луната	1738 km
Маса на Луната	7.35×10^{22} кг
Период на орбитално движение на Луната около Земята	27.32 денонощия
Наклон на лунната орбита към еклиптиката	5.15°
Наклон на земния екватор към еклиптиката	23.43°
Разстояние Земя – Слънце	149 600 000 km
Период на въртене на Земята около оста	23 ^h 56 ^m

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

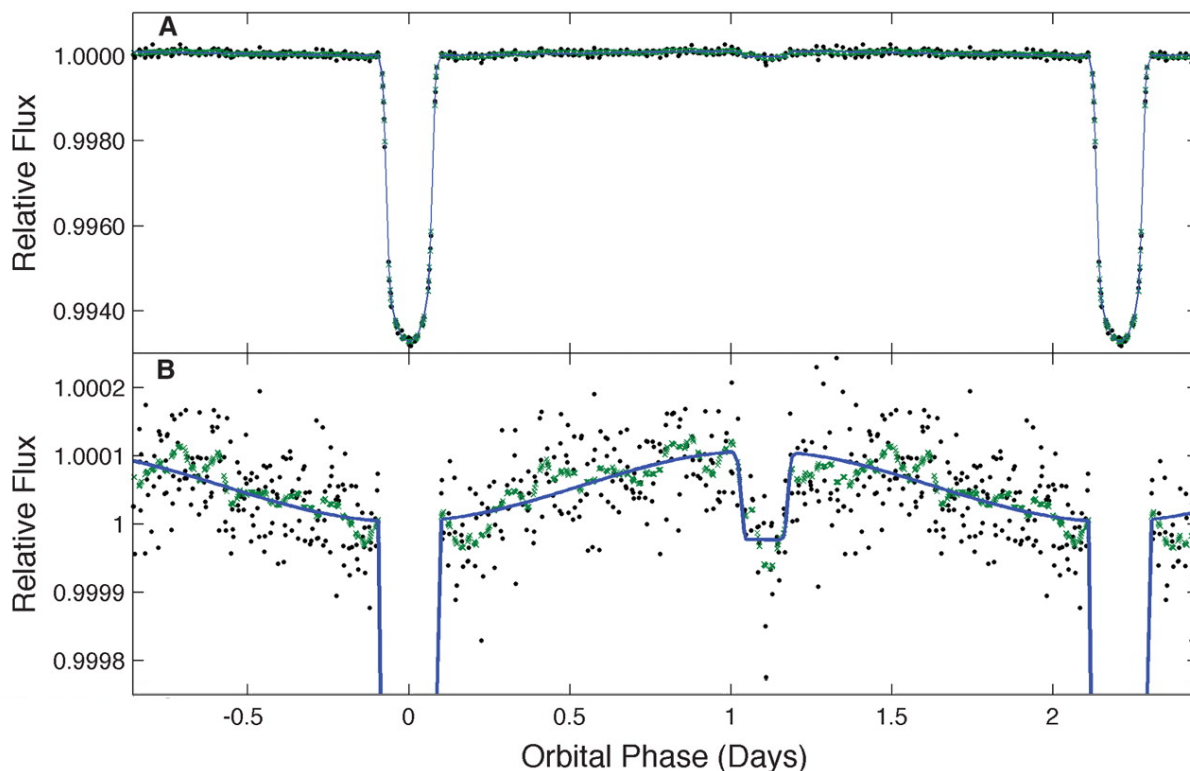
Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград

ТЕМА ЗА ВЪЗРАСТОВА ГРУПА – XI-XII КЛАС

ПРАКТИЧЕСКИ КРЪГ

Практическа задача. Планета около жълтобяло слънце. Звездата НАТ-R-7 е от спектрален клас F8 и има маса 1.47 слънчеви маси. По наблюдения, получени с космическия телескоп „Кеплер”, е установено, че около звездата обикаля планета гигант с радиус 1.36 пъти по-голям от радиуса на Юпитер. Планетната орбита е кръгова и зрителният лъч от земния наблюдател почти точно лежи в нейната равнина. Дадена ви е крива на блясъка на звездата. Главните минимуми в нея отразяват преминаванията на планетата по диска на звездата. Интересното в случая е, че има и вторични минимуми, съответстващи на закриването на планетата от звездата. В горната част (A) на диаграмата е дадена графика на изменение на блясъка на звездата. В долната част (B) е представена същата графика, но с увеличен вертикален мащаб. По абсцисата е нанесено времето в дни. По ординатата е нанесен потокът светлина (не звездна величина) в относителни единици.

- Като използвате диаграмата, определете радиуса на звездата. Радиусът на Юпитер е 70 000 км.
- Обяснете защо, както се вижда на диаграмата, преди вторичния минимум има нарастване на блясъка на системата звезда-планета, а след него – намаляване.
- Определете отражателната способност на планетата.



Предайте този лист заедно с писмената си работа на квесторите!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
XVII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

Национален кръг, 27 април 2014 г., Димитровград
Възрастова група XI-XII клас – практически кръг – решения

Практическа задача. Планета около жълтобяло слънце.

Решение:

Когато планетата минава пред диска на звездата, тя закрива част от нея и блясъкът на звездата леко намалява. Да означим с E_S осветеността, която звездата създава за земния наблюдател, когато не е закрита от планетата, а с E_{S1} – осветеността, създавана от звездата, когато е закрита от планетата – по време на главен минимум на блясъка. От горната графика чрез определене на мащаба на скалата определяме:

$$E_S \approx 1 \text{ относителна единица светлинен поток} \quad E_{S1} \approx 0.9932 \text{ отн.ед.}$$

Тези величини се отнасят приблизително както светещите площи на видимия звезден диск извън пасажа на планетата и по време на пасажа на планетата:

$$\frac{E_S}{E_{S1}} = \frac{\pi R_S^2}{\pi R_S^2 - \pi R_P^2} = \frac{R_S^2}{R_S^2 - R_P^2}$$

където R_S и R_P са радиусите на звездата и на планетата. За радиуса на звездата получаваме:

$$R_S = R_P \cdot \sqrt{\frac{E_S}{E_S - E_{S1}}} \approx 12.13 R_P \quad R_S \approx 1.154 \times 10^6 \text{ км}$$

Краят на преминаването на планетата по диска на звездата означава и край на главния минимум на кривата на блясъка. След този момент ние виждаме изцяло звездата и заедно с нея – планетата. Планетата е осветена от звездата и отразява част от тази светлина. При движението на планетата по нейната орбита около звездата, тя би трябвало да показва за нас различни фази, които все повече се доближават до пълната фаза. Ето защо общият блясък на системата звезда – планета трябва леко да нараства и това се вижда по кривата на блясъка с увеличения вертикален мащаб, представена на долната диаграма В. После планетата навлиза зад видимия диск на звездата и настъпва вторичния минимум. Спадането на блясъка след вторичния минимум се обяснява аналогично с изменящата се фаза на планетата, но в обратен ред.

Малко преди началото на вторичния минимум до нас идва светлина от целия незащитен видим диск на звездата и от незащитения диск на планетата, която е почти в пълна фаза – почти изцяло обърната към нас с осветената си страна. Тогава, осветеността, която се създава за земния наблюдател, ще бъде:

$$E_{S+P} = E_S + E_P,$$

където E_P е осветеността, идваща от огрялата страна на планетата. По време на вторичния минимум планетата е закрита и получаваме светлина само от звездата. Тогава осветеността е E_S , също както и в моментите малко преди началото и малко след края на главния минимум. На диаграмата В кривата е прекарана доста неточно и има разлика между тези две нива, но ако се вгледаме в експерименталните точки ще видим, че при по-правлно прекарване на кривата няма да има разлика. Това налага лека корекция в стойността на E_S , която ще използваме оттук нататък: $E_S \approx 0.99998$ отн.ед. По диаграмата измерваме увеличаването на блясъка в моментите малко преди и след вторичния минимум и получаваме: $E_{S+P} \approx 1.00009$ отн.ед.

Трябва да пресметнем осветеността, която звездата създава върху планетата. За целта е необходимо да знаем какво е разстоянието между двете тела. Видът на графиката свидетелства, че орбитата на планетата е кръгова. По скалата за времето на горната графика А измерваме интервала между двата главни минимума и така определяме орбиталния период на планетата:

$$T \approx 2.11 \text{ денонощия} \approx 0.00577 \text{ години}$$

Превръщаме периода в години, за да работим с удобната форма на III закон на Кеплер:

$$\frac{r^3}{T^2} = M$$

където r радиусът на планетната орбита в астрономически единици, T е орбиталният период в години, а M е масата на звездата в слънчеви маси. Оттук получаваме:

$$r = \sqrt[3]{MT^2}$$

$$r \approx 0.0365 \text{ AU} \approx 5.47 \times 10^6 \text{ км}$$

Осветеността, която звездата създава върху планетата, ще бъде:

$$E_{SP} = \frac{L}{4\pi r^2}$$

където L е светимостта на звездата. Общата светлинна енергия, попадаща върху планетата, ще бъде:

$$W = E_{SP} \cdot \pi R_P^2$$

Осветеността, създавана от планетата за земния наблюдател, ще бъде:

$$E_T = \frac{AW}{2\pi r_0^2}$$

където A е частта от светлината, отразявана от планетата, или нейната отразителна способност, а r_0 е разстоянието от нас до планетата (или все едно до звездата). В знаменателя коефициентът е 2, а не 4, защото приемаме планетата за диск, който отразява и разсейва светлина само в половината пространство с огряната си от звездата страна. Използвайки последните три уравнения, получаваме:

$$E_T = A \cdot \frac{L}{4\pi r^2} \cdot \pi R_P^2 \cdot \frac{1}{2\pi r_0^2}$$

Ние не знаем светимостта на звездата и разстоянието до нея, но можем да преобразуваме този израз така:

$$E_P = A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2} \cdot \frac{L}{4\pi r_0^2}$$

Всъщност обаче:

$$\frac{L}{4\pi r_0^2} = F_S$$

Така получаваме:

$$E_P = A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2} \cdot F_S$$

По-нататък пресмятаме:

$$\frac{E_{S+P}}{E_S} = \frac{E_S + E_P}{E_S} = 1 + \frac{E_P}{E_S}$$

$$\frac{E_{S+P}}{E_S} = 1 + A \cdot \frac{R_P^2}{2r^2}$$

Накрая за отразителната способност на планетата намираме:

$$A = \frac{2r^2}{R_P^2} \cdot \left(\frac{E_{S+P}}{E_S} - 1 \right) \quad A \approx 0.7$$

Според нашата оценка планетата отразява около 70% от светлината на звездата. Поради невъзможността да се направят точни измервания по графиките, оценките могат значително да варират в различните решения.

В действителност голяма част от блясъка на планетата се дължи не на отражение на светлината. Планетата поглъща лъчението на звездата, нагрява се от него до много висока температура и преизлъчва погълнатата енергия. Реалната отразителна способност на планетата е много по-малка.

Критерии за оценяване (общо 20 т.):

За правилен математически метод за определяне на радиуса на звездата – 2 т.

За измервания и определяне на величини по графиката – 1 т.

За пресмятания и верен числен резултат – 2 т.

За обяснение на вида на графиката – 3 т.

За правилен математически метод за определяне на общата светлинна енергия, получена от планетата – 3 т.

За определяне на радиуса на планетната орбита – 2 т.

За правилен математически метод за определяне на отразителната способност на планетата – 4 т.

За измервания и определяне на величини по графиката – 2 т.

За правилен числен резултат – 1 т.