Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 1 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Вчера имахме празник на буквите. Утре ще ходим на екскурзия. Ще се върнем на следващия ден – във вторник. В кой ден от седмицата беше празникът на буквите?

A) четвъртък **B)** петък **C)** събота **D)** неделя **E)** понеделник

2. Влади избрал четири числа измежду 4, 5, 6, 9 и 11, след което поставил по едно от избраните числа във всяко квадратче. Оказало се, че двата сбора са равни. Кое число не е избрал Влади?

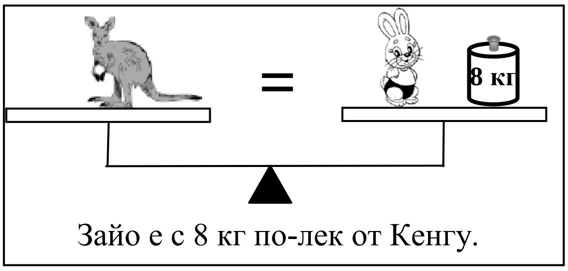
$$\square + \square = \square + \square$$

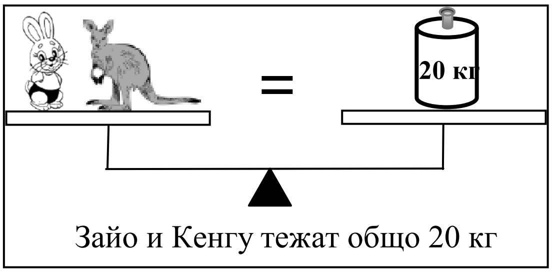
A) 4 **B)** 5 **C)** 6 **D)** 9 **E)** 11

3. Ани имала 7 лентички, всяка с дължина 20 сантиметра. Тя срязала всяка от тях на две части по 10 сантиметра. След това някои от получените лентички отново срязала на две части по 5 см. Получила общо 19 лентички. Колко лентички с дължина 10 см е имала Ани накрая?

A) 14 **B)** 12 **C)** 10 **D)** 9 **E)** 6

4.





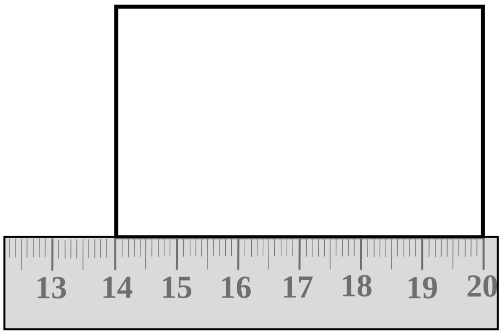
Колко тежи Зайо?

A) 6 кг **B)** 7 кг **C)** 8 кг **D)** 10 кг **E)** 12 кг

5. Иво има 12 колички, а Боби има 16. Иво дал на Тони няколко от своите колички. Тони взел от Боби толкова колички, колкото са останали на Иво. Колко колички общо е получил Тони от двамата си приятели?

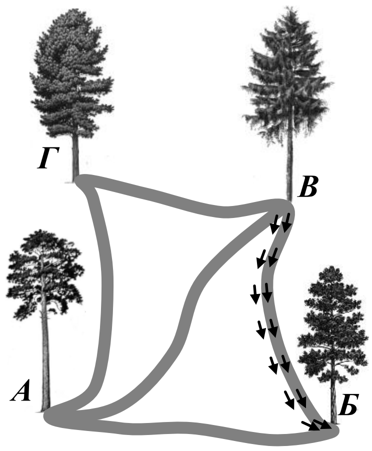
A) 28 **B)** 16 **C)** 14 **D)** 12 **E)** 4

6. Дължината на правоъгълника е с 2 сантиметра по-голяма от широчината му. Ели поставила линийката, както е показано на картинката, за да измери дължината на правоъгълника. На колко сантиметра е равна широчината?



7. Жорко бяга всяка сутрин в парка с четирите бора. Той минава по веднъж по всяка от показаните пътечки. По пътечката между бор ***Б*** и бор ***В*** Жорко винаги бяга в посока от ***В*** към ***Б***.

Например, ако тръгва от А, той може да бяга така: $\boldsymbol{А \to В \to Б \to А \to Г \to В}$.



Напишете останалите начини, по които може да бяга Жорко.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

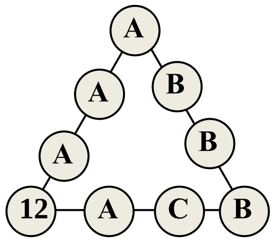
7 юни 2014 г.

ТЕМА за 2 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. На фигурата на еднаквите букви отговарят еднакви числа. Ако сборът на числата върху всяка от страните на триъгълника е равен на 30, на колко е равно **A + C . B**?



A) 80 **B)** 38 **C)** 42 **D)** 25 **E)** 18

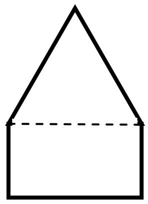
2. Ани написала всички двуцифрени числа с произведение на цифрите им, равно на 12. Колко е сборът от цифрите на единиците на тези числа?

A) 5 **B)** 7 **C)** 8 **D)** 10 **E)** 15

3. Асен, Боби, Веско и Гого решили общо 18 задачи, като всеки от тях решил повече от 2 задачи и никои двама не са решили един и същ брой задачи. Асен и Боби решили толкова задачи, колкото Веско и Гого. Асен решил най-много задачи, а Гого решил по-малко задачи от Веско. Колко задачи общо са решили Асен и Гого?

A) 8 **B)** 9 **C)** 10 **D)** 11 **E)** 12

4. На чертежа фигурата, начертана с плътна линия, е съставена от правоъгълник и равностранен триъгълник. Обиколката на правоъгълника е с 10 см по-малка от обиколката на фигурата. Ако страната на триъгълника е с 3 см по-голяма от широчината на правоъгълника, обиколката на фигурата е равна на:



A) 19 см **B)** 41 см **C)** 44 см **D)** 56 см **E)** 64 см

5. Ива имала 5 лентички, всяка с дължина 42 сантиметра. Тя срязала всяка от тях на седем равни части по 6 см. След това някои от получените лентички срязала на три равни части по 2 см и получила общо 47 лентички. Колко лентички с дължина 6 см е имала Ива накрая?

A) 12 **B)** 17 **C)** 29 **D)** 31 **E)** 35

6. Таня, Пепи и Мими са на различна възраст, като Таня е най-малка, а Мими е най-голяма. Сборът от годините на трите сега е 28. Когато Таня е била на 5 годинки, сборът от годините на трите е бил 19. На колко години е Пепи сега?

7. В сладкарница „Ру" на една маса поръчали 3 пасти и 2 сока, на втора маса поръчали 2 пасти и 4 сока, а на трета – 5 пасти и 7 сока. Сметката на първата маса била колкото сметката на втората и с 18 лв. по-малко, отколкото сметката на третата маса. Колко лева е била сметката на третата маса?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 3 – 4 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Броят на годините на Иван е равен на броя на месеците, на които е неговото куче, а сборът от месеците им е 208. Кучето на Иван е на:

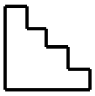
A) 13 месеца **B)** 16 месеца **C)** 18 месеца **D)** 124 месеца **E)** 192 месеца

2. Кофа, пълна с вода, тежи 16 кг, а когато кончето Вихър изпие четвъртинката от водата в нея, тя ще тежи 12 кг и 200 г. Колко грама тежи празната кофа?

A) 4000 **B)** 3800 **C)** 3050 **D)** 800 **E)** 200

3. Колко са трицифрените числа, цифрата на единиците на които е равна на произведението от другите им две цифри?

A) 33 **B)** 32 **C)** 27 **D)** 23 **E)** 22

4. Стълбичката  е получена, като от квадрат със страна 4 см са изрязани 6 квадратчета със страна 1 см. Ако фигурата на чертежа се състои от 104 такива стълбички, нейната обиколка е:

A) 832 см **B)** 848 см **C)** 1458 см **D)** 1466 см **E)** 1472 см

5. За куклената постановка „Роботът Ян“ на касата на театъра има следната обява:

1. Цена на един билет – 8 лв.
2. Цена на групов билет за 12 души – 82 лв.
3. При покупка на 17 билета по 8 лв. получавате 5 билета безплатно.

Ако на теб и твоите приятели ви трябват 37 билета, колко лева най-малко трябва да заплатите?

A) 228 **B)** 242 **C)** 246 **D)** 254 **E)** 296

6. Учителката се обърнала към Иван и Петър: “Намислете си по едно число, прибавете 5 или разделете числото на 2, ако е възможно делението. Направете същото с полученото число и продължете нататък с новите числа по същия начин.“ Иван и Петър приложили точно по три пъти всяко от двете действия. Крайният резултат и на двамата било числото 75. Ако знаете, че числото, намислено от Иван, е възможно най-малкото, от което след тези шест действия се получава 75, а числото, намислено от Петър, е възможно най-голямото, намерете сумата двете намислени числа.

7. Пет празни кутии са подредени в редица и са номерирани последователно с номерата от 1 до 5. Роботът на Симеон е програмиран да пуска едновременно по едно топче в две съседни кутии. Роботът пуснал общо 2014 топчета, като във всяка кутия пуснал поне едно топче. Колко е сборът на топчетата в кутиите с четни номера? Ако в кутия номер 2 има със 7 топчета повече, отколкото в кутия номер 4, а в кутия номер 1 има четири пъти по-малко топчета, отколкото в кутия номер 4 и два пъти по-малко топчета, отколкото в кутия номер 5, намерете броя на топчетата във всяка кутия.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 5 – 6 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Да се намери броят на шестцифрените числа, по-големи от 310 000, които са записани с цифрите 0, 1, 2, 3, 4 и 5 без повторение.

А) 600 **В)** 264 **С)** 336 **D)** 250 **Е)** 360

2. Естествените числа от 1 до 100 за записани в редове така:

1 2 3 ....98 99 100
1 2 3 ....98 99 100
....

Тони започва да брои числата от първия ред отляво надясно, продължава с числата от втория ред отдясно наляво, след това с числата от третия ред пак отляво надясно и така нататък. Да се намери 1123-ото поред число при това броене.

А) 22 **В)** 51 **С)** 23 **D)** 78 **Е)** 76

3. В края на първия срок Кико и Боби имали равен брой отсъствия. В края на учебната година Кико увеличил броя на отсъствията си 4 пъти, а Боби – x пъти. Таблицата показва какъв процент от отсъствията са неизвинени. Да се намери x.

	Кико	Боби	общо за двамата
първи срок	20%	15%	$a\,\%$
година	10%	30%	$a\,\%$

А) $3,6$ **В)** 3 **С)** 2 **D)** $0,25$ **Е)** 2,4

4. Сумата $\frac{1}{24}+\frac{1}{40}+\frac{1}{60}+\frac{1}{84}+\frac{1}{112}+\frac{1}{144}+\frac{1}{180}+\frac{1}{220}+\frac{1}{264}+\frac{1}{312}+\frac{1}{364}$ е равна на:

А) $\frac{17}{364}$ **В)** $\frac{1}{2014}$ **С)** $\frac{1}{8}$ **D)** $\frac{11}{84}$ **Е)** $\frac{1}{4}$

5. Четири естествени числа са събрани по двойки по всички възможни начини и са получени сумите 8, 9, 12, 15, 18 и 19. Да се намери сборът на най-малкото и най-голямото число.

А) 12 **В)** 15 **С)** 18 **D)** 19 **Е)** 27

6. Когато Иван се родил, годините на сестра му били 25% от годините на майка му. Сега годините на Иван са $\frac{1}{4}$ от годините на майка му, а сестра му е три пъти по-малка от баща му. Ако след 9 години Иван ще е три пъти по-малък от баща си, намерете на колко години е сестра му сега.

7. Точките P и Q са съответно от страните BC и AC на триъгълник ABC, като $AQ=\frac{1}{4}QC$ и $BP=\frac{2}{3}PC$. Ако AP и BQ се пресичат в точка O и $S_{QOPC}=\frac{p}{q}S_{ABC}$, където $\frac{p}{q}$ е несъкратима дроб, да се намери $p+q$.

Национален кръг на "Европейско Кенгуру"

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 7 – 8 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Ще наричаме едно число „съвсем четно", ако всичките му цифри са четни. Колко са трицифрените „съвсем четни" числа, които са кратни на 3?

A) 30 **B)** 31 **C)** 32 **D)** 33 **E)** повече от 33

2. Върху хипотенузата AB на правоъгълен ΔABC е построен квадрат с пресечна точка на диагоналите O така, че точките O и C са в различни полуравнини относно AB. Правата CO пресича страната AB в точка K. Ако $BC : AC = 5 : 3$, то отношението $AK : BK$ е равно на:

A) $5:3$ **B)** $7:9$ **C)** $2:3$ **D)** $3:5$ **E)** $3:2$

3. За четири различни естествени числа a, b, c и d е съставена таблица за събиране с 16 клетки (4×4). Най-много колко прости числа могат да са записани в празните клетки на таблицата?

+	a	b	c	d
a				
b				
c				
d				

A) 7 **B)** 8 **C)** 9 **D)** 10 **E)** 11

4. В изпъкналия четириъгълник $ABCD$ точката E е средата на CD, точката F е средата на AD, а отсечките AC и BE се пресичат в точка K. Ако лицето на триъгълника ABC е 24 cm^2, то лицето на триъгълника BKF е:

A) 10 cm^2 **B)** 12 cm^2 **C)** 14 cm^2 **D)** 16 cm^2 **E)** 18 cm^2

5. За всяка тройка естествени числа дефинираме операцията $\lozenge$ чрез тъждествата $x\lozenge(y\lozenge z)=(x\lozenge y)+z$ и $x\lozenge(x\lozenge y)=y$. На колко е равно $2014\lozenge1949$?

A) 3963 **B)** 2014 **C)** 1949 **D)** 65 **E)** 0

6. Нека n е естествено число и $s(n)$ е сборът от цифрите на това число. Решете уравнението

$$n+s(n)+s(s(n))+s(s(s(n)))=2014.$$

7. Дадени са 2014 различни ненулеви числа $a_1, a_2, ..., a_{2014}$, както и произведенията на всички двойки съседни числа $a_1.a_2,\ a_2.a_3, ..., a_{2013}.a_{2014}$. Намерете възможно най-големия брой отрицателни числа измежду дадените 4027 числа.

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 9 – 10 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Всички стойности на x, които удовлетворяват равенството

$$\sqrt{x^2+y^2+4x+4}+\sqrt{x^2+y^2+5-4x-2y}=\sqrt{17} \quad \text{при } y=\frac{x+2}{4}, \text{ са:}$$

A) $x=-2$ **B)** $x=2$ **C)** $x=\pm 2$ **D)** $x\in[-2;2]$ **E)** $x\in\varnothing$

2. Дадени са 2014 летви с дължини $2, 2^2, 2^3, \ldots, 2^{2014}$. Колко триъгълника най-много могат да се образуват, ако всяка страна на триъгълник е някоя от летвите?

A) 0 **B)** 1 **C)** 671 **D)** 1007 **E)** 3021

3. По колко начина може да се изплати сума от 100 стотинки с монети от една стотинка, две стотинки или 5 стотинки?

A) 2014 **B)** 1007 **C)** 541 **D)** 490 **E)** 146

4. Намерете броя на трицифрените числа, които са равни на сбора от факториелите на цифрите си.

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Ъглите, които страните AB, BC, CD и DA на изпъкнал четириъгълник $ABCD$ образуват с диагонала му AC, са равни съответно на 16°, 19°, 55°, 55°. Ако $ABCD$ няма успоредни страни, намерете колко градуса е ъгълът между диагоналите AC и BD.

A) 71° **B)** 74° **C)** 85° **D)** 87° **E)** 90°

6. В изпъкнал четириъгълник $ABCD$ диагоналите се пресичат в точка O, като $BC>AB>OB$. За ΔOBC е известно, че $OC=\sqrt{7}-1$, $\cos\angle OBC=\dfrac{\sqrt{7}+1}{4}$ и периметърът му е $2\sqrt{7}+4$. Ако в четириъгълника може да се впише окръжност, да се намери дължината на страната CD.

7. Ако x, y, z са реални числа от интервала $[0;1]$, да се докаже неравенството $\dfrac{3x+y}{16+y^6+z^6}+\dfrac{3y+z}{16+z^6+x^6}+\dfrac{3z+y}{16+x^6+y^6}\le\dfrac{2}{3}$. Кога се достига равенство?

Национален кръг на “Европейско Кенгуру”

7 юни 2014 г.

ТЕМА за 11 – 12 клас

Първите 5 задачи са с избираем отговор. След всяка от тях има посочени 5 отговора, от които само един е верен. Шестата задача е със свободен отговор, а за седмата трябва да се опише решението. За даден верен отговор на първите 6 задачи се присъждат 5 точки. Седмата задача се оценява с 0–10 точки. Не се разрешава ползването на калкулатори или таблици.

ВРЕМЕ ЗА РАБОТА: 75 минути. Пожелаваме Ви успех!

1. Колко прости делителя има числото $51.63.69+320$?

A) 3 **B)** 4 **C)** 5 **D)** 6 **E)** повече от 6

2. Ако $\sin(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+2=0$, пресметнете стойността на $\sin(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$.

A) 0 **B)** $\frac{1}{2}$ **C)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **D)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **E)** $\sqrt{3}$

3. Да се пресметне $7^{\sqrt{\log_7 11}}-11^{\sqrt{\log_{11} 7}}$.

A) -1 **B)** 0 **C)** 1 **D)** 2 **E)** 77

4. Да се намери броят на целите числа, които са решения на неравенството

$$(x^2+x)(x^2+x+3)<4.$$

A) 0 **B)** 1 **C)** 2 **D)** 3 **E)** повече от 3

5. Равнобедрен триъгълник с ъгъл 120^0 е завъртян около височината към основата. Да се намери обемът на получения конус, ако максималното лице на сеченията през върха му е равно на 6.

A) $2\sqrt{2}\pi$ **B)** $\frac{8}{3}\sqrt{3}\pi$ **C)** $2\frac{\sqrt{2}}{3}\pi$ **D)** $3\sqrt{3}\pi$ **E)** $\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$

6. Даден е ΔABC, в който $\angle ACB=2\angle BAC$. Нека *a, b* и *c* са дължините съответно на страните BC, AC и AB. Числата *a, b* и *c* са естествени и по-големи от 1, а *b* е просто число. Да се намери възможно най-малката стойност на *b*.

7. Нека $\mathbb{N}$ е множеството на естествените числа, а $\mathbb{N}^*=\mathbb{N}\cup\{0\}$ е множеството на естествените числа и нулата. Да се докаже, че не съществува функция $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}^*$ със следните свойства:

1. ако $m, n\in\mathbb{N}$ и $m\neq n$, то $f(m)\neq f(n)$;
2. ако $p\in\mathbb{N}^*$, то съществува $m\in\mathbb{N}$ така, че $f(m)=p$;
3. ако $m, n\in\mathbb{N}$, то $f(mn)=f(m)+f(n)+3f(m)f(n)$.

	1 клас	2 клас	3-4 клас	5-6 клас	7-8 клас	9-10 клас	11-12 клас
1 задача	C	B	B	C	D	D	A
2 задача	B	E	D	D	D	A	A
3 задача	D	C	B	E	C	C	B
4 задача	A	C	C	D	B	B	C
5 задача	D	C	B	A	D	D	D
6 задача	4	9	1065	14	1984 2002	4	5

С Е Д М А З А Д А Ч А

(1. клас). Забелязваме, че от боровете А и В излизат по 3 пътечки. Това означава, че всеки маршрут на Жорко трябва да започва от А и да завършва във В или обратно – да започва от В и да завършва в А. В противен случай на всяко влизане при А трябва да отговаря излизане от А, както и на всяко влизане при В трябва да отговаря излизане от В, което би означавало, че пътечките при тези два бора са четен брой. Възможните маршрути са общо 6 и те са показани по-долу:

$\boldsymbol{А \to В \to Б \to А \to Г \to В}$ това е даденият пример
$\boldsymbol{А \to Г \to В \to Б \to А \to В}$

$\boldsymbol{В \to Б \to А \to В \to Г \to А}$
$\boldsymbol{В \to Г \to А \to В \to Б \to А}$

$\boldsymbol{В \to Б \to А \to Г \to В \to А}$
$\boldsymbol{В \to А \to Г \to В \to Б \to А}$

За всеки от петте случая (шестият фигурира в условието на задачата) – по **2 т.**

(2. клас). От условието, че 3 пасти и 2 сока струват колкото 2 пасти и 4 сока, следва, че 1 паста струва колкото 2 сока. **(2 т.)** На първата маса са платили с 18 лв. по-малко от третата, защото са поръчали с 2 пасти и 5 сока по-малко. **(2 т.)** Но 2 пасти и 5 сока струват колкото $2.2+5=9$ сока **(2 т.)** и следователно 1 сок струва $18:9=2$ лв., а една паста струва 4 лв. **(2 т.)**. За сметката на трета маса получаваме $5.4+7.2=20+14=34$ лв. **(2 т.)**

(3.-4. клас). Ако в кутия 1 има *a* топчета, можем да считаме, че в кутия 2 има *a*+*b* топчета. Тогава можем да считаме, че в кутия 3 има *b*+*c* топчета и оттук, че в кутия 4 има *c*+*p* топчета. Заключаваме, че в кутия 5 има точно *p* топчета. Така получаваме че сумата на топчетата в кутии 2 и 4 е $(a+b)+(c+p)$, а в кутии 1, 3 и 5 – съответно $a+(b+c)+p=(a+b)+(c+p)$. Следователно сборът на топчетата в кутиите с четни и нечетни номера е един и същ и топчетата в кутиите с четни номера е $2014:2=1007$. **(5 т.)** От условието на задачата следва, че в кутия 2 има $(1007+7):2=1014:2=507$ топчета и топчетата в кутия 4 остава да са $1007-507=500$. **(2 т.)** Пак от условието намираме, че топчетата в кутия 1 са $500:4=125$, а в кутия 5 топчетата са $125.2=250$. **(2 т.)** Накрая, за топчетата в кутия 3 намираме, че са $1007-125-250=632$. **(1 т.)**

(5.-6. клас). Отг. 101. Да означим $S_{AOQ}=x$ и $S_{OBP}=2y$. Тогава $S_{QOC}=4x$ и $S_{OPC}=3y$. От $S_{APC}=5x+3y=\frac{3}{5}S_{ABC}$ **(3т.)** и $S_{QBC}=4x+5y=\frac{4}{5}S_{ABC}$ **(3 т.)** следва, че $8x=3y$ **(1т.)**, $x=\frac{3}{65}S_{ABC}$ и $y=\frac{8}{65}S_{ABC}$ **(1 т.)**. Тогава

$$S_{QOPC}=4x+3y=\frac{36}{65}S_{ABC}$$ **(1 т.)** и $p+q=36+65=101$**(1 т.)**.

(7.-8. клас). Да разгледаме следните тройки числа

$$\left(a_1,\ a_2,\ a_1.a_2\right),\ \left(a_3,\ a_4,\ a_3.a_4\right),\dots,\left(a_{2013},\ a_{2014},\ a_{2013}.a_{2014}\right).$$ **(3 т.)**

Броят на тройките е 1007. **(1 т.)** Произведението на трите числа във всяка тройка е положително. Следователно във всяка тройка поне едно от числата в нея е положително. Тъй като няма число, което да е включено в повече от една от изброените тройки, то положителните числа сред дадените са не по-малко от 1007. **(2 т.)** Ще покажем, че е възможно положителните числа да са точно 1007. Нека числата с четни номера са отрицателни, а тези с нечетни – положителни. Тогава всяко от произведенията $a_1.a_2,\ a_2.a_3,\dots,a_{2013}.a_{2014}$ ще е отрицателно и положителни ще бъдат точно 1007 числа измежду дадените. Получаваме, че отрицателните числа са 3020 и това е отговорът на задачата. **(4 т.)**

(9.-10. клас). Да преработим всеки от знаменателите, като използваме неравенството между средното аритметично и средното геометрично и условието, че числата са по малки от едно:

$$16+y^6+z^6 \ge 15+x^6+y^6+z^6 = 5+x^6+5+y^6+5+z^6 \ge$$
$$\ge 6\sqrt[6]{x^6.1.1.1.1.1}+6\sqrt[6]{y^6.1.1.1.1.1}+6\sqrt[6]{z^6.1.1.1.1.1}=6(x+y+z).$$

Така получаваме еднакви знаменатели **(6 т.)** и за лявата страна на неравенството имаме

$$\frac{3x+y}{16+y^6+z^6}+\frac{3y+z}{16+z^6+x^6}+\frac{3z+y}{16+x^6+y^6} \le \frac{3x+y}{6(x+y+z)}+\frac{3y+z}{6(y+z+x)}+\frac{3z+y}{6(z+x+y)}=\frac{2}{3}$$ **(2 т.)**

Равенство се достига при $x=y=z=1$ **(2 т.)**

(11.-12. клас). Да допуснем, че такава функция съществува. От 3. следва:
$3f(mn)+1=3f(m)+3f(n)+9f(m)f(n)+1=(3f(m)+1)(3f(n)+1)$. **(2 т.)**

Нека $g(n)=3f(n)+1$. **(1 т.)** Ако $m=n=1$, от 3. заключаваме, че $f(1)=2f(1)+3f^2(1)$ и оттук $f(1)=0$. Тогава $g(1)=1$. Ако $F=\{1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13,\ 16,\dots\}$ от свойствата на f следва, че $g:\mathbb{N}\to F$ със следните свойства:

1. ако $m,\ n\in\mathbb{N}$ и $m\neq n$, то $g(m)\neq g(n)$;
2. ако $p\in F$, то съществува $m\in\mathbb{N}$ така, че $g(m)=p$;
3. ако $m,\ n\in\mathbb{N}$, то $g(mn)=g(m)g(n)$;
4. $g(1)=1$.

(1 т.)

Тъй като $10\in F$, съществува $m\in\mathbb{N}$ така, че $g(m)=10$. Ще докажем, че m е просто число. Нека $m=ab$. Тогава $g(m)=g(ab)=g(a)g(b)=10=2.5=1.10$. Но $2,5\notin F$ и следователно единствената възможност е $g(a)g(b)=1.10$, т.е. $g(a)=1$ или $g(b)=1$. От 4. следва, че $a=1$ или $b=1$, т.е. наистина m е просто число. **(3 т.)** Да разгледаме понататък числата 22, 55 и 121. Те са от вида $3k+1$ и следователно принадлежат на F. Заключаваме, че съществуват n, q и r така, че $g(n)=22$, $g(q)=55$ и $g(r)=121$. Както и по-горе, можем да докажем, че n, q и r са прости числа. От друга страна $22.55=10.121$ и следователно $n.q=m.r$. Последното е невъзможно, защото противоречи на единствеността на разлагането на естествените числа в произведение от прости множители. **(3 т.)**