МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

15 – 16 МАРТ 2014 г., САНДАНСКИ

Тема 7. клас

Задача 1. Когато към източник на напрежение се свърже консуматор 1, през него протича ток $I_1 = 3\,\mathrm{A}$, а когато се свърже консуматор 2 – токът през него е $I_2 = 2\,\mathrm{A}$.

а) Намерете тока I' във веригата, когато двата консуматора са свързани успоредно и включени към същия източник на напрежение. (4 т.)

б) На колко е равен токът I'' във веригата, когато консуматорите са свързани последователно и са включени към източника. (6 т.)

Задача 2. Два резистора със съпротивления съответно $R = 6\,\Omega$ и $R_1 = 4\,\Omega$ са свързани последователно и са включени към източник с напрежение $U = 9\,\mathrm{V}$. Мощността на резистора 1, чието съпротивление е R_1, е P_1. Ако резисторът 1 се замени с резистор 2, чието съпротивление е R_2, неговата мощност ще бъде P_2.

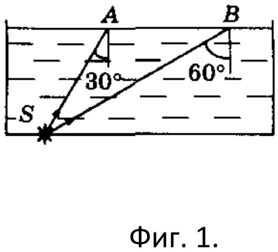
а) Пресметнете мощността P_1. (4 т.)

б) На колко е равно съпротивлението R_2, ако неговата мощност P_2 съвпада с мощността P_1? (3 т.)

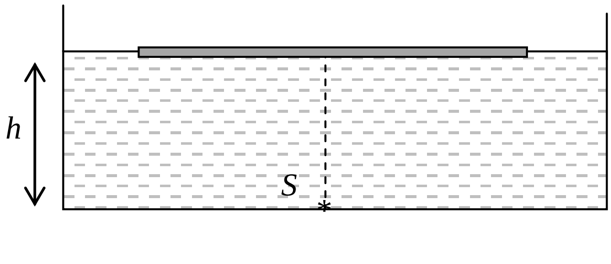
в) Намерете общата мощност P_0 на резисторите 1 и 2, когато те са свързани успоредно, и са включени към източника с напрежение U. (3 т.)

Задача 3. А) Точков светлинен източник S се намира на дъното на тънък стъклен съд, в който е налята вода. На фиг. 1 са показани два лъча от източника на светлина, които падат съответно в точките A и B от разделителната повърхност вода–въздух. Начертайте и обяснете по-нататъшния ход на лъчите. (6 т.)

Б) На дъното на съд, напълнен с вода до височина h, се намира точков източник на светлина. На повърхността на водата плава кръгъл диск, така че центърът му се намира над източника на светлина. Чрез построение намерете най-малкия възможен радиус на диска, при който нито един лъч от източника няма да премине през повърхността на водата. Направете оценка за минималния радиус на диска? (4 т.)



Фиг. 1.



Фиг. 2

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

15 – 16 МАРТ 2014 Г., САНДАНСКИ

Тема 7. клас, Решения и указания

Задача 1. а) При успоредно свързване на консуматорите напрежението между краищата им е равно на напрежението на източника, което ще означим с U **[1 т.].** Тогава токът през първия консуматор е I_1 **[0,5 т.]**, а през втория – I_2 **[0,5 т.]**. Като отчетем че при успоредно свързване токът във веригата е сума на токовете през консуматорите, получаваме

$$I' = I_1 + I_2 = 5\ \text{A}. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

б) При последователно свързване на консуматорите еквивалентното им съпротивление е

$$R = R_1 + R_2, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

а токът във веригата по закона на Ом се дава с израза

$$I'' = \frac{U}{R_1 + R_2}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тъй като

$$R_1 = \frac{U}{I_1}, \qquad R_2 = \frac{U}{I_2}, \qquad \textbf{[2 т.]}$$

след заместване в израза за тока I'' получаваме

$$I'' = \frac{I_1 I_2}{I_1 + I_2} = 1{,}2\ \text{A}. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

Задача 2. а) Еквивалентното съпротивление е

$$R' = R + R_1, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

при което токът във веригата се дава с израза

$$I_1 = \frac{U}{R + R_1}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тогава за мощността на резистора 1 получаваме

$$P_1 = I_1^2 R_1 = \frac{U^2 R_1}{(R + R_1)^2} = 3{,}24\ \text{W}. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

б) Мощностите на двата резистора се дават с изразите

$$P_1 = \frac{U^2 R_1}{(R + R_1)^2}, \qquad P_2 = \frac{U^2 R_2}{(R + R_2)^2}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

След приравняването им намираме

$$R_2 = \frac{R^2}{R_1} = 9\,\Omega. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

в) При успоредно свързване на резисторите 1 и 2 еквивалентното съпротивление е

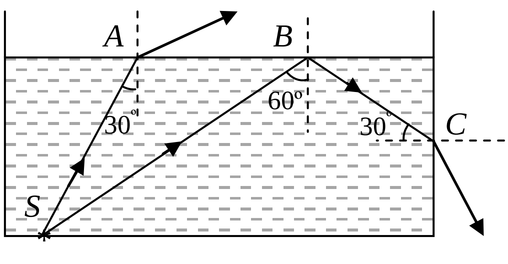
$$R'' = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тогава мощността им е

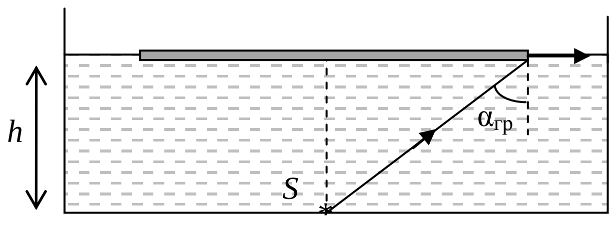
$$P_0 = \frac{U^2}{R''} = \frac{U^2(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = 29{,}25\ \mathrm{W}. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

Задача 3. А) Ходът на лъчите е показан на фиг. 1. **[3 т.]** Лъчът, падащ в т. A от разделителната повърхност вода–въздух, се пречупва на ъгъл по-голям от 30°, тъй като ъгълът на падане е по-малък от граничния (49°) за границата вода-въздух и втората среда (въздухът) е оптически по-рядка. **[1 т.]** Вторият лъч, падащ в т. B, изпитва пълно вътрешно отражение на разделителната повърхност вода–въздух, тъй като ъгълът на падане е по-голям от граничния. **[1 т.]** След това лъчът попада в т. C с ъгъл на падане 30°, при което се пречупва под ъгъл, по-голям от 30° и напуска съда. **[1 т.]**

Б) За лъчите, които достигат разделителната повърхност вода–въздух има две възможности. Когато ъгълът на падане е по-малък от граничния $\alpha_{гр}$, лъчът се пречупва и се разпространява във въздуха. **[1 т.]** Когато ъгълът на падане е по-голям от граничния $\alpha_{гр}$, лъчът търпи пълно вътрешно отражение и остава във водата. **[1 т.]** За да не напускат светлинните лъчи водата, техният ход трябва да бъде преграден от диска – това се отнася за лъчите с ъгъл на падане по-малък от граничния. На фиг. 2 е показана ситуацията, при която светлинни лъчи не напускат водата. **[1 т.]** Тъй като $\alpha_{гр} = 49^\circ$, може да се направи оценката, че минималния радиус на диска трябва да е по-голям от h. **[1 т.]**



Фиг. 1.



Фиг. 2.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

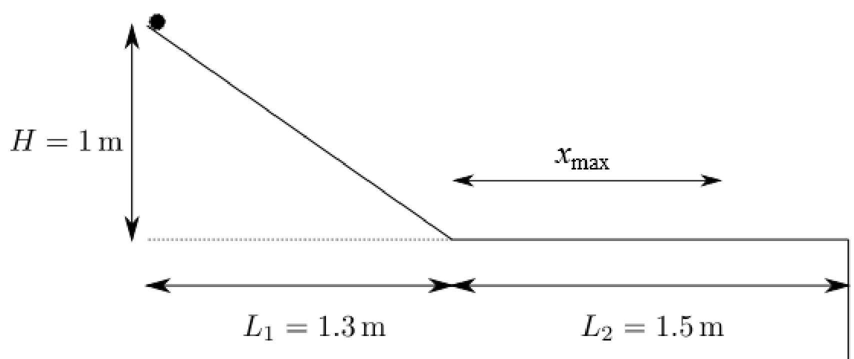
Национално пролетно състезание по физика

15-16 март 2014 г.

Тема за 8. клас

Задача 1: Тяло по наклонена равнина

Тяло с нулева начална скорост се спуска от височина $H = 1$ m по идеално гладка наклонена повърхност, след което продължава движението си по хоризонтална повърхност с коефициент на триене $k = 0.7$. Размерите на повърхностите и началната височина на тялото са указани на фигура 1.



Фигура 1

Да се намерят:

а) скоростта на тялото в най-долната точка от наклонената повърхност **[2 т]**;

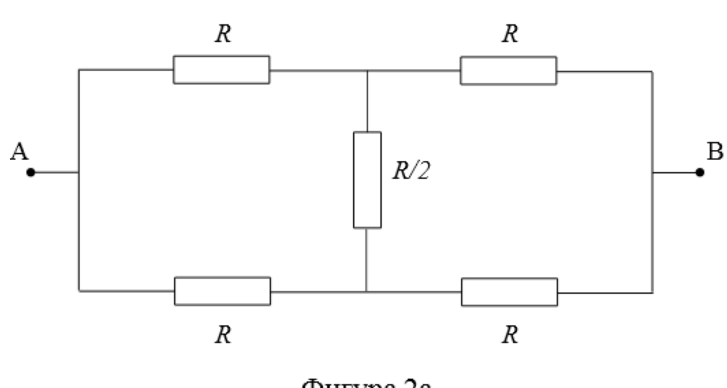
б) максималното разстояние x_{max}, до което достига тялото по хоризонталната повърхност **[4 т]**;

в) с каква минимална начална скорост V_0 трябва да бъде пуснато тялото от върха на наклонената равнина, за да падне от ръба на хоризонталната равнина **[4 т]**.

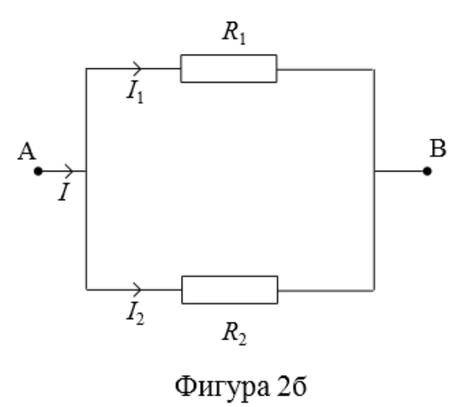
Да се приеме, че тялото е материална точка и че земното ускорение е $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$.

Задача 2: Електрически схеми

а) Пет съпротивления са свързани, както е показано на фигура 2а, където R = 1 Ω. Между точки А и В е приложено напрежение U = 1 V. Намерете съпротивлението между А и В **[4 т]**;



Фигура 2а



Фигура 2б

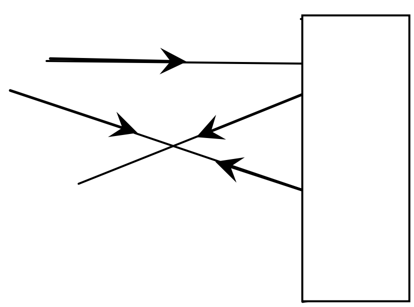
б) Две съпротивления с големина $R_1 = 1\ \Omega$ и $R_2 = 1/3\ \Omega$ са свързани успоредно, както е показано на фигура 2б. От точка А във веригата влиза ток $I = 1$ A. Да се намери токът, който протича през R_1 и R_2 **[3 т]**;
в) Да се намерят мощностите (топлината за единица време), които се отделят от всяко от съпротивленията във фигури 2а и 2б **[3 т]**.

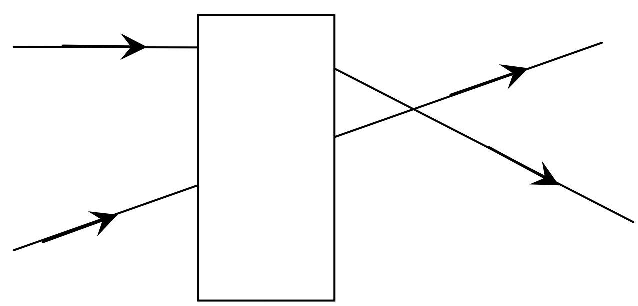
Задача 3: Отражение и пречупване на светлината

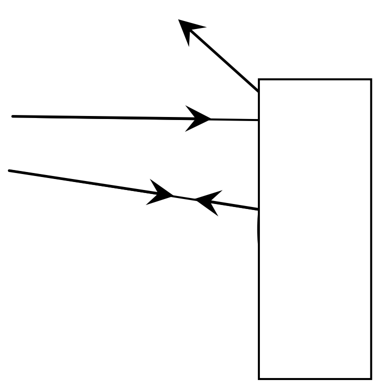
а) Шофьор вижда отражението на автомобила си в прозорците на сграда, разположена пред него. На шофьора му се струва, че образът се приближава към него със скорост $V = 50\,\text{m/s}$. С каква скорост се движи автомобилът? **[1 т]**;

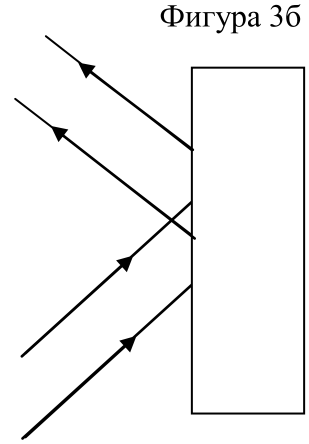
б) В даден момент разстоянието между автомобила и сградата става $L_0 = 100$ m. Шофьорът натиска спирачката и автомобилът започва да се движи равнозакъснително с ускорение $a = 4\,\text{m/s}^2$ (спрямо земята). Определете разстоянието между автомобила и неговия образ в момента, когато автомобилът спре **[3 т]**;

в) По хода на лъчите от фигура 3 определете какъв оптичен елемент (един на брой) има във всяка една от кутиите. Обосновете отговора си (може да направите и чертеж за всеки от случаите) **[6 т]** .


Фигура 3а


Фигура 3б


Фигура 3в


Фигура 3г

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика

15-16 март 2014 г.

Решения на тема за 8. клас

<u>Задача 1: Тяло по наклонена равнина</u>

а) Скоростта се определя от закона за запазване на енергията (ЗЗЕ): $\frac{mV^2}{2} = mgH$ **[1 т]** $\Rightarrow$

$$V = \sqrt{2gH} \approx 4.47\,\text{m/s}$$ **[1 т]**.

б) За да приведе тялото в покой, силата на триене извършва работа, равна на потенциалната енергия на тялото в началния момент: $kmgx_{\max} = mgH$ **[2.5 т]** $\Rightarrow$

$$x_{\max} = \frac{H}{k} \approx 1.43\,\text{m}$$ **[1.5 т]**.

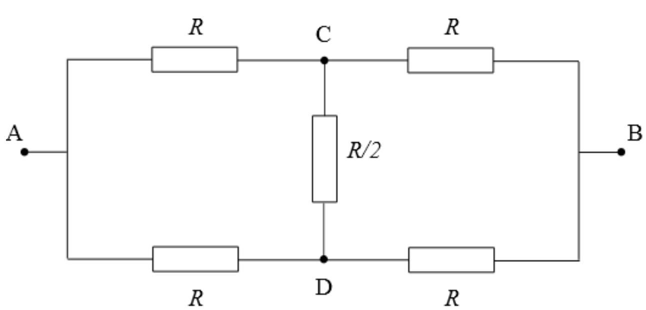
в) От енергетични съображения намираме началната скорост V_0, при която тялото спира на ръба на масата:

$$\frac{mV_0^2}{2} + mgH = kmgL_2$$ **[2 т]** $\Rightarrow$

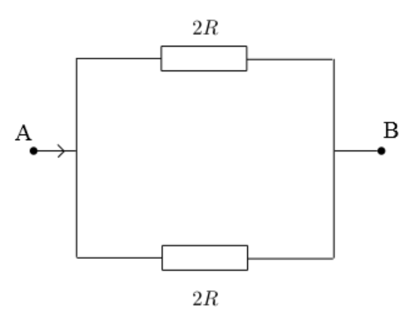
$$V_0 = \sqrt{2g\left(kL_2 - H\right)} = 1\ \text{m/s}$$ **[2 т]**.

<u>Задача 2: Електрически схеми</u>

а) Поради симетрията (фигура 2а) през резистора със съпротивление $R/2$ не протича ток **[1 т]**. Следователно можем да използваме еквивалентната схема във фигура 2б **[2 т]**.



Фигура 2а



Фигура 2б

Лесно пресмятаме общото съпротивление между точки А и В

$$R_{AB} = R = 1\Omega$$ **[1 т]**.

б) Съпротивлението на цялата верига е

$$R_{AB} = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2} = \frac{1}{4}\Omega$$ **[1 т]**.

Тогава за напрежението между точки А и В получаваме

$$U = R_{AB}I = \frac{R_1R_2}{R_1 + R_2}I = \frac{1}{4}V$$ **[1 т]**.

Следователно за токовете през R_1 и R_2 имаме

$$I_1 = \frac{U}{R_1} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} I = \frac{1}{4}\,\mathrm{A}$$
$$I_2 = \frac{U}{R_2} = \frac{R_1}{R_1 + R_2} I = \frac{3}{4}\,\mathrm{A}$$
[1 т].

в) (фигура 2а) Мощността, отделена от съпротивление $R/2$, е нула **[1 т]**. Общата мощност на веригата, която е $P = \frac{U^2}{R}$, се поделя по равно на всяко съпротивление R и е равна на

$$\frac{1}{4} P = \frac{U^2}{4R} = \frac{1}{4}\,\mathrm{W}$$ **[1 т]**.

(фигура 2б) Мощностите за съпротивления R_1 и R_2 са съответно

$$P_1 = R_1 I_1^2 = \frac{R_1 I^2}{\left(1 + R_1 / R_2\right)^2} = \frac{1}{16}\,\mathrm{W}$$
$$P_2 = R_2 I_2^2 = \frac{R_2 I^2}{\left(1 + R_2 / R_1\right)^2} = \frac{3}{16}\,\mathrm{W}$$
[1 т].

<u>Задача 3: Отражение и пречупване на светлината</u>

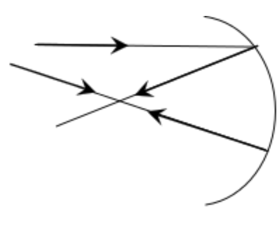
а) Автомобилът се движи със скорост $\frac{V}{2} = 25\,\mathrm{m/s}$ **[1 т]**;

б) Разстоянието между шофьора и образа на автомобила се изменя по закона

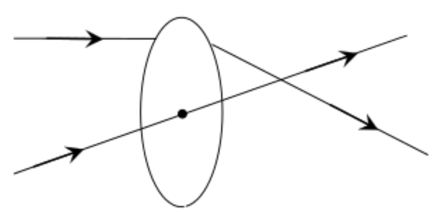
$$L = 2\left(L_0 - \frac{V}{2}t + \frac{1}{2}at^2\right) = 200 - 50t + 4t^2.$$ **[1 т]**

Скоростта (спрямо земята) се изменя по закона $U = \frac{V}{2} - at$ **[1т]**. Автомобилът спира в момента $t_0 = \frac{V}{2a}$. Разстоянието между автомобила и образа е $2\left(L_0 - \frac{V^2}{8a}\right) = 43.75\,\mathrm{m}$ **[1 т]**.

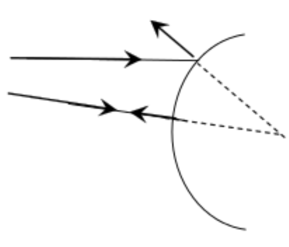
в) Оптичните елементи са показани във фигура 2: вдлъбнато огледало, двойно изпъкнала леща, изпъкнало огледало и плоско огледало – по **[1.5 т]** на елемент.



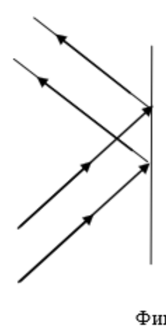
Фигура 3а



Фигура 3б



Фигура 3в



Фигура 3г

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

гр. Сандански, 15 март 2014 г.

Тема за 9. клас

<u>Полезни физични константи</u>

Заряд на електрона: $e = -1{,}6.10^{-19}$ C

Константа на Кулон: $k = 9.10^{9}\ \mathrm{Nm^2C^{-2}}$

Задача 1. Електростатика (10 точки)

Част 1. Елена се пързаля върху килима на пода и се наелектризира. Малко преди да достигне вратата, тя има заряд $q = 2{,}4$ mC.

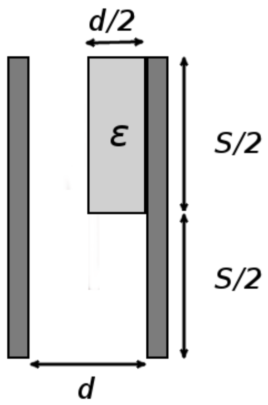
а) Колко електрона е отдала Елена на килима? (1 точка)

б) Тя докосва металната врата и усеща лек токов удар. Обяснете явлението. (1 точка)

в) Определете тока, който протича за $t = 0{,}25$ s като приемете, че той е постоянен. (1 точка)

Част 2. Кондензатор с капацитет $C = 0{,}14$ pF се зарежда и се отделя от електрическата мрежа. Измереното напрежение е $U_1 = 360$ V. Към кондензатора се включва успоредно втори кондензатор. Измереното ново напрежение е $U_2 = 210$ V. Определете капацитета C' на втория кондензатор. (2 точки)

Част 3. Във въздушен кондензатор с капацитет $C = 0{,}6$ pF е внесена диелектрична пластина с диелектрична проницаемост $\varepsilon = 2$. Пластината е разположена, както е показано на фиг. 1. Размерите на електродите на кондензатора са значително по-големи от разстоянието между тях. Определете капацитета на кондензатора C_0 след внасяне на пластината. (5 точки)



Фиг. 1

Задача 2. Заряди в гравитационно поле (10 точки)

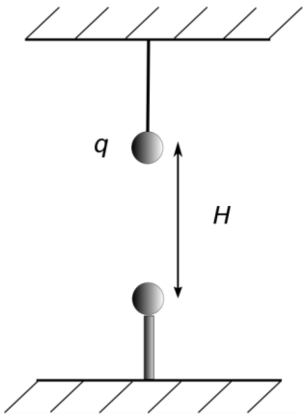
Метално топче със заряд $q = +0{,}1\ \mu\mathrm{C}$ и маса $m = 1$ g е окачено на безтегловна, неразтеглива нишка, направена от изолаторен материал. Земното ускорение е $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$.

а) Определете силата на опъване на нишката. (1 точка)

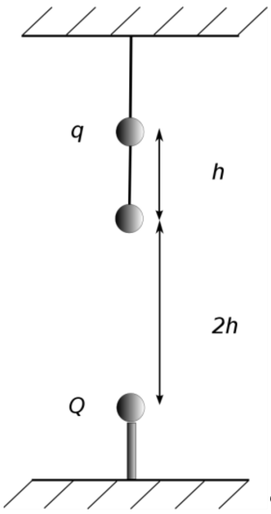
Директно под топчето на диелектрична пръчица е закрепено неподвижно второ топче със същия по големина заряд и същата маса, както е показано на фиг. 2. Силата на опъване на нишката е 0.

б) Какъв е по знак зарядът на топчето? (1 точка)

в) Определете разстоянието H между двете топчета. (2 точки)



Фиг. 2



Фиг. 3

Долното топче се отделя от диелектричната пръчица и се прикача към горното топче на изолираща, безтегловна и неразтеглива нишка с дължина h. Зарядите на двете топчета се запазват. Под него на диелектрична пръчица е закрепено неподвижно трето топче с неизвестен заряд Q, както е показано на фиг. 3.

г) Намерете големината и знака на Q, ако при разстояние $2h$ между долните две топчета силите на опъване на двете нишки стават равни на нула. (6 точки)

Задача 3. Свободно падане и земно ускорение (10 точки)

Част 1. За да се определи дълбочината на кладенец, в него се пуска камък без начална скорост. След $t = 3\ \mathrm{s}$ се чува как той достига дъното. Определете дълбочината на кладенеца h, ако скоростта на звука е $v_S = 330\ \mathrm{m/s}$. Земното ускорение е $g = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. (3 точки)

Част 2. В близост до земната повърхност земното ускорение може да се приеме за постоянно. На големи разстояния обаче то намалява според закона $g_{\mathrm{E}}(r) = \frac{C_E}{r^2}$, където C_E е константна величина, зависеща от масата на Земята, а r е разстоянието до центъра на Земята.

а) Определете константата C_E, взимайки предвид, че радиусът на Земята е 6400 km, а ускорението на нивото на земната повърхност е $g_{\mathrm{E}}(R_{\mathrm{E}}) = 9{,}81\ \mathrm{m/s^2}$. (1 точка)

б) Лунното ускорение зависи от разстоянието до центъра на Луната по същия начин както земното $g_{\mathrm{M}}(r) = \frac{C_{\mathrm{M}}}{r^2}$, но с различна константа C_M. Приемайки, че радиусът на Луната е 1700 km, а ускорението на повърхността ѝ е 17% от $g_E(R_E)$, пресметнете константата C_M. (1 точка)

в) Приемайки, че C_E и C_M зависят правопропорционално съответно от масата на Земята m_E и масата на Луната m_M, намерете съотношението $\frac{m_E}{m_M}$. (1 точка)

г) Разстоянието Земя-Луна е $R = 384000\ \mathrm{km}$. На какво разстояние R' от Земята се намира обект, върху който силите на тежестта между Луната и Земята се уравновесяват? Направете чертеж. (4 точки)

Упътване: Формулата $g_{\mathrm{E}}(r) = \frac{C_E}{r^2}$ важи единствено от земната повърхност нагоре, т.е. не и във вътрешността на Земята.

Успешно представяне!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

гр. Сандански, 15 март 2014 г.

Решения на темата за 9. клас

Задача 1. Електростатика (10 точки)

Част 1.

а) Броят електрони се намира по формулата

$Q = Ne$, където e е елементарният заряд на електрона. (0,5 точки)

$N = \frac{Q}{e} = \frac{2{,}4.10^{-3}C}{1{,}6.10^{-19}C} = 1{,}5.10^{16}$. (0,5 точки)

б) Вратата е електронеутрална, защото е свързана със земята. Докосвайки я, Елена ѝ предава заряда си, докато се неутрализира. Това се усеща като лек токов удар и понякога може да се види лека искра. (1 точка)

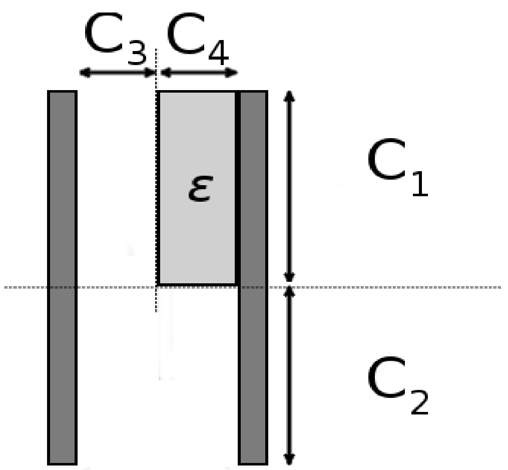
в) Токът се определя по формулата

$I = \frac{Q}{t} = \frac{2{,}4.10^{-3}\ \mathrm{C}}{0{,}25\ \mathrm{s}} = 9{,}6.10^{-3}$ A. (1 точка)

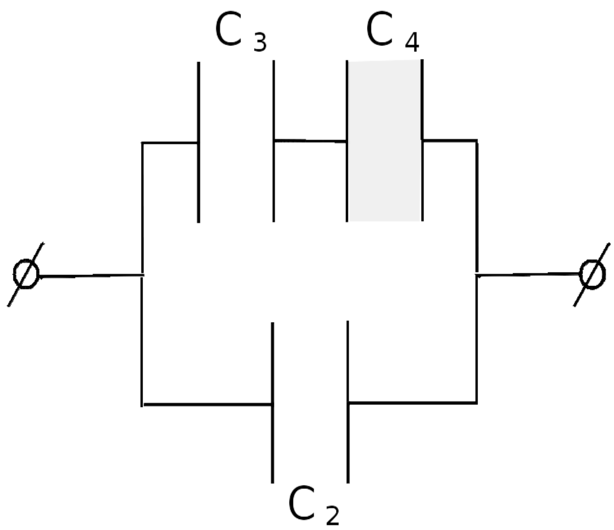
Част 2. Когато вторият кондензатор се свърже към първия, зарядът в системата остава постоянен. Той се определя по формулата $q = CU_1$. (0,5 точки)
Капацитетът на системата от два кондензатора е $C'' = C + C'$.
Тъй като зарядът е непроменен,
$q = CU_1 = C''U_2 = (C + C')U_2$ (0,5 точки)
С това за втория кондензатор се получава
$C' = \frac{C(U_1 - U_2)}{U_2}$ (0,5 точки)
$C' = 0{,}1$ pF. (0,5 точки)

Част 3.

Кондензаторът може да се разглежда като система от два успоредно свързани кондензатора с капацитети C_1 и C_2, както е показано на фиг. 1. C_1 е система от два последователно свързани кондензатора, като единият от тях не съдържа диелектрична пластина и има капацитет C_3, а другият е изцяло запълнен с диелектрик и има капацитет C_4. Еквивалентната схема е показана на фиг. 2. Правилна схема+обяснение. (1 точка)



Фиг. 1



Фиг. 2

Определяме капацитетите на кондензаторите поотделно. Капацитетът на кондензатора без диелектрична пластина е $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}$.

$C_2 = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{d} = \frac{C}{2}$ (0,5 точки)

$C_3 = \frac{\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{\frac{d}{2}} = C$ (0,5 точки)

$C_4 = \frac{\varepsilon\varepsilon_0 \frac{S}{2}}{\frac{d}{2}} = \varepsilon C = 2C$ (0,5 точки)

$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4}$ (0,5 точки)

$C_1 = \frac{2}{3}C$ (0,5 точки)

$C_0 = C_1 + C_2$ (0,5 точки)

$C_0 = \frac{C}{2} + \frac{2}{3}C = \frac{7}{6}C = 0{,}7$ pF. (1 точка)

Задача 2. Заряди в гравитационно поле (10 точки)

а) Силата на опъване на нишката T е равна по големина и противоположна по посока на силата на тежестта G, която действа на топчето

$T = G = mg$ (0,5 точки)

$T = 0{,}0098$ N. (0,5 точки)

б) Силата на опъване на нишката е 0, т.е. силата на тежестта и силата на Кулон, с която второто топче му действа, се уравновесяват. (0,5 точки)

Това означава, че двете топчета се отблъскват, т.е. зарядът на второто топче е със същия знак като на първото – положителен. (0,5 точки)

в) Силата на опъване на нишката е 0, ако

$G = F_C$ (0,5 точки)

$G = \frac{kq^2}{H^2}$ (0,5 точки)

$H = q\sqrt{\frac{k}{G}}$ (0,5 точки)

$H = 0{,}096$ m (0,5 точки)

г) Означаваме топчетата с 1 (най-горно), 2 (средно) и 3 (най-долно).

За средното топче важи

$G + F_C^{12} = F_C^{23}$. (0,5 точки)

За да може силата на опъване на долната нишка да е 0, е необходимо поне една сила да действа нагоре, т.е. то се отблъсква от най-долното топче. Това означава, че най-долното топче е със същия по знак заряд – положителен. (0,5 точки)

Така уравнението на силите на средното топче е

$G + \frac{kq^2}{h^2} = \frac{kQq}{4h^2}$. (1 точка)

За най-горното топче важи:

$G = F_C^{12} + F_C^{13}$, (0,5 точки)

тъй като знаем, че силата на опъване на нишката е 0. Уравнението може да се представи като

$G = \frac{kq^2}{h^2} + \frac{kQq}{9h^2}$. (1 точка)

След изваждане на двете уравнения едно от друго и преобразуване се получава

$Q = \frac{72}{5}q$ (2 точки)

$Q = 1{,}44$ μC. (0,5 точки)

Задача 3. Свободно падане и земно ускорение (10 точки)

Част 1. Времето от момента на пускане на камъка до момента, в който той се чува да удря дъното на кладенеца, може да се разглежда като сума на две времена:

t_1 е времето на падане на камъка до дъното
t_2 е времето, необходимо на звука да стигне от дъното на кладенеца до върха му.
$t = t_1 + t_2$, т.е. $t_2 = t - t_1$.
Първо разглеждаме свободното падане на камъка. Времето на падане се определя от формулата
$h = \frac{gt_1^2}{2}$. (0,5 точки)
Второто движение е това на звука. То е равномерно и се определя по формулата
$h = v_S t_2 = v_S(t - t_1)$. (0,5 точки)
Това води до уравнението
$\frac{gt_1^2}{2} = v_S(t - t_1)$, което след преобразуване може да се представи като
$gt_1^2 + 2v_S t_1 - 2v_S t = 0$. (0,5 точки)
Това уравнение има две решения,
$t_1^{1,2} = \frac{-v_S \pm \sqrt{v_S^2 + 2gtv_S}}{g}$, от които очевидно едното е с отрицателна стойност и няма физичен смисъл. (0,5 точки)

Второто решение е $t_1^2 = \frac{-v_S + \sqrt{v_S^2 + 2gtv_S}}{g} = 2{,}88$ s. (0,5 точки)

За него намираме $h = \frac{gt_1^2}{2} = 40{,}6$ m. (0,5 точки)

Алтернативно решение
Времето от момента на пускане на камъка до момента, в който той се чува да удря дъното на кладенеца, може да се разглежда като сума на две времена:
t_1 е времето на падане на камъка до дъното
t_2 е времето, необходимо на звука да стигне от дъното на кладенеца до върха му.
Времето на разпространение на звука може да се пренебрегне, тъй като е много малко в сравнение с времето на падане на камъка. (1 точка)
$h = \frac{gt_1^2}{2} = 44{,}1$ m. (1 точка)
Звукът изминава това разстояние за $t_2 = \frac{h}{v_S} = 0{,}13$ s. (0,5 точки)

Това време е много по-малко от времето на падане на камъка и може да се пренебрегне, защото грешката при измерването би била от същия порядък, ако то се извършва по не особено прецизен начин, например с ръчно управляван секундомер или ако се вземе предвид, че земното ускорение варира в зависимост от местоположението и географската ширина. (0,5 точки)

Част 2.

а) На повърхността на Земята

$g_E(R_E) = \frac{C_E}{R_E^2} => C_\text{E} = g_\text{E}(R_\text{E})R_E^2$ (0,5 точки)

$C_\text{E} = 4{,}02.10^{14}\ \text{m}^3/\text{s}^2.$ (0,5 точки)

б) По същия начин както в подточка а),

$C_M = g_M(R_M)R_M^2 = 0{,}17.9{,}81\ \text{m/s}^2\ .\ 2{,}96.\ 10^{12}\text{m} = 4{,}8.10^{12}\ \text{m}^3/\text{s}^2.$ (1 точка)

в) $\frac{m_E}{m_M} = \frac{C_E}{C_M} = 83{,}8$ (1 точка)

г) Силите на тежестта на Луната и на Земята, които действат на даден обект, се уравновесяват, когато $g_E = g_M$. (0,5 точки)

Разстоянието до Земята е R', а това до Луната е $R - R'$.

$g_E(R') = g_M(R - R')$

$\frac{C_E}{R'^2} = \frac{C_M}{(R-R')^2}.$ (0,5 точки)

След преобразуване

$(C_E - C_M)R'^2 - 2C_E RR' + C_E R^2 = 0.$ (0,5 точки)

Това уравнение има две решения,

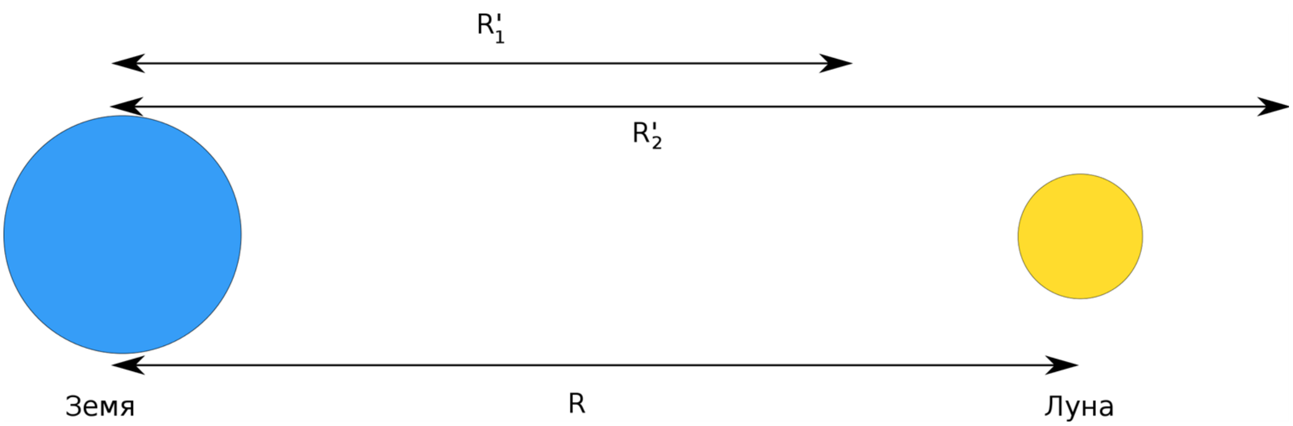
$R'_{1,2} = \frac{C_E R \pm \sqrt{(C_E R)^2 - (C_E - C_M)C_E R^2}}{C_E - C_M} = \frac{C_E R \pm \sqrt{C_M C_E} R}{C_E - C_M}$ (0,5 точки)

$R'_1 = 0{,}90R = 3{,}46.10^5$ km (0,5 точки)

$R'_2 = 1{,}12R = 4{,}31.10^5$ km. (0,5 точки)

Второто решение на уравнението се намира „зад“ Луната от гледна точка на Земята. Там силите на тежестта на Луната и на Земята са равни, но действат в една и съща посока, т.е. не се уравновесяват. Физично решение е единствено R'_1. (0,5 точки)

Правилен чертеж. (0,5 точки)



Фиг. 3

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика
гр. Сандански, 15-16 март 2014 г.

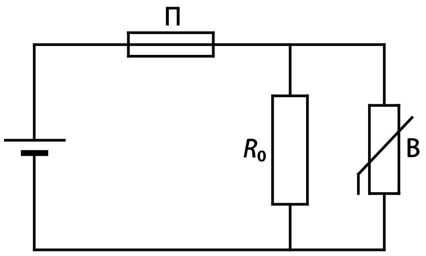
ТЕМА
за 10. клас

<u>Задача 1. Варистор.</u> *Варисторът е полупроводников елемент, който променя своето съпротивление в зависимост от приложеното му напрежение. Варистори се използват за защита на електронни схеми от високо напрежение (по-високо от максималното, на което схемата е предвидено да работи).*

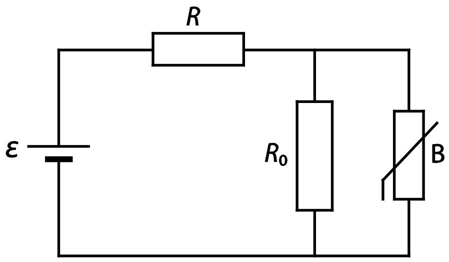
Ели и Сашо изследват в учебната лаборатория волтамперната характеристика на варистор (зависимостта на тока през варистора от приложеното напрежение). Резултатите са показани на графиката от *фиг.* 1.

(*Графиката е на отделен лист, който трябва да приложите към решението на задачата.*)

Същият варистор В е свързан в електрическата верига, чиято схема е показана на *фиг.* 2. В нея електронната схема, която трябва да бъде защитена, е заменена с консуматор с постоянно съпротивление R_0. Предпазителят П прекъсва веригата, когато токът през него достигне стойност I_{max} = 4 A. Максималното допустимо напрежение върху консуматора е U_{max} = 9 V.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

А) Опишете (качествено) как се изменя съпротивлението на варистора при увеличаване на приложеното към него напрежение. Ако увеличаваме електродвижещото напрежение на източника, възможно ли е да достигнем в този случай (*фиг.* 2) максималното допустимо напрежение върху консуматора? (2 *точки*)

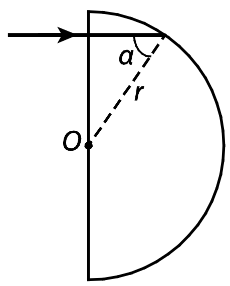
Заменяме предпазителя с резистор с постоянно съпротивление R = 6 Ω. Консуматорът има постоянно съпротивление R_0 = 10 Ω (*фиг.*3.) Вътрешното съпротивление на източника се пренебрегва.

Б) Нека напрежението върху консуматора е U = 6 V. Определете напрежението U_B и тока I_B през варистора, тока I през резистора и електродвижещото напрежение ε на източника. (3 *точки*)

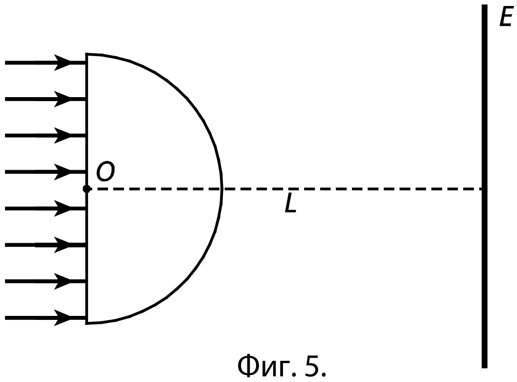
В) Електродвижещото напрежение на източника нараства и става $\varepsilon_1 = 2\varepsilon$. Определете напрежението U върху консуматора и тока I_B през варистора. (5 *точки*)

Задача 2. Светлинни лъчи. Светлинен лъч е насочен перпендикулярно на основата на стъклено полукълбо с радиус r = 2 cm и пада под ъгъл α върху сферичната му повърхност (*фиг.* 4). Показателят на пречупване на стъклото е $n = \sqrt{2}$. Кълбото е във въздуха ($n_в$ = 1). Постройте по-нататъшния ход на лъча, като аргументирате и подкрепите с доказателства построението. Разгледайте три случая:

А) $\alpha < 45°$ (2 *точки*) **Б)** $\alpha = 45°$ (1 *точка*) **В)** $\alpha > 45°$ (3 *точки*)



Фиг. 4.

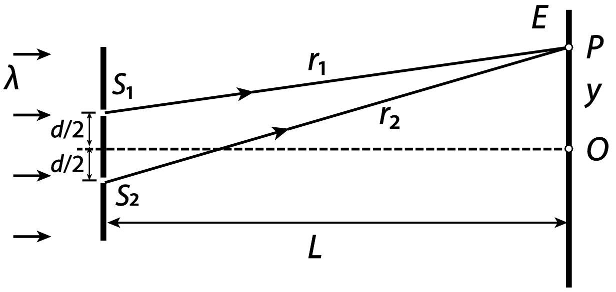


Фиг. 5.

Забележка: В подусловия А) и Б) не се разглежда отражението.

Г) Перпендикулярно на основата на същото стъклено полукълбо пада успореден сноп от лъчи (*фиг.* 5). Определете радиуса R на светлото петно, което ще се наблюдава върху екрана Е, разположен на разстояние $L = 5$ cm от центъра O на кълбото (*фиг.* 5). (4 *точки*)

Задача 3. Интерференция от два процепа. Монохроматична светлина с дължина на вълна λ пада перпендикулярно върху екран с два тесни успоредни процепа S_1 и S_2, разположени на разстояние d един от друг. Върху отдалечен екран, поставен на разстояние L от процепите ($L >> d$), се наблюдава интерференчна картина (*фиг.* 6).



Фиг. 6.

А) Докажете, че за точка, която се намира на разстояние $y << L$ от центъра O на екрана, разликата в ходовете Δr на лъчите от двата процепа е приблизително равна на $\Delta r = r_2 - r_1 \approx \frac{d}{L} y$. (2 *точки*)

Полезна формула: $\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{x}{2}$ при $x << 1$.

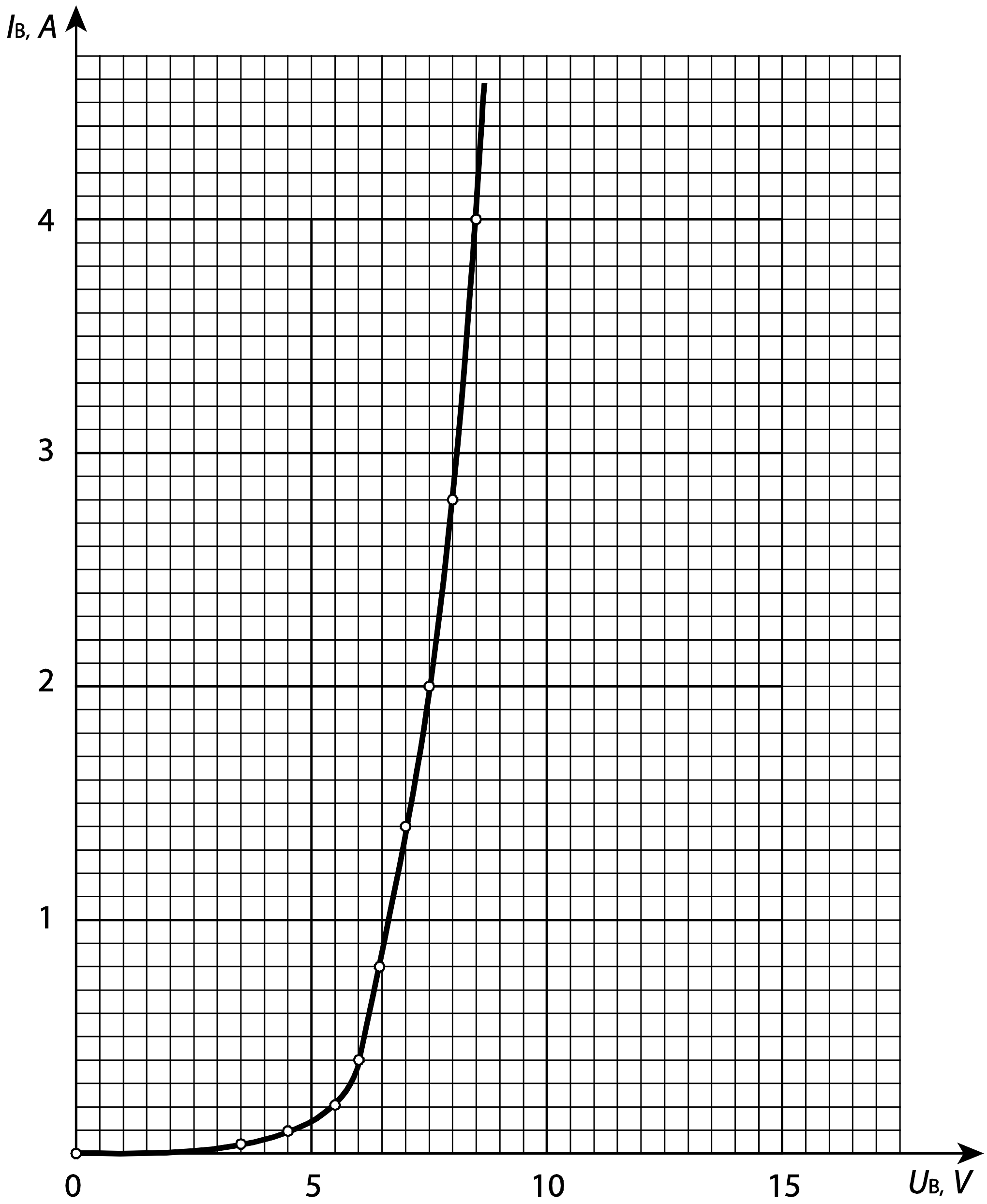
Б) Приемете, че за интерференчната картина близо до центъра на екрана ($y << L$) разликата в ходовете на интерфериращите вълни е $\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{d}{L} y$ и получете израз за разстоянията y от центъра O на екрана, на които ще се наблюдават интерференчни максимуми (светли ивици) и интерференчни минимуми (тъмни ивици). (2 *точки*)

Нека $L = 4$ m и $d = 0{,}2$ mm.

В) Колко нанометра е дължината на вълната λ на светлината, ако интерференен максимум от четвърти порядък ($m = 4$) се наблюдава на разстояние $y = 4$ cm от центъра на екрана? (2 *точки*)

Г) Определете разстоянието Δy между два съседни максимума и коментирайте резултата. (2 *точки*)

Д) Перпендикулярно на двата процепа пада светлина, която е смес от две мононохроматични вълни с дължини на вълната $\lambda_1 = 550$ nm и $\lambda_2 = 450$ nm. Всяка вълна създава върху екрана своя интерференчна картина. На какво най-малко разстояние y от центъра на екрана се намира светла ивица от едната интерференчна картина, която съвпада с цветна ивица от втората интерференчна картина? Аргументирайте коректността на получения резултат. (2 *точки*)



Внимание! *Приложете графиката към Вашата писмена работа.*

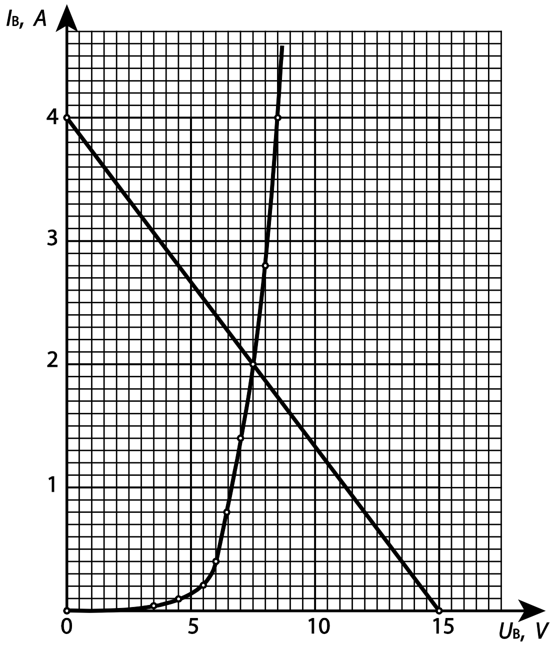
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика
гр. Сандански, 15-16 март 2014 г.

РЕШЕНИЯ И УКАЗАНИЯ

към темата за 10. клас

Задача 1. А) Волтамперната характеристика на варистора е нелинейна. При малки напрежения през него практически не тече ток, което означава, че съпротивлението на варистора е много голямо. Когато напрежението върху варистора нараства, неговото съпротивление намалява и токът започва бързо да нараства. При големи напрежения съпротивлението на варистора става много малко – той дава „на късо" консуматора, към който е свързан успоредно. …….…….1 *точка*



Фиг. 1.

От *фиг.* 1 определяме, че през варистора тече ток 4 A при напрежение 8,5 V. Следователно прекъсвачът ще прекъсне веригата преди да е достигнато максималното допустимо напрежение 9 V върху консуматора….. 1 *точка*

Б) Напрежението върху варистора е $U_в = U = 6$ V (успоредно свързване)…………………..…….0,5 *точки*

От графиката (*фиг.* 1) определяме, че при напрежение 6 V през варистора тече ток

$I_В = 0{,}4$ A ……………………………...0,5 *точки*

Токът през резистора е

$I = \dfrac{U}{R_0} + I_В = 1$ A …………………………..1 *точка*

Електродвижещото напрежение на източника е

$\varepsilon = IR + U_В = 12$ V …………………………………………………………………..1 *точка*

В) В този случай $\varepsilon_1 = RI + U_В = R(\dfrac{U_В}{R_0} + I_В) + U_В$, откъдето изразяваме тока през варистора

$$I_{ВВ} = \frac{\varepsilon_1}{R} - \left(\frac{1}{R_0} + \frac{1}{R}\right)U$$ …………………………………………………………..1 *точка*

В това линейно уравнение има две неизвестни ($U_в$ и $I_В$). Ние разполагаме с графика на зависимостта $I_В(U_в)$ и затова трябва да решим задачата графично. Построяваме графика на получената линейна зависимост. Тя е права линия: при $U_В = 0$ $I_B = \dfrac{\varepsilon_1}{R} = 4$ A ; при $I_В = 0$ $U_В = 15$ V.

Правата линия е показана на *фиг.* 1……………….. ……………………………...2 *точки*

Търсеното решение е пресечната точка на двете графики. ………………………1 *точка*

Нейните координати са $U_В = 7{,}5$ V и $I_В = 2$ A.

Следователно при електродвижещо напрежение на източника ε_1 = 24 V напрежението върху консуматора е $U = U_{\text{В}}$ = 7,5 V, ………………………………………………………………0,5 *точки*
а токът през варистора е $I_{\text{В}}$ = 2 A ……………………………………………………………..0,5 *точки*

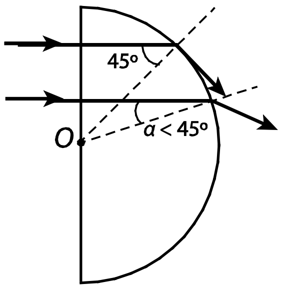
Задача 2. А) От равенството $\sin\alpha_{\text{гр}} = \dfrac{1}{n}$ определяме граничния ъгъл на пълно вътрешно отражение: $\alpha_{\text{гр}} = 45^{\text{O}}$ ……………………………………………………………….. 1 *точка*

При $\alpha < \alpha_{\text{гр}}$, т.е. при $\alpha < 45^{\text{O}}$, лъчът се пречупва от сферичната повърхност и напуска кълбото (*фиг.* 2) ……………………………………………...………………… 1 *точка*

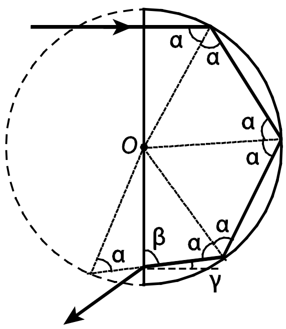
Б) При $\alpha = \alpha_{\text{гр}} = 45^{\text{O}}$ лъчът се плъзга по сферичната повърхност (*фиг.* 2) …...…… 1 *точка*

В) При $\alpha > \alpha_{\text{гр}}$ ($\alpha > 45^{\text{O}}$) лъчът претърпява неколкократно (многократно) пълно вътрешно отражение от сферичната повърхност, пречупва се от плоската повърхност на полусферата и я напуска (*фиг.* 3)…………………………………………..…………………………………1 *точка*

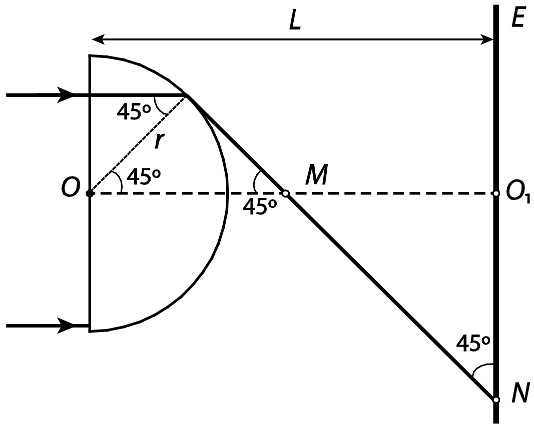
Всички ъгли на падане и отражение от сферичната повърхност са равни на α … 0,5 *точки*



Фиг. 2.



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Броят на отраженията е $k = 1 +$ цялата част на числото $\dfrac{90^0 + \alpha}{180^0 - 2\alpha}$ …………………..0,5 *точки*

Лъчът пада върху плоската повърхност на полукълбото под ъгъл γ. От чертежа се вижда (*фиг.* 3), че $\beta > \alpha > 45^0$. Следователно $\gamma = 90° - \beta < 45°$, т.е. ъгълът на падане е по-малък от граничния ъгъл. Затова лъчът напуска полукълбото ………………………………………………… 1 *точка*

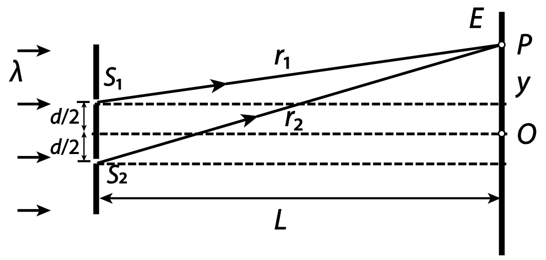
Г) Поради пълното вътрешно отражение от полукълбото ще излязат само лъчите, които падат върху сферичната му повърхност под ъгъл $\alpha < \alpha_{\text{гр}} = 45°$ ………………………………1 *точка*

Радиусът на светлото петно се определя от лъча, падащ под граничния ъгъл $\alpha = \alpha_{\text{гр}} = 45^{\text{O}}$ (*фиг.* 4) …………………………………………………………………1 *точка*

От чертежа на *фиг.* 4 определяме:

$OM = r\sqrt{2}$; $\quad R = NO_1 = MO_1 = L - r\sqrt{2} \approx 2{,}2$ cm ……………………………………… 2 *точки*

Задача 3. **А)** От двата правоъгълни триъгълника на *фиг*. 5 изразяваме разстоянията r_1 и r_2:



Фиг. 5.

$$r_1 = \sqrt{L^2 + (y - d/2)^2} \approx L(1 + \frac{(y - d/2)^2}{2L^2});$$

…………………….……….. 1 *точка*

$$r_2 = \sqrt{L^2 + (y + d/2)^2} \approx L(1 + \frac{(y + d/2)^2}{2L^2}).$$

Разликата в ходовете на двете вълни е

$$\Delta r = r_2 - r_1 \approx L + \frac{(y + d/2)^2}{2L} - \left(L + \frac{(y - d/2)^2}{2L}\right) = \frac{d}{L}y$$ ……………………………1 *точка*

Б) $\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{d}{L}y = m\lambda$ (m = 0, ±1, ±2, …) – условие за максимум …….…… 1 *точка*

$\Delta r = r_2 - r_1 = \frac{d}{L}y = (m + \frac{1}{2})\lambda$ (m = 0, ±1, ±2, …) – условие за минимум ………… 1 *точка*

В) $\lambda = \frac{d}{mL}y$ ……………………………………………………………….. 1 *точка*

$\lambda = 500$ nm ………………………………………………………………. 1 *точка*

Г) $\Delta y = y_{m+1} - y_m = (m+1)\frac{\lambda L}{d} - m\frac{\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{d} = 1$ cm ……………………………..….. 1 *точка*

Разстоянието между светлите ивици не зависи от *y*, т.е. в централната част на екрана интерференчните ивици са разположени на еднакви разстояния една от друга .………0,5 *точки*

Разстоянието между ивиците нараства, ако намаляваме разстоянието *d* между процепите или ако отдалечаваме екрана (увеличаваме *L*)……………………………………….0,5 *точки*

Д) От условието за максимум изразяваме разстоянията y, на които са разположени светлите ивици на двете интерференчни картини:

$$y_{m_1} = \frac{m_1\lambda_1 L}{d}; \quad y_{m_2} = \frac{m_2\lambda_2 L}{d}.$$

За съвпадащите ивици $\frac{m_1\lambda_1 L}{d} = \frac{m_2\lambda_2 L}{d}$, откъдето получаваме

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{550\text{ nm}}{450\text{ nm}} = \frac{11}{9}$$ ……………...…………………………………………….. 0,5 *точки*

Първите съвпадащи ивици на двете картини са разположени от центъра на екрана

на разстояние $y_{m_1=9} = \frac{9\lambda_1 L}{d} = 9{,}9$ cm …………………………………………………… 1 *точка*

Тъй като $y_9 << L$, можем да използваме направеното в началото приближение за разликата в оптичните ходове на вълните от двата процепа, отнасящо се само за централната част от екрана……………………………………………………………………..0,5 *точки*

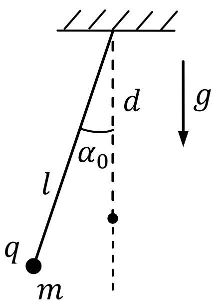
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15 март 2014 г.

Тема за 11. – 12. клас

<u>Задача 1</u>. Махало.

Дадено е малко топче с маса $m = 90$ g и положителен заряд $q = 0{,}25$ μC, което е окачено на тънка неразтеглива безмасова непроводяща нишка с дължина $l = 50$ cm, както е показано на фиг. 1. На разстояние $d = 3l/4$ под точката на окачване на нишката е забит малък пирон, който ограничава движението на нишката. В началния момент от времето топчето е отклонено на ъгъл α_0 спрямо вертикалата и оставено да се движи свободно. Приемете, че земното ускорение $g = 10\ \mathrm{m/s^2}$, а константата в закона на Кулон $k = 9 \times 10^9\ \mathrm{N.m^2/C^2}$.



Фиг. 1

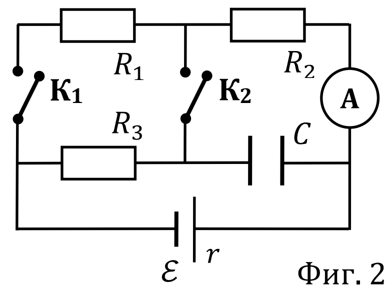
а) Намерете разстоянието a между крайното ляво положение на топчето и крайното му дясно положение по време на неговото люлеене, ако ъгълът $\alpha_0 = 30°$. **[2 т.]**

б) Нека махалото е отклонено на даден малък ъгъл α. Като използвате, че за малки ъгли $\cos\alpha \approx 1 - \alpha^2/2$, намерете ъгъла β, който сключва долната част на нишката с вертикалата, когато топчето е в крайно дясно положение. **[1 т.]**

в) На колко е равен периодът T на малките трептения на системата? **[2 т.]**

г) На пирона е придаден положителен заряд $Q = 0{,}5$ μC. Като приемете пирона за точков заряд и използвате, че за малки ъгли $\sin\alpha \approx \alpha$ в радиани, определете периода T' на малките трептения в този случай. **[5 т.]**

<u>Задача 2</u>. Електрическа верига.



Фиг. 2

Електрическата верига на фиг. 2 е съставена от три резистора със съпротивления $R_1 = 1\ \Omega$, $R_2 = 2\ \Omega$, $R_3 = 3\ \Omega$, кондензатор с капацитет $C = 2$ μF, източник на електродвижещо напрежение $\mathcal{E}$ с вътрешно съпротивление $r = 0{,}5\ \Omega$, идеален амперметър и два превключвателя **K_1** и **K_2**. В началния момент и двата ключа са отворени. След като сме изчакали да спре да тече ток през кондензатора, е измерено, че зарядът му е $q^{\mathrm{OO}} = 9$ μC.

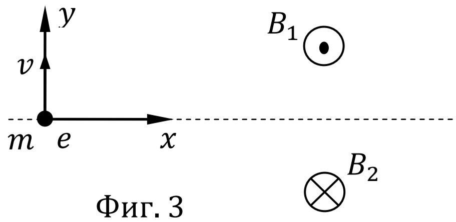
а) Намерете големината на електродвижещото напрежение $\mathcal{E}$. **[1 т.]**

б) Ключът **K_1** остава отворен, а **K_2** се затваря, след което се изчаква да мине достатъчно дълго време, за да не протича ток през кондензатора. Какво е показанието I^{OC} на амперметъра тогава? Колко е зарядът на кондензатора q^{OC}? **[3 т.]**

в) Разгледайте ситуацията, в която ключът **K_1** е затворен, а **K_2** е отворен. След като е минало достатъчно дълго време, за да не тече ток през кондензатора, определете тока през амперметъра I^{CO}. На колко е равен тогава зарядът на кондензатора q^{CO}? **[3 т.]**

г) Нека и двата ключа да са затворени. Намерете показанието на амперметъра I^{CC} и заряда на кондензатора q^{CC}, след като е минало достатъчно дълго време, така че през кондензатора да не тече ток. **[3 т.]**

Задача 3. Протон в магнитно поле.



Фиг. 3

Протон с маса $m = 1{,}67 \times 10^{-27}$ kg и заряд $e = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C се намира първоначално на границата между две области, в които има постоянни магнитни полета с противоположни посоки, както е показано на фиг. 3. Големините на магнитните индукции на полетата са $B_1 = 10$ mT и $B_2 = 15$ mT. Протонът има скорост $v = 10$ km/s, насочена перпендикулярно на границата.

а) Начертайте траекторията на протона в двете области. **[2 т.]**

б) Определете координатите x_1 и x_2 на първите две пресечни точки на протона с границата. **[3 т.]**

в) Намерете средната скорост $\bar{v}_x$ на протона по x-направлението. **[3 т.]**

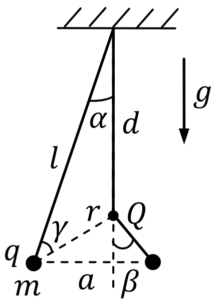
г) Нека магнитното поле в долната област да бъде със същата посока като в горната област. Каква ще бъде големината на средната скорост $\bar{v}_x'$ на протона по x-направлението в този случай? **[2 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15 март 2014 г.

Решения на темата за 11. – 12. клас

Задача 1. Махало.



Фиг. 1

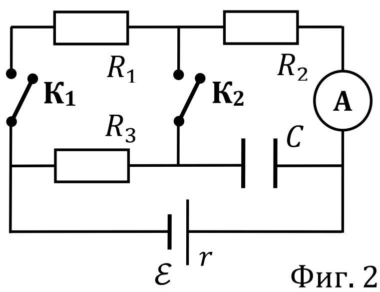
а) От закона за запазване на механичната енергия следва, че $l\cos\alpha_0 = d + (l-d)\cos\beta$ **[1 т.]**, където β е ъгълът, който сключва долната част на нишката с вертикалата при крайно дясно положение на топчето (виж фиг. 1). Разстоянието a между крайното ляво положение на топчето и крайното му дясно положение по време на неговото движение е равно на $a = l\sin\alpha_0 + (l-d)\sin\beta = l\sin\alpha_0 + \sqrt{l^2\sin^2\alpha_0 - 2ld(1-\cos\alpha_0)} = 0{,}36\ \mathrm{m}$. **[1 т.]**

б) Използваме, че уравнението $l\cos\alpha = d + (l-d)\cos\beta$ при малки ъгли се превръща в $l\alpha^2 = (l-d)\beta^2$ **[0,5 т.]**, откъдето се получава, че $\beta = \alpha\sqrt{l/(l-d)} = 2\alpha$. **[0,5 т.]**

в) Наляво от пирона топчето се люлее като математично махало с дължина на нишката l и съответно период $T_0^{\mathrm{L}} = 2\pi\sqrt{l/g}$, докато надясно от пирона се държи като математично махало с дължина на нишката $l-d$ и период $T_0^{\mathrm{R}} = 2\pi\sqrt{(l-d)/g}$. **[0,5 т.]** Топчето извършва половин период отляво на пирона и половин период отдясно на пирона. **[0,5 т.]** Това означава, че периодът на малките трептения е $T = \frac{T_0^{\mathrm{L}}}{2} + \frac{T_0^{\mathrm{R}}}{2} = \pi\sqrt{l/g} + \pi\sqrt{(l-d)/g} = \frac{3\pi}{2}\sqrt{\frac{l}{g}} = 1{,}05\ \mathrm{s}$. **[1 т.]**

г) В този случай възстановяващата сила, която действа на топчето, когато то е наляво от пирона, има вида $F = -(mg\sin\alpha - kqQ\sin\gamma/r^2)$. **[1 т.]** Синусовата теорема ни дава връзката $\frac{\sin\alpha}{r} = \frac{\sin\gamma}{d}$. **[0,5 т.]** Следователно $F = -(mg - kqQd/r^3)\sin\alpha$. **[0,5 т.]** В приближение на малки ъгли имаме квазиеластична сила $F \approx -\left(mg - \frac{kqQd}{(l-d)^3}\right)\alpha$. **[0,5 т.]** Отместването от равновесното положение е приблизително αl. **[0,5 т.]** Т.е. наляво от пирона махалото се държи като хармоничен осцилатор с период $T^{\mathrm{L}} = 2\pi\sqrt{l/\left(g - \frac{kqQd}{m(l-d)^3}\right)}$. **[0,5 т.]** Отдясно на пирона електричната сила е насочена по направление на нишката и съответно няма възстановяваща компонента, от което следва, че движението е като в предната подточка: $T^{\mathrm{R}} = T_0^{\mathrm{R}} = 2\pi\sqrt{(l-d)/g}$. **[0,5 т.]** Топчето отново извършва половин период отляво на пирона и половин период отдясно. За периода на малките трептения в този случай получаваме $T' = \frac{T^{\mathrm{L}}}{2} + \frac{T^{\mathrm{R}}}{2} = \pi\sqrt{l/\left(g - \frac{kqQd}{m(l-d)^3}\right)} + \pi\sqrt{(l-d)/g} = 1{,}16\ \mathrm{s}$. **[1 т.]**

Задача 2. Електрическа верига.



Фиг. 2

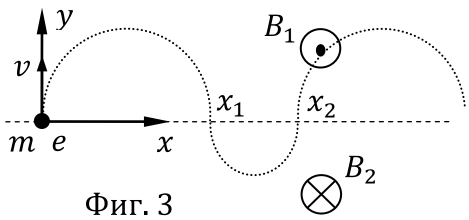
а) Когато и двата ключа са отворени, след зареждането на кондензатора във веригата няма да тече никакъв ток. **[0,25 т.]** Следователно крайното напрежение на кондензатора ще е равно на електродвижещото напрежение: $\frac{q^{\mathrm{OO}}}{C} = \mathcal{E}$. **[0,25 т.]** Т.е. големината на електродвижещото напрежение е $\mathcal{E} = \frac{q^{\mathrm{OO}}}{C} = 4{,}5\ \mathrm{V}$. **[0,5 т.]**

б) В този случай няма да тече ток през горния ляв резистор. **[0,5 т.]** Показанието на амперметъра ще бъде $I^{\text{OC}} = \frac{\mathcal{E}}{R_2+R_3+r} = \frac{q^{\text{OO}}}{C(R_2+R_3+r)} = 0{,}82$ A. **[1 т.]** Напрежението на кондензатора ще бъде равно на напрежението върху горния десен резистор. **[0,5 т.]** Съответно зарядът на кондензатора ще бъде $q^{\text{OC}} = CI^{\text{OC}}R_2 = \frac{q^{\text{OO}}R_2}{R_2+R_3+r} = 3{,}3$ μC. **[1 т.]**

в) В този случай през долния резистор няма да тече ток **[0,5 т.]** и показанието на амперметъра ще бъде $I^{\text{CO}} = \frac{\mathcal{E}}{R_1+R_2+r} = \frac{q^{\text{OO}}}{C(R_1+R_2+r)} = 1{,}29$ A. **[1 т.]** Кондензаторът ще има напрежение колкото напрежението върху горните два резистора **[0,5 т.]** и заряд $q^{\text{CO}} = CI^{\text{CO}}(R_1+R_2) = \frac{q^{\text{OO}}(R_1+R_2)}{R_1+R_2+r} = 7{,}7$ μC. **[1 т.]**

г) В този случай през всички резистори ще тече ток. **[0,5 т.]** Токът през амперметъра ще е $I^{\text{CC}} = \frac{\mathcal{E}}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2+r} = 1{,}38$ A. **[1 т.]** Напрежението между клемите на кондензатора ще бъде равно на напрежението върху горния десен резистор. **[0,5 т.]** Съответно за заряда на кондензатора се получава $q^{\text{CC}} = CI^{\text{CC}}R_2 = \frac{q^{\text{OO}}R_2}{\frac{R_1R_3}{R_1+R_3}+R_2+r} = 5{,}5$ μC. **[1 т.]**

Задача 3. Протон в магнитно поле.



Фиг. 3

а) Траекторията на протона е изобразена на фиг. 3. **[1 т.]** Протонът се движи по полуокръжности с различни радиуси. **[1 т.]**

б) Непосредствено след началния момент протонът ще се движи по окръжност в горната област, като дължината на радиуса на окръжността R_1 следва от факта, че магнитната сила изпълнява ролята на центростремителна сила. **[0,5 т.]** Така $evB_1 = mv^2/R_1$. **[0,5 т.]** Получава се, че $x_1 = 2R_1 = \frac{2mv}{eB_1} = 2{,}1$ cm. **[1 т.]** След това протонът навлиза в долната област с непроменена големина на скоростта, перпендикулярна на границата, и отново описва полуокръжност с радиус $R_2 = \frac{mv}{eB_2}$. Координатата на втората пресечна точка е $x_2 = x_1 + 2R_2 = \frac{2mv}{e}\left(\frac{1}{B_1}+\frac{1}{B_2}\right) = 3{,}5$ cm. **[1 т.]**

в) Лесно се вижда, че протонът извършва периодично движение, от което следва, че търсената средна скорост е равна на средната скорост за един период. **[1 т.]** Т.е. $\bar{v}_x = x_2/\left(\frac{\pi}{\omega_1}+\frac{\pi}{\omega_2}\right)$, където $\omega_1 = eB_1/m$ и $\omega_2 = eB_2/m$ са съответните ъглови скорости на протона в двете области. **[1 т.]** След опростяване се получава, че $\bar{v}_x = \frac{2v}{\pi} = 6{,}4$ km/s. **[1 т.]**

г) В този случай в долната област протонът ще се движи наляво по x. **[1 т.]** Затова големината на средната скорост ще бъде $\bar{v}'_x = \frac{2mv}{e}\left(\frac{1}{B_1}-\frac{1}{B_2}\right)/\left(\frac{\pi}{\omega_1}+\frac{\pi}{\omega_2}\right) = \frac{2(B_2-B_1)v}{\pi(B_1+B_2)} = 1{,}3$ km/s. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15-16.03.2014
Специална тема

Задача 1. ***Космическа станция***

Космическа станция обикаля Земята по кръгова орбита на височина h над земната повърхност. На земята, в равнината на орбитата на станцията, се намира наблюдател, който вижда станцията като малка светла движеща се точка в небето. Поради голямата отдалеченост на станцията в сравнение със собствения й размер, наблюдателят няма зрителна представа за разстоянието до станцията.

В тази задача можете да пренебрегнете околоосното въртене на Земята. Приемете Земята за еднородно кълбо с гладка повърхност. Оптичните аберации на атмосферата се пренебрегват.

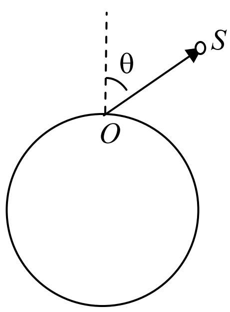
Основни данни

Радиус на Земята, $R = 6.37 \times 10^6\text{m}$

Гравитационно ускорение върху земната повърхност, $g_0 = 9.81\ \text{m/s}^2$

А) Получете израз за периода T на обикаляне на станцията като функция на h и основните данни. Пресметнете T за Международната космическа станция, която обикаля на височина 423 km над земята. **[2.5 т]**

Б) За колко време t наблюдателят ще вижда станцията на небето? Получете израз за t и го пресметнете за Международната космическа станция. **[1.5 т]**

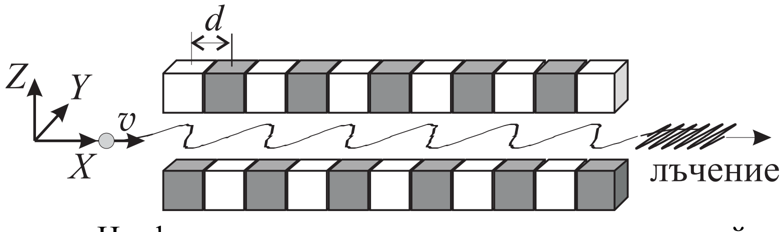


В) Станцията се намира над хоризонта в точка S, чийто радиус-вектор $\overrightarrow{OS}$ спрямо наблюдателя O сключва ъгъл θ с вертикалата (вж. фигурата). **Видимата** за наблюдателя скорост, с която станцията се движи на фона на звездното небе е равна на ъгловата скорост β, с която се завърта зрителният лъч $\overrightarrow{OS}$. Получете израз за β чрез T , R, h и моментната стойност на θ. **[3.5 т]**

Г) Получете израз за отношението β_z/β_h на видимата скорост β_zна станцията, когато минава през зенита (вертикално над наблюдателя) към видимата й скорост β_h в момента, когато се намира на хоризонта. **[1.5 т]**

Д) В момента, когато станцията минава през зенита, вертикално над наблюдателя на височина h_1 = 10 km прелита и самолет със скорост $v_1 = 300\ \text{m/s}$. Подобно на станцията, самолетът изглежда като малка движеща се точка. Кой от двата летателни апарата, станцията или самолетът, изглежда че се движи по-бързо? **[1.0 т]**

Задача 2. ***Лазер на свободни електрони***



На фигурата е показано принципното устройство на лазер, който работи със свободни електрони. Сноп електрони, ускорени до висока енергия, попада между две успоредни редици магнити с алтернативно ориентирани полюси – т.нар. **ондулатор**. Разстоянието между центровете на съседните магнити е d = 1.0 cm. Поради магнитните сили, електроните се движат по вълнообразна траектория, излъчвайки електромагнитни вълни. При релативистки скорости на електроните, лъчението е насочено почти изцяло в посоката на оста *X*.

А) Траекторията на електроните в ондулатора е синусоида, която лежи в равнината *XY* :

(1) $$y(x) = A\sin(kx + \phi)$$

където A, k и ϕ са съответно амплитудата, вълновият вектор и началната й фаза.

Получете израз за вълновия вектор k и пресметнете числената му стойност. **[1.0 т]**

Б) Електроните навлизат в ондулатора със скорост v. Определете компонентите на ускорението на електроните като функция на A, d и v в точки от траекторията с координати $y = 0$ и $y = +A$. **[2.5 т]**

В) Електроните в ондулатора извършват трептене в направление на оста *Y*. При амплитуди A, малки в сравнение с разстоянието d между магнитите, периодът на трептенето може да бъде записан приблизително във вида:

(2) $$T = T_0\left(1 + \alpha\left(\frac{A}{d}\right)^2\right)$$

където T_0 и α са параметри, които зависят само от d и v. Определете T_0 и α. **[1.0 т]**

Г) Намерете дължината λ на електромагнитната вълна, излъчена в посока на оста *X*. **[1.5 т]**

Д) Можете да приемете, че магнитната индукция в равнината на траекторията е насочена вертикално (по оста *Z*) и зависи от координатата *X* по закона:

(3) $$B_z = B_0\sin(kx)$$

където B_0 е амплитудата на магнитната индукция в ондулатора

На колко е равна фазата ϕ в уравнението (1) на траекторията? Посочете верния според вас отговор: $\phi = 0;\ \pi/2;\ \pi;\ 3\pi/2$ като го обосновете кратко. **[0.5 т]**

Е) Получете израз за амплитудата A на траекторията.

Пресметнете A числено за електрони с кинетична енергия $E_k = 50$ MeV и при амплитуда на магнитната индукция в ондулатора $B_0 = 0.15$ T. **[2.5 т]**

Ж) Пресметнете дължината λ на вълната, излъчена в посока на оста *X* при тази енергия на електроните. В кой диапазон на електромагнитния спектър се намира лъчението? **[1.0 т]**

Фундаментални константи

Скорост на светлината, $c = 3.0\ \times 10^8 \mathrm{m/s}$;

Елементарен заряд, $e = 1.6\ \times 10^{-19}$ C

Маса в покой на електрона, $m = 9.1\ \times 10^{-31}$kg.

Полезна формула: $(1+\delta)^n \approx 1 + n\delta$ при $|\delta| \ll 1$

Задача 3. ***Радиоактивна планета***

Кълбовидна планета с радиус $R = 6.4 \times 10^6$ m е съставена от вещество с плътност $\rho = 5.5 \times 10^3$ kg/m^3 , еднаква в твърдо и в течно състояние. Веществото съдържа малки количества изотопи $^{238}_{92}$U и $^{232}_{90}$Th, които търпят α-разпадане.* Периодите $T_{1/2}$ на полуразпадане и относителните масови концентрации c на двата изотопа са дадени в таблицата. След първото α-разпадане следва поредица значително по-бързи ядрени разпадания, докато се образуват стабилни изотопи на оловото. Сумарната енергия E, отделена в цялата поредица разпадания на дадено ядро, също е дадена в таблицата.

Изотоп	$T_{1/2}$ (10^9 години)	E (MeV)	c (kg изотоп/kg вещество)
$^{238}_{92}$U	4.5	47.5	3.1×10^{-8}
$^{232}_{90}$Th	14.0	41.8	1.2×10^{-7}

Отделената при разпаданията енергия води до загряване на веществото, поради което вътрешността на планетата е разтопена, а само тънка външна обвивка (кора) се намира в твърдо състояние. Топлопроводността на твърдата кора е $k_s = 2.9$ W · m^{-1} · K^{-1}, а на разтопената вътрешна част $k_m = 38.0$ W · m^{-1} · K^{-1}.**

А) Изчислете обемната плътност q (в единици W/m^3) на топлинната мощност, отделяща се във веществото поради радиоактивните разпадания. **[2.0 т]**

Б) Планетата няма атмосфера и е разположена далече от всякакви други източници на топлина. Можете да приемете, че повърхността ѝ излъчва като абсолютно черно тяло и температурата на Космоса е 0 K. Пресметнете температурата T_S на повърхността на планетата. **[1.5 т]**

В) На малка дълбочина h ($h \ll R$) под повърхността на планетата температурата на твърдата кора се променя приблизително по линеен закон: $T(h) \approx T_S + Ah$. Получете израз за константата A посредством q и другите известни параметри, и пресметнете числената ѝ стойност. **[2.5 т]**

Г) Определете дебелината d на твърдата кора на планетата. Приемете, че температурата на топене на веществото, изграждащо планетата, е $T_\mathrm{m} = 1500$ K. **[1.0 т]**

Д) Температурата $T(r)$ в разтопената вътрешна част зависи от разстоянието r до центъра на планетата по закона: $T(r) = T_C - B(r/R)^2$. Определете константата B и пресметнете температурата T_C в центъра на планетата. **[3.0 т]**

Основни константи:

Число на Авогадро, $N_A = 6.02 \times 10^{23}$ mol^{-1}

Елементарен заряд, $e = 1.60 \times 10^{-19}$ C

Константа на Стефан-Болцман, $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ W · m^{-2} · K^{-4}

*Приемете, че относителните атомни маси на двата изотопа са равни на масовите им числа.

**Топлопроводността k на дадено вещество се дефинира посредством закона на Фурие за преноса на топлина: $Q = -k\frac{dT}{dx}St$, където Q е количеството топлина, преминало за време t през площ S, перпендикулярна на посоката x, в която се променя температурата T. Знакът минус показва, че топлината се пренася в посока от по-висока към по-ниска температура.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, Сандански, 15-16.03.2014
Решения на Специалната тема

Задача 1. ***Космическа станция***

Основни данни

А) Понеже $g \propto \frac{1}{r^2}$, където r е разстоянието до центъра на Земята, следва:

$$g = \frac{g_0 R^2}{(R+h)^2}$$

При движение по кръгова орбита:

$$\frac{v^2}{R+h} = g$$

откъдето:

$$v = R\sqrt{\frac{g_0}{R+h}}$$

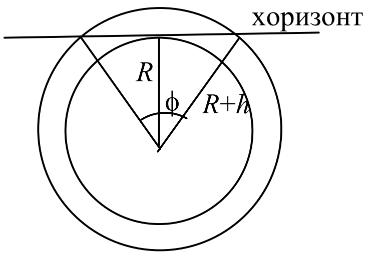
и

$$T = \frac{2\pi(R+h)}{v} = \frac{2\pi(R+h)^{3/2}}{R g_0^{1/2}} = 2\pi\sqrt{\frac{R\left(1+\frac{h}{R}\right)^3}{g_o}}$$

За Международната космическа станция:

$$T = 5.58 \times 10^3 \mathrm{s}$$

Б) Наблюдателят вижда тази част от траекторията, която е разположена над равнината на хоризонта. Тя представлява дъга, съответстваща на централен ъгъл:



$$\phi = 2\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

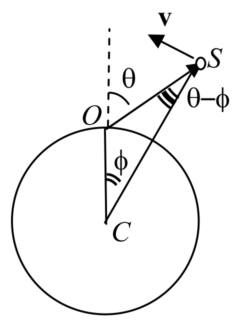
Времето, за което станцията се намира над хоризонта, е съответно:

$$t = \frac{T\phi}{2\pi} = \frac{2(R+h)^{3/2}}{R g^{1/2}}\arccos\left(\frac{R}{R+h}\right)$$

За Международната космическа станция получаваме:

$$t = 630 \text{ s} = 10.5 \text{ min}$$

В) Ъгловата скорост на станцията може да бъде изразена като:



$$\beta = \frac{v_\perp}{d}$$

където $d = |OS|$ е разстоянието между наблюдателя и станцията, а $v_\perp$ е компонентата на скоростта, перпендикулярна на зрителния лъч. От фигурата е ясно, че:

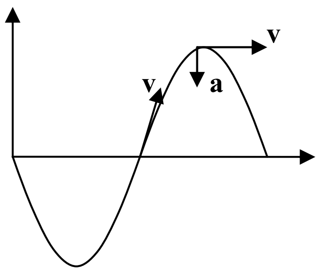
$$v_\perp = v\cos(\theta-\phi) = \frac{2\pi(R+h)\cos(\theta-\phi)}{T}$$
$$(R+h)^2 = d^2 + R^2 + 2dR\cos(\theta)$$
$$\frac{\sin(\theta-\phi)}{R} = \frac{\sin\theta}{R+h}$$
След кратки ☺ алгебрични преобразования намираме:
$$\beta = \frac{2\pi\sqrt{R^2\cos\theta^2 + 2Rh + h^2}}{T(\sqrt{R^2\cos\theta^2 + 2Rh + h^2} - R\cos\theta)}$$

Г) В зенита θ = 0 и:
$$\beta_z = \frac{2\pi(R+h)}{Th}$$
При пресичането на хоризонта θ = π/2 и съответно:
$$\beta_h = \frac{2\pi}{T}$$
Следователно:
$$\frac{\beta_z}{\beta_h} = 1 + \frac{R}{h}$$
Д) Ъгловата скорост на станцията в зенита е:
$$\beta_z = \frac{2\pi(R+h)}{Th} = 1.8\times10^{-2}\ \mathrm{rad/s}$$
В същия момент ъгловата скорост на самолета спрямо наблюдателя е:
$$\beta_1 = \frac{v_1}{h_1} = 3.0\times10^{-2}\ \mathrm{rad/s}$$
Следователно от земята ще изглежда, че самолетът се движи по-бързо от станцията.

Задача 2. Лазер на свободни електрони

А) Пространственият период на траекторията е равен на разстоянието между два магнита с еднаква полярност, което е $2d$. От условието:
$$y(x+2d) = y(x)$$
намираме $2kd = 2\pi$ или:
$$k = \frac{\pi}{d} \approx 314\ m^{-1}$$

Б) Понеже магнитната сила е насочена перпендикулярно на скоростта на електрона, скоростта му остава постоянна, докато се движи в магнититното поле:
$$v = \mathrm{const}$$
В точка с координата $y = 0$ скоростта на електрона сключва максимален ъгъл с оста X. Следователно в тази точка електронът има минимална компонента на скоростта по X и



максимална – по *Y*. От условието за екстремум на функция следва:

$$a_x(0) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0 \text{ и } a_y(0) = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = 0$$

В точка с координата $y = +A$ скоростта на електрона е успоредна на оста *X*. Следователно в тази точка електронът има максимална компонента на скоростта по *X* и от условието за екстремум получаваме:

$$a_x(A) = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = 0$$

Компонентата на скоростта по *Y* е нула, като променя знака си, поради което електронът има ненулево ускорение по *Y*. За да го определим, диференцираме уравнението на траекторията два пъти по времето:

$$\dot{y} = kA\cos(kx + \phi)\,\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -k^2 A\sin(kx + \phi)\dot{x}^2 + kA\cos(kx + \phi)\ddot{x} = -k^2 y\dot{x}^2 + kA\cos(kx + \phi)\ddot{x}$$

Понеже в тази точа $y = A, \dot{x} = v$ и $\ddot{x} = a_x = 0$, следва:

$$a_y(A) = -k^2 A v^2 = -\left(\frac{\pi v}{d}\right)^2 A$$

Като алтернативно решение, от условието $v = \mathrm{const}$ следва, че електронът има единствено нормално ускорение $a = Kv^2$, където $K = 1/R$ е кривината на траекторията. В точката $y = 0$ имаме $K = 0$ и $a = 0$. В точката $y = +A$ имаме $K = |y''(x)| = k^2 A$, откъдето, като съобразим, че ускорението е насочено в отрицателната посока на оста *y*, получаваме горния израз за компонентите.

В) Малък участък от траекторията има дължина:

$$\mathrm{d}s = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2} = \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1 + (kA\cos(kx + \phi))^2}\,\mathrm{d}x$$

Условието $A \ll d$ е еквивалентно на $kA \ll 1$. Като използваме приблизителното равенство на Бернули, получаваме:

$$\mathrm{d}s = \left(1 + \frac{1}{2}(kA\cos(kx + \phi))^2\right)\mathrm{d}x$$

Пътят, който изминава електронът за един период, е:

$$s = \int_0^{2d}\left(1 + \frac{1}{2}(kA\cos(kx + \phi))^2\right)\mathrm{d}x = 2d\left(1 + \left(\frac{kA}{2}\right)^2\right) = 2d\left(1 + \left(\frac{\pi A}{2d}\right)^2\right)$$

Понеже електронът се движи с постоянна скорост, времето за изминаване на този път е:

$$T = \frac{s}{v} = \frac{2d}{v}\left(1 + \left(\frac{\pi A}{2d}\right)^2\right)$$

Следователно:

$$T_0 = \frac{2d}{v} \text{ и } \alpha = \frac{\pi^2}{4}$$

Г) Дължината на вълната е равна на разстоянието между две вълнови повърхности, излъчени през интервал T една след друга. От момента на излъчването на първата повърхност, тя изминава разстояние:

$$l = cT$$

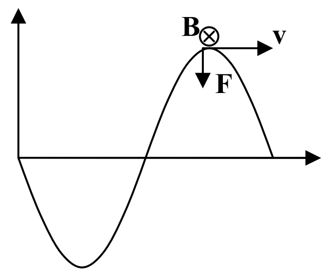
в посока на оста X. За същото време електронът изминава разсточние $2d$ в същата посока. Следователно дължината на вълната е:

$$\lambda = cT - 2d = 2d\left(\frac{c}{v} - 1\right) + \frac{\pi^2 A^2}{2d}\frac{c}{v}$$

Д) На електрона действа магнитна сила $\vec{F} = -e\vec{v} \times \vec{B}$, където знакът „–“ отчита отрицателния заряд на електрона. На фигурата е показана посоката на магнитната сила, когато електронът минава през върха на траекторията, т.е. когато $x = +A$. Като приложим правилото на лявата ръка (заради отрицателния заряд на електрона), определяме, че в същата точка магнитната индукция е насочена от нас към чертежа, т.е. $B_z = -B_0$. Следователно траекторията и магнитната индукция са в противофаза:

$$\phi = \pi$$

Е) Прилагаме II принцип на механиката за върха на траекторията:



$$\frac{m}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} k^2 A v^2 = evB_0$$

откъдето намираме:

$$A = \frac{eB_0}{mvk^2}\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

От релативистката връзка между импулс и енергия имаме:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} = \frac{\sqrt{E^2 - (mc^2)^2}}{c}$$

където $mc^2 = 0.51$ MeV е енергията в покой на електрона, а $E = mc^2 + E_k = 50.5$ MeV е пълната му релативистка енергия. Понеже $E \gg mc^2$, имаме:

$$\frac{mv}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \approx \frac{E}{c}$$

откъдето:

$$A = \frac{eB_0 c}{Ek^2} = 9.0 \times 10^{-6}\text{m}$$

Ж) Очевидно в израза за периода можем да пренебрегнем събираемото $\alpha\left(\frac{A}{d}\right)^2 = 2 \times 10^{-6}$. Тогава за λ получаваме приблизителен израз, който преобразуваме, като използваме,че $v \approx c$:

$$\lambda = 2d\left(\frac{c}{v} - 1\right) = \frac{2dc}{v}\left(1 - \frac{v}{c}\right) \approx d\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) = d\left(\frac{mc^2}{E}\right)^2 = 1.0 \times 10^{-6}\ \text{m} = 1.0\ \mu\text{m}$$

Това е лъчение в инфрачервената област на спектъра.

Задача 3. ***Радиоактивна планета***

А) Броят ядра от даден изотоп в единица обем се дава с израза:

$$N = \frac{N_A c\rho}{M}$$

където c е масовата концентрация на изотопа, а M – моларната му маса. Понеже броят ядра намалява с времето по закона:

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$$

където $\lambda = \ln 2\,/T_{1/2}$ е константата на разпадане, намираме броя разпадания за единица време в единица обем:

$$f = -\frac{dN}{dt} = \frac{\ln 2\, N_A c\rho}{T_{1/2} M}$$

Следователно отделената топлина за единица време в единица обем, вследствие от разпадането на дадения изотоп, е:

$$q = fE = \frac{\ln 2\, N_A c\rho E}{T_{1/2} M}$$

За $^{238}_{92}\mathrm{U}$ (M = 0.238 kg/mol) имаме $q(^{238}\mathrm{U}) = 1.6 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^3}$, а за $^{232}_{90}\mathrm{Th}$ (M = 0.232 kg/mol) имаме $q(^{232}\mathrm{Th}) = 1.8 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^3}$. Общата плътност на топлинната мощност е:

$$q = 3.4 \times 10^{-8}\ \mathrm{W/m^3}$$

Б) Общата мощност, която се отделя в планетата е:

$$P = \frac{4}{3}\pi R^3 q$$

Тази мощност се отделя под формата на излъчване от повърхността на планетата:

$$\sigma T_S^4 \cdot 4\pi R^2 = \frac{4}{3}\pi R^3 q$$

откъдето намираме:

$$T_S = \sqrt[4]{\frac{qR}{3\sigma}} = 34\ \mathrm{K}$$

В) Топлината се пренася към повърхността посредством топлопроводност. От закона на Фурие следва:

$$\frac{4}{3}\pi R^3 q = k_s \frac{dT}{dh} 4\pi R^2 = 4\pi R^2 k_s A$$

откъдето:

$$A = \frac{qR}{3k_s} = 0.025\ \mathrm{K/m} = 25\ \mathrm{K/km}$$

Г) На дълбочина $h = d$ имаме:

$$T_m = T_S + Ad$$

Следователно:

$$d = \frac{T_m - T_S}{A} = 5.86 \times 10^4\ \mathrm{m} = 58.6\ \mathrm{km}$$

Д) На границата между твърдата и течната част, $r = R - d$, потокът на топлината, идващ от течността, е равен на потока, минаващ през твърдата кора:

$$k_s \frac{dT}{dh}\bigg|_{h=d-\epsilon} = k_m \frac{dT}{dh}\bigg|_{h=d+\epsilon} = -k_m \frac{dT}{dr}\bigg|_{r=R-d-\epsilon}$$

Следователно:

$$k_s A = \frac{2k_m B(R-d)}{R^2}$$

$$B = \frac{k_s A R^2}{2k_m(R-d)} = 6.16 \times 10^3 \text{ K}$$

За границата между течността и твърдата кора имаме:

$$T_m = T_C - B\left(\frac{R-d}{R}\right)^2$$

Окончателно получаваме:

$$T_C = T_m + B\left(\frac{R-d}{R}\right)^2 = 7550 \text{ K}$$