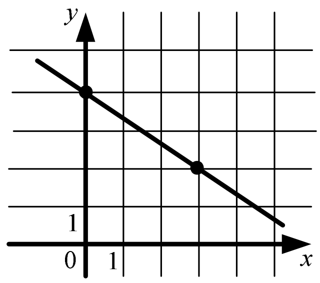
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И
ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2013

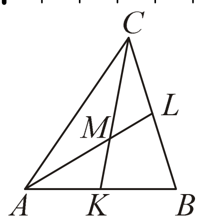
ТЕМА ЗА ОСМИ КЛАС

1. По-големият корен на уравнението $|x-3|+2|3-x|=3$ е равен на:

2. Запишете линейната функция, графиката на която е представена на чертежа, във вида $y=ax+b$.



3. На чертежа AL и CK са медиани в $\triangle ABC$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако лицето на $\triangle CML$ е 5 cm^2.



4. Три двулитрови шишета са пълни до половината с разтвор на спирт с различна концентрация. Концентрацията на спирта в първото шише е 10%. Половината от съдържанието на третото шише е прелято в първото, а другата половина е прелята във второто. В резултат, концентрацията на спирта в първото шише намаляла с 20%, а концентрацията на спирт във второто шише се увеличила с 20%. Колко процента е била първоначалната концентрация на спирт във второто шише?

5. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с медиана CM и височини AH и BK като $MC=AH$ и $AH \geq BK$. Точките E и L са петите на перпендикулярите от M към страните AC и BC. Намерете най-малката възможна стойност на $\sphericalangle EML$.

6. Намерете всички естествени числа n, за които числото $2013+n^2$ е точен квадрат.

Време за работа 3,5 ча́са.
Журито ви пожелава успешна работа!

В листа с отговори напишете <u>САМО ОТГОВОРА на първите три задачи</u>. Всеки правилен отговор се оценява с 2 точки.
На следващите <u>три задачи напишете ПОДРОБНО РЕШЕНИЕ</u>. Правилно и пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.

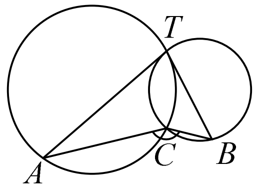
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И
ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2013

ТЕМА ЗА ДЕВЕТИ КЛАС

1. Най-малкият корен на уравнението $\left(\frac{3}{x}+4\right)^2+\left(\frac{3}{x}+4\right)=2$ е равен на:

2. Колко корена има уравнението $\sqrt{x^2+2x-15}=\sqrt{7x-19}$:



3. На чертежа TA и TB са допирателни към двете окръжности.
Ако $\sphericalangle CAT=30^\circ$ и $\sphericalangle CBT=40^\circ$, намерете $\sphericalangle ACB$.

4. Решете уравнението $\frac{8}{1-x^8}-\frac{4}{1+x^4}-\frac{2}{1+x^2}-\frac{1}{1+x}=-1$.

5. В $\triangle ABC$ точката J е център на вписаната в триъгълника окръжност. Върху страната AB е избрана точка M такава, че вписаните окръжности в $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ се допират до правата CM в една и съща точка . Намерете големината на $\sphericalangle JMA$.

6. Намерете всички естествени числа n такива, че за всеки естествен делител d на n, по-голям от 2, е изпълнено, че $d-1$ е просто число.

Време за работа 3,5 ча́са.
Журито ви пожелава успешна работа!

В листа с отговори напишете САМО ОТГОВОРА на първите три задачи. Всеки правилен отговор се оценява с 2 точки.
На следващите три задачи напишете ПОДРОБНО РЕШЕНИЕ. Правилно и пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И
ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2013

ТЕМА ЗА ДЕСЕТИ КЛАС

1. Колко корена има уравнението $\dfrac{x^3}{\sqrt{4-x^2}}+x^2-4=0$:

2. В триъгълника ABC: $AC=5$ cm**,** $BC=4$ cm и $\sphericalangle ACB=2\sphericalangle BAC$. Дължината на страната AB е:

3. Стойността на израза $\sqrt{1-\sin 2x}+\sqrt{1+\sin 2x}$, за $\sin x=\frac{3}{5}$, $x\in\left(0;90^\circ\right)$ е:

4. Намерете всички стойности на параметъра a, за които коренът на уравнението $a^2-ax+1=a-x$ е по-малък или равен на 3.

5. Върху окръжност $k(O;r)$ е избрана точка C, а точката M е среда на радиуса OC.
а) Нека AB е хорда през точката M перпендикулярна на радиуса OC. Намерете разстоянието от точката M до медицентъра на $\triangle ABC$.
б) Нека AB е произволна хорда през точката M. Намерете разстоянието от точката M до медицентъра на $\triangle ABC$.

Задача 6. За кои стойности на положителното реално число m, при всеки избор на ненулеви реални числа a, b и c, поне едно от уравненията

$$ax^2+bx+cm=0,\ bx^2+cx+am=0,\ cx^2+ax+bm=0$$

има реален корен.

Време за работа 3,5 ча́са.
Журито ви пожелава успешна работа!

В листа с отговори напишете САМО ОТГОВОРА на първите три задачи. Всеки правилен отговор се оценява с 2 точки.
На следващите три задачи напишете ПОДРОБНО РЕШЕНИЕ. Правилно и пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И
ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2013

ТЕМА ЗА ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

1. С цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 са написани всички трицифрени числа, цифрите на които са различни. Колко от тях имат сбор на цифрите си, равен на 12?

2. За коя стойност на x числата 2^{x+1}, 4^{x+2} и $\sqrt{2}^{x+3}$ в този ред са последователни членове на геометрична прогресия?

3. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC = BC$) ъглополовящите AN и BP се пресичат в точка Q, а върхът C лежи на окръжността, която минава през точките P, N и Q. Ако отсечката PN има дължина 3cm, периметърът на триъгълника PNQ е:

4. Квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$ има два различни реални корена, където a и b са реални параметри. Колко реални корена има квадратното уравнение $3x^2 + 2(a + p)x + b + ap = 0$, където p е реален параметър.

5. Дадени са две външно допиращи се окръжност с радиуси 3 cm и 1 cm. Намерете лицето на четириъгълника с върхове допирните точки на общите външни допирателни на двете окръжности.

6. Намерете аритметична прогресия, с първи член $a_1 > 0$ и разлика $d > 0$ за която отношението на сбора на първите n члена и сбора на следващите n члена не зависи от n.

Време за работа 3,5 чáса.
Журито ви пожелава успешна работа!

В листа с отговори напишете САМО ОТГОВОРА на първите три задачи. Всеки правилен отговор се оценява с 2 точки.
На следващите три задачи напишете ПОДРОБНО РЕШЕНИЕ. Правилно и пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.

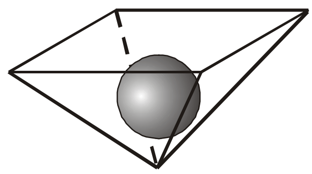
НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА
ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И
ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

ЛОВЕЧ – 2013

ТЕМА ЗА ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Корените на квадратното уравнение $2x^2-3x-7=0$ са x_1 и x_2. Пресметнете $\frac{x_1^2}{x_2}+\frac{x_2^2}{x_1}$.

2. Сфера с диаметър 10 cm е поставена в правилна четириъгълна пирамида с околни стени равностранни триъгълници. Ако сферата се побира изцяло в пирамидата, намерете разстоянието от центъра на сферата до върха на пирамидата.



3. Намерете най-голямото реално число $x>0$, за което $x^{x\sqrt{x}}=(x\sqrt{x})^x$.

4. Решете уравнението $4\sqrt{x^2-(a-1)x}=a-4x,$ където a е реален параметър.

5. В остроъгълен $\triangle ABC$ ($AB<AC$) е вписана окръжност с център J, която се допира до страната AB в точка M. Нека точките E и F са среди съответно на страните AC и BC. Нека правата AJ пресича правата EF в точка D и правата BC в точка T, а правата MD пресича страната BC в точка N.
а) Да се докаже, че $BT<BF$.
б) Да се намери големината на $\sphericalangle JNB$.

6. Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основен ръб $AB=\sqrt{2}$. Точката M е средата на ръба AA_1. Равнината λ, определена от M и върховете D и B_1, сключва със стената ADD_1A_1 ъгъл 60°. Намерете:
а) дължината на околния ръб на призмата;
б) лицето на сечението на призмата с равнината λ.

Време за работа 3,5 ча́са.
Журито ви пожелава успешна работа!

В листа с отговори напишете САМО ОТГОВОРА на първите три задачи. Всеки правилен отговор се оценява с 2 точки.
На следващите три задачи напишете ПОДРОБНО РЕШЕНИЕ. Правилно и пълно решение на всяка задача се оценява с 8 точки.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

НАЦИОНАЛНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО МАТЕМАТИКА ЗА УЧЕНИЦИ ОТ ПРОФИЛИРАНИ ГИМНАЗИИ И ПАРАЛЕЛКИ НА СОУ С ЧУЖДОЕЗИКОВ ПРОФИЛ

Примерни решения на задачите

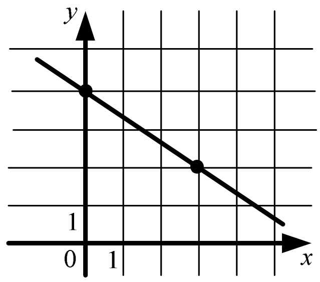
ЛОВЕЧ – 2013

ОСМИ КЛАС

1. По-големият корен на уравнението $|x-3| + 2|3-x| = 3$ е равен на:

Решение: При $x \geq 3$ имаме $|x-3|+2|3-x| = 3x-9 = 3$, откъдето $x_1 = 4$.
При $x < 3$ имаме $|x-3|+2|3-x| = 9-3x = 3$, откъдето $x_2 = 2$.
Отговор: $x = 4$.

2. Запишете линейната функция, графиката на която е представена на чертежа, във вида $y = ax + b$.

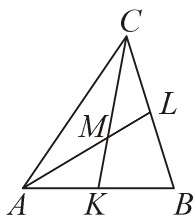


Решение: Понеже графиката минава през точката $(0;4)$ имаме $4 = a.0 + b$, откъдето $b = 4$. Понеже графиката минава през точката $(3;2)$, $2 = a.3 + 4$, откъдето $a = -\frac{2}{3}$.

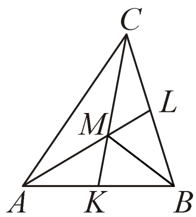
Следователно $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

Отговор: $y = -\frac{2}{3}x + 4$.

3. На чертежа AL и CK са медиани в $\triangle ABC$. Намерете лицето на $\triangle ABC$, ако лицето на $\triangle CML$ е 5 cm^2.



Решение: Нека $S_{ABC} = S$. Понеже CK е медиана $S_{CKB} = \frac{1}{2}S$. Тъй като M е медицентър $\frac{CM}{MK} = \frac{2}{1}$, откъдето $\frac{S_{CMB}}{S_{MBK}} = \frac{CM}{MK} = \frac{2}{1}$. Така намираме $S_{CMB} = \frac{1}{3}S$. Аналогично се получава, че $S_{CMA} = S_{AMB} = \frac{1}{3}S$.



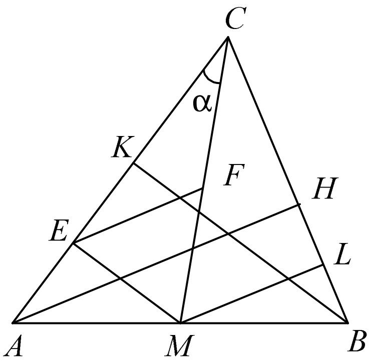
Тъй като ML е медиана в $\triangle CMB$, то $S_{CML} = \frac{1}{2}S_{CMB} = \frac{1}{6}S$.
Следователно $S_{CMB} = 10$ cm^2 и $S_{ABC} = 30$ cm^2.
Отговор: 30 cm^2.

4. Три двулитрови шишета са пълни до половината с разтвор на спирт с различна концентрация. Концентрацията на спирта в първото шише е 10%. Половината от съдържанието на третото шише е прелято в първото, а другата половина е прелята във второто. В резултат, концентрацията на спирта в първото шише намаляла с 20%, а концентрацията на спирт във второто шише се увеличила с 20%. Колко процента е била първоначалната концентрация на спирт във второто шише?

Решение: Във всяко от шишетата е имало по 1 литър = 1000 милилитра разтвор. Чистият спирт в първото шише е бил 100 милилитра. Да означим с x и y съответно количеството на чистия спирт във второто и третото шише. След преливането, в първото шише концентрацията става $\dfrac{100+\dfrac{y}{2}}{1500}$, а във второто – $\dfrac{x+\dfrac{y}{2}}{1500}$. Тогава, за първото шише получаваме уравнението $\dfrac{100+\dfrac{y}{2}}{1500} = 0,08$ (лявата страна е получена като

$\frac{10}{100} - 20\%$ от $\frac{10}{100} = \frac{10}{100} - \frac{2}{100} = \frac{8}{100}$). Намираме, че $y = 40$. Тогава за второто шише получаваме уравнението $\frac{x+20}{1500} = \frac{1,2x}{1000}$, откъдето намираме, че $x = 25$. Търсената концентрация е $\frac{25}{1000} = 2,5\%$.

5. Даден е остроъгълен триъгълник ABC с медиана CM и височини AH и BK като $MC = AH$ и $AH \geq BK$. Точките E и L са петите на перпендикулярите от M към страните AC и BC. Намерете най-малката възможна стойност на $\sphericalangle EML$.



Решение: От $\sphericalangle CLM = 90°$ и $ML = \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}CM$ следва, че $\sphericalangle MCL = 30°$. От $\sphericalangle CEM = 90°$, следва, че: $ME = \frac{1}{2}BK \leq \frac{1}{2}AH = \frac{1}{2}CM$. Нека точката F е средата на хипотенузата CM, а $\sphericalangle MCE = \alpha$. От неравенството $EF = \frac{1}{2}CM \geq ME$ следва, че $2\alpha = \sphericalangle EFM \leq \sphericalangle FME = 90° - \alpha$. Оттук $\sphericalangle MCE = \alpha \leq 30°$. Следователно $\sphericalangle ACB \leq 60°$. От последното получаваме, че $\sphericalangle EML = 180^0 - \sphericalangle ACB \geq 120^0$

6. Намерете всички естествени числа n, за които числото $2013 + n^2$ е точен квадрат.

Решение: Условието $2013 + n^2 = m^2$ е еквивалентно на $(m-n)(m+n) = 1.3.11.61$. Тъй като m и n са естествени, $m + n > m - n$ и следователно имаме следните четири възможности:

$$\left|\begin{array}{l} m-n=1 \\ m+n=2013 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} m-n=3 \\ m+n=671 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} m-n=11 \\ m+n=183 \end{array}\right., \quad \left|\begin{array}{l} m-n=33 \\ m+n=61 \end{array}\right..$$

От първата система получаваме $m = 1007$, $n = 1006$, от втората – $m = 337$, $n = 334$, от третата – $m = 97$, $n = 86$, а от четвъртата $m = 47$, $n = 14$. Така окончателно търсените стойности на n са 14, 86, 334 и 1006.

ДЕВЕТИ КЛАС

1. Най-малкият корен на уравнението $\left(\frac{3}{x} + 4\right)^2 + \left(\frac{3}{x} + 4\right) = 2$ е равен на:

Решение: Полагаме $\frac{3}{x} + 4 = y$ и получаваме уравнението $y^2 + y = 2$ с решения $y_1 = -2;\ y_2 = 1$. Оттук намираме $x_1 = -\frac{1}{2};\ x_2 = -1$.

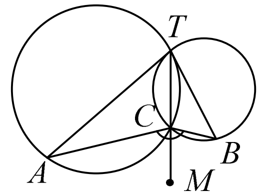
Отговор: -1.

2 Колко корена има уравнението $\sqrt{x^2 + 2x - 15} = \sqrt{7x - 19}$:

Решение: Уравнението има смисъл за $x \in (-\infty, -5] \cup [3, +\infty)$. Повдигаме на квадрат и получаваме $x^2 - 5x + 4 = 0$, чиито корени са 1 и 4. От тях само 4 е корен на даденото уравнение.

Отговор 1.

3. На чертежа TA и TB са допирателни към двете окръжности. Ако $\sphericalangle CAT = 30^\circ$ и $\sphericalangle CBT = 40^\circ$, намерете $\sphericalangle ACB$.



Решение: Имаме $\sphericalangle CAT = \sphericalangle CTB = 30^\circ$ и $\sphericalangle CBT = \sphericalangle CTA = 40^\circ$.
Но $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle BCM$. От друга страна
$\sphericalangle ACM = \sphericalangle CAT + \sphericalangle CTA = 70^\circ$ и $\sphericalangle BCM = \sphericalangle CBT + \sphericalangle CTB = 70^\circ$
Следователно $\sphericalangle ACB = 70^\circ + 70^\circ = 140^\circ$.
Отговор: $\sphericalangle ACB = 140^\circ$.

4. Решете уравнението $\frac{8}{1-x^8} - \frac{4}{1+x^4} - \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} = -1$.

Решение:Дефиниционното множество е $x \neq \pm 1$. Преобразуваме лявата страна:

$$\frac{8}{1-x^8} - \frac{4}{1+x^4} - \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{8-4\left(1-x^4\right)}{\left(1+x^4\right)\left(1-x^4\right)} - \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} =$$

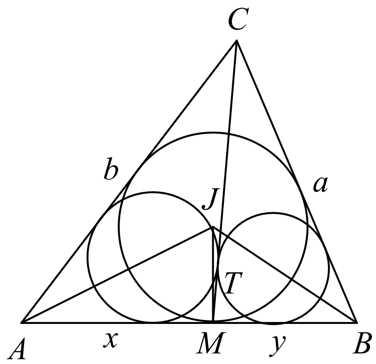
$$= \frac{4}{1-x^4} - \frac{2}{1+x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{4-2\left(1-x^2\right)}{\left(1+x^2\right)\left(1-x^2\right)} - \frac{1}{1+x} =$$

$$= \frac{2}{1-x^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{2-(1-x)}{(1+x)(1-x)} = \frac{1}{1-x}$$

Тогава $\frac{1}{1-x} = -1$, т.е. $1 = -1 + x$. Следователно $x = 2$.

5. В $\triangle ABC$ точката J е център на вписаната в триъгълника окръжност. Върху страната AB е избрана точка M такава, че вписаните окръжности в $\triangle ACM$ и $\triangle BCM$ се допират до една и съща точка върху правата CM. Намерете големината на $\sphericalangle JMA$.

Решение: Нека двете окръжности се допират до правата CM в точката T и $AC \geq BC$. Означаваме $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AM = x$ и $BM = y$. От $\frac{b + CM - x}{2} = CT = \frac{a + CM - y}{2}$ следва, че $x - y = b - a$. От $x + y = c$ получаваме, че $x = \frac{c+b-a}{2}$ и $y = \frac{a+c-b}{2}$.
Следователно точката M е допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната AB. Следователно $\sphericalangle JMA = 90^\circ$.



6. Намерете всички естествени числа n, такива че за всеки естествен делител d на n, по-голям от 2, числото $d-1$ е просто.

Решение: Нека първо забележим, че ако n има исканото свойство и $m \mid n$, то m също има това свойство.
Нека $n > 1$ е число, удовлетворяващо условието на задачата. Ако n има нечетен делител $d > 1$, то $d-1$ е четно просто число и следователно $d-1 = 2$, т.е. $d = 3$. Следователно n е число от вида $n = 2^k 3^s$, където k и s са неотрицателни цели числа,

като при това $s \le 1$. Тъй като $2^4 - 1 = 15$ не е просто, $k \le 3$. С директна проверка се установява, че $n = 2^3.3^1 = 24$ удовлетворява условието на задачата. Следователно търсените числа са всички естествени делители на 24 по-големи от 2.

ДЕСЕТИ КЛАС

1. Колко корена има уравнението $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0$:

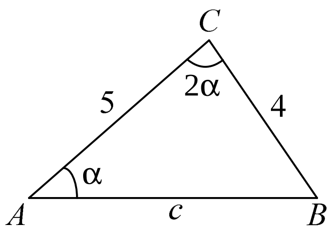
Решение: $\frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} + x^2 - 4 = 0 \Rightarrow \frac{x^3}{\sqrt{4-x^2}} = 4 - x^2$.

Определяме ДС: $4 - x^2 > 0$, следователно $x \in (-2; 2)$

Полагаме $\sqrt{4-x^2} = y > 0$ и получаваме уравнението $x^3 = y^3 \Rightarrow x = y > 0$, следователно ДС: $x \in (0; 2)$ и $x = \sqrt{4-x^2}$. След решаване на уравнението $x = \sqrt{4-x^2}$ получаваме $x_{1,2} = \pm\sqrt{2}$, но $x = -\sqrt{2} \notin$ ДС, следователно $x = \sqrt{2}$.

Отговор: 1.

2. В триъгълника ABC $AC = 5$ cm $BC = 4$ cm и $\sphericalangle ACB = 2\sphericalangle BAC$. Дължината на страната AB е:



Решение: От синусова теорема получаваме $\frac{4}{\sin\alpha} = \frac{c}{\sin 2\alpha}$, откъдето $\cos\alpha = \frac{c}{8}$. От косинусова теорема имаме

$16 = 25 + c^2 - 2.5c.\cos\alpha \Leftrightarrow 16 = 25 + c^2 - 2.5c.\frac{c}{8} \Leftrightarrow c^2 = 36$, откъдето $AB = 6$ cm.

Отговор: 6 cm.

3. Стойността на израза $\sqrt{1-\sin 2x} + \sqrt{1+\sin 2x}$, за $\sin x = \frac{3}{5}, x \in (0; 90°)$ е:

Решение: От $\sin x = \frac{3}{5}, x \in (0; 90°)$ имаме $\cos x = \frac{4}{5}$, откъдето $\sin 2x = 2\sin x \cos x = \frac{24}{25}$ и $\sqrt{1-\frac{24}{25}} + \sqrt{1+\frac{24}{25}} = \frac{1}{5} + \frac{7}{5} = \frac{8}{5}$.

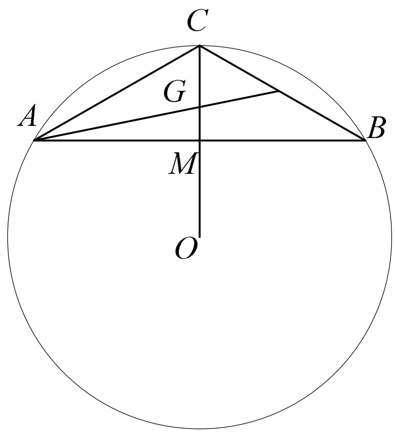
Отговор: $\frac{8}{5}$.

4. Намерете всички стойности на параметъра a, за които коренът на уравнението $a^2 - ax + 1 = a - x$ е по-малък или равен на 3.

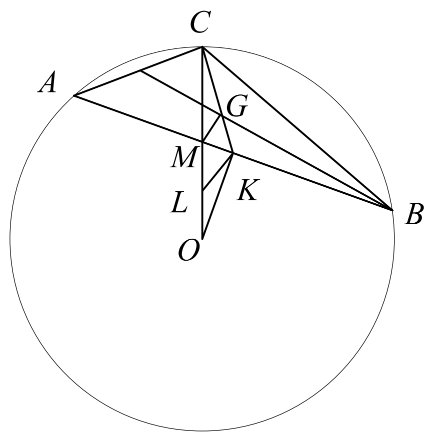
Решение: След преобразуване получаваме уравнението $(a-1)x = a^2 - a + 1$**.** При $a = 1$ уравнението няма решение, следователно $a \ne 1$. Тогава $x = \frac{a^2 - a + 1}{a - 1} \le 3$.

Получаваме $\frac{a^2 - 4a + 4}{a - 1} \le 0 \Rightarrow (a-2)^2 (a-1) \le 0$. Решенията са $a = 2;\ a \le 1$, но $a \ne 1$, следователно $a \in (-\infty; 1) \cup \{2\}$.

5. Върху окръжност $k(O;R)$ е избрана точка C, а точката M е среда на радиуса OC.
а) Нека AB е хорда през точката M, перпендикулярна на радиуса OC. Намерете разстоянието от точката M до медицентъра на $\triangle ABC$.
б) Нека AB е произволна хорда през точката M. Намерете разстоянието от точката M до медицентъра на $\triangle ABC$.



Решение: Нека точката G е медицентър на $\triangle ABC$.
а) От $AB \perp CM$, следва че CM е медиана на $\triangle ABC$.
От $\dfrac{GM}{CM} = \dfrac{1}{3}$ и $CM = \dfrac{R}{2}$ получаваме $GM = \dfrac{R}{6}$.



б) Нека точката K е среда на хордата AB. Ако точката L е средата на отсечката OM, то $\dfrac{CM}{ML} = \dfrac{\frac{R}{2}}{\frac{R}{4}} = \dfrac{2}{1} = \dfrac{CG}{GK}$.

Следователно $GM \parallel KL$. От $\sphericalangle OKM = 90^\circ$ следва, че $KL = \dfrac{OM}{2} = \dfrac{R}{4}$. От $\triangle CGM \sim \triangle CKL$ следва, че $\dfrac{GM}{KL} = \dfrac{2}{3}$, т.е. $GM = \dfrac{R}{6}$.

6. За кои стойности на неотрицателното реално число m, при всеки избор на ненулеви реални числа a, b и c, поне едно от уравненията:

$$ax^2 + bx + cm = 0,\ bx^2 + cx + am = 0,\ cx^2 + ax + bm = 0$$

има реален корен.

Решение: Ако $m = 0$, всяко едно от уравненията има корен.
Нека a, b, c и m са ненулеви реални числа, такива че нито едно от горните три уравнения няма реално решение. Тогава

$$\left| \begin{array}{l} b^2 < 4mac \\ c^2 < 4mba \\ a^2 < 4mcb \end{array} \right.$$

и следователно $a^2b^2c^2 < 64m^3a^2b^2c^2$, откъдето $m > \dfrac{1}{4}$.Следователно за всяко $0 \le m \le \dfrac{1}{4}$, при всеки избор на ненулеви реални числа a, b и c, поне едно от уравненията има реален корен.

Обратно, ако $m > \dfrac{1}{4}$ при $a = b = c = 1$ трите уравнения придобиват вида $x^2 + x + m = 0$, което има дискриминанта $D = 1 - 4m < 0$ и следователно нито едно от тях няма корен.

Втори начин:

Нека първо да разгледаме частния случай $a=b=c=1$. В този случай трите уравнения придобиват вида $x^2+x+m=0$, което има дискриминанта $D=1-4m$. При $m>\frac{1}{4}$, $D<0$ и значи нито едно от трите уравнения няма решение. Следователно числата $m>\frac{1}{4}$ не удовлетворяват условието на задачата.

Нека сега $0<m\le\frac{1}{4}$, а a, b и c са ненулеви реални числа, такива че първите две уравнения нямат решение, т.е. $\left|\begin{array}{l} b^2<4mac \\ c^2<4mba \end{array}\right.$. Тъй като числата b^2 и c^2 са положителни, от двете неравенства получаваме $b^2c^2<16m^2a^2bc$. Нещо повече – от това, че числата b^2 и c^2 са положителни, следва, че числата a, b и c имат един и същи знак, откъдето последното неравенство е еквивалентно на $bc<16m^2a^2$. Така за дискриминантата на третото уравнение получаваме

$$D=a^2-4mbc>a^2-64a^2m^3=a^2(1-64m^3)=a^2(1-4m)(16m^2+4m+1)\ge 0$$

и следователно третото уравнение има два различни реални корена.

Така търсените стойности на m са $0\le m\le\frac{1}{4}$.

ЕДИНАДЕСЕТИ КЛАС

1. С цифрите 2, 3, 4, 5 и 6 са написани всички трицифрени числа, цифрите на които са различни. Колко от тях имат сбор на цифрите си, равен на 12?

Решение: От 12 = 2 + 4 + 6 = 3 + 4 + 5 получаваме, че числата, които търсим, съдържат тройките числа (2, 4, 6) или (3, 4, 5). От всяка тройка можем да съставим по 6 различни числа.

Отговор: 12.

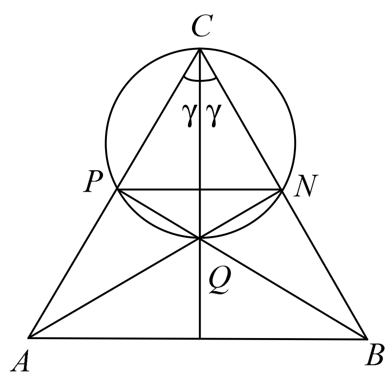
2. За коя стойност на x числата 2^{x+1}, 4^{x+2} и $\sqrt{2}^{x+3}$ в този ред са последователни членове на геометрична прогресия.

Решение: От $(4^{x+2})^2=2^{x+1}.\sqrt{2}^{x+3}$ следва $\sqrt{2}^{8(x+2)}=\sqrt{2}^{2(x+1)}.\sqrt{2}^{x+3}$, откъдето получаваме

$8(x+2)=2(x+1)+(x+3)$, което е еквивалентно на уравнението $-5x=11$.

Отговор: –2,2 = $-\frac{11}{5}$.

3. В равнобедрения триъгълник ABC ($AC=BC$) ъглополовящите AN и BP се пресичат в точка Q, а върхът C лежи на окръжността, която минава през точките P, N и Q. Ако отсечката PN има дължина 3 cm, периметърът на триъгълника PNQ е:



Решение: От $\triangle CAN\cong\triangle CBP$ ($AC=BC$, $AN=BP$, $\sphericalangle CAN=\sphericalangle CBP$) следва, че $CP=CN$. Тогава $\triangle CPQ\cong\triangle CNQ$ ($CP=CN$, $\sphericalangle PCQ=\sphericalangle NCQ$). Тъй като четириъгълникът $CPQN$ е вписан, то $\sphericalangle CPQ+\sphericalangle CNQ=180^\circ$, откъдето $\sphericalangle QPC=\sphericalangle QNC=90^\circ$. Тогава AN е височина и ъглополовяща, откъдето следва, че $AC = AB$, т.е. $\triangle ABC$ е равностранен. Тогава $\sphericalangle PCQ = \sphericalangle NCQ = 30°$ Следователно в $\triangle QNP$: $\sphericalangle QNP = \sphericalangle QPN = 30°$ и $QP = QN$. Оттук по синусовата теорема имаме $\dfrac{PQ}{\sin 30°} = \dfrac{PN}{\sin 120°}$, откъдето $PQ = \dfrac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$. Следователно $PN + PQ + QN = 3 + 2\sqrt{3}$.

Отговор: $3 + 2\sqrt{3}$.

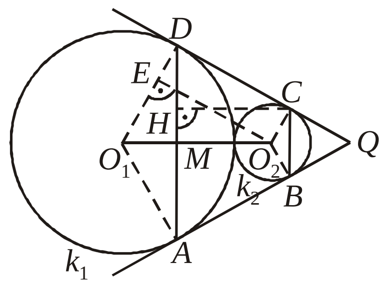
4. Квадратното уравнение $x^2 + ax + b = 0$ има два различни реални корена, където a и b са реални параметри. Колко реални корена има квадратното уравнение $3x^2 + 2(a+p)x + b + ap = 0,$ където p е реален параметър.

Решение: Тъй като уравнението $x^2 + ax + b = 0$ има два различни реални корена, то $a^2 - 4b > 0.$ За дискриминантата на второто уравнение имаме $D = a^2 - ap + p^2 - 3b.$ След отделяне на точен квадрат получаваме $D = \left(\dfrac{a}{2} - p\right)^2 + \dfrac{3}{4}\left(a^2 - 4b\right),$ което е положително.

Следователно второто уравнение има два различни реални корена.

Забележка. Доказването, че дискриминантата $D > 0$ може да се получи, като тя се разгледа като квадратен тричлен относно p, чиято дискриминанта е $-3\left(a^2 - 4b\right).$

5. Дадени са две външно допиращи се окръжност с радиуси 3 cm и 1 cm. Да се намери лицето на четириъгълника с върхове допирните точки на общите външни допирателни на двете окръжности.



Решение: Нека окръжностите са $k_1\left(O_1; R = 3\right)$ и $k_2\left(O_2; r = 1\right)$ и допирателните се пресичат в точка Q. От $QA = QD$ и $QC = QB$ следва $AD \parallel BC$ и $AB = DC$, т.е. $ABCD$ е равнобедрен трапец. Нека $O_2E \parallel CD.$ Тогава $O_2E \perp O_1D$ и от $\triangle O_1O_2E$ намираме

$EO_2 = \sqrt{(R+r)^2 - (R-r)^2} = 2\sqrt{Rr},$ т.е. $AB = CD = 2\sqrt{Rr}.$ От $\triangle O_1O_2E \sim \triangle O_1DM$ имаме $\dfrac{DM}{O_2E} = \dfrac{O_1D}{O_1O_2},$ откъдето $DM = \dfrac{2R\sqrt{Rr}}{R+r}$ и $AD = \dfrac{4R\sqrt{Rr}}{R+r}.$ От $\triangle AO_1D \sim \triangle BO_2C$ получаваме $BC = \dfrac{4r\sqrt{Rr}}{R+r}.$

Нека $CH \perp AD.$ От $\triangle CDH \sim \triangle O_2O_1E$ имаме $\dfrac{CH}{O_2E} = \dfrac{CD}{O_1O_2},$ откъдето $CH = \dfrac{4Rr}{R+r}.$ Така

$S = \dfrac{1}{2}(AD + BC)CH = \dfrac{8Rr\sqrt{Rr}}{R+r} = 6\sqrt{3},$ или $S = 6\sqrt{3}$ cm^2.

Втори начин:

Нека окръжностите са $k_1\left(O_1; R = 3\right)$ и $k_2\left(O_2; r = 1\right)$ и допирателните се пресичат в точка Q. От $QA = QD$ и $QC = QB$ следва $AD \parallel BC$ и $AB = DC$, т.е. $ABCD$ е равнобедрен трапец. Тъй като $\sphericalangle O_1AQ = \sphericalangle O_2BQ = 90°$, то $\Delta O_1AQ \sim \Delta O_2BQ$. Следователно $\dfrac{O_1A}{O_2B} = \dfrac{O_1Q}{O_2Q}$, откъдето $\dfrac{3}{1} = \dfrac{O_1O_2 + O_2Q}{O_2Q} = \dfrac{4 + O_2Q}{O_2Q}$ и значи $O_2Q = 2$. Така $O_1Q = 6$ е хипотенуза в правоъгълния триъгълник ΔO_1AQ ($\sphericalangle O_1AQ = 90^\circ$) с катет $O_1A = 3$ и значи $\sphericalangle AO_1Q = 60^\circ$. Тъй като AM е височината през върха A в ΔO_1AQ, $AM = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ и значи $AD = 2AM = 3\sqrt{3}$. Използвайки отново подобието $\Delta O_1AQ \sim \Delta O_2BQ$, получаваме $BC = \sqrt{3}$. От ΔO_1AQ имаме още $O_1M = O_1A\cos 60^\circ = \frac{3}{2}$ и $MQ = O_1Q - O_1M = \frac{9}{2}$. Нека N е пресечната точка на BC и O_1Q. Тогава от подобието $\Delta O_1AQ \sim \Delta O_2BQ$ имаме $NQ = \frac{1}{3}MQ = \frac{3}{2}$ и следователно $MN = O_1Q - O_1M - NQ = 3$. Следователно търсеното лице е $S = \frac{AD+BC}{2}MN = \frac{3\sqrt{3}+\sqrt{3}}{2}.3 = 6\sqrt{3}$.

6. Намерете аритметична прогресия, с първи член $a_1 > 0$ и разлика $d > 0$ за която отношението на сбора на първите n члена и сбора на следващите n члена не зависи от n.

Решение: От условието получаваме $\frac{a_1 + ... + a_n}{a_{n+1} + ... + a_{2n}} = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + 2nd + (n-1)d}$. Този израз не зависи от n тогава и само тогава, когато $\frac{2a_1 + (n-1)d}{2a_1 + 2nd + (n-1)d} = C$, където $C = const$, следователно $2a_1 + (n-1)d = \left(2a_1 + (3n-1)d\right)C$. От тук получаваме $(1-3C)dn = (2a_1 - d)(C-1)$. Това равенство е вярно за всяко n тогава и само тогава, когато е изпълнено $\left|\begin{array}{l}(1-3C)d = 0 \\ (2a_1 - d)(C-1) = 0\end{array}\right.$.

От първото уравнение: $1 - 3C = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{3}$.

Ако $C = \frac{1}{3}$, то от второто уравнение $(2a_1 - d)\left(\frac{1}{3} - 1\right) = 0 \Rightarrow (2a_1 - d)\left(-\frac{2}{3}\right) = 0$.

Следователно $2a_1 - d = 0 \Rightarrow d = 2a_1 > 0$. Така получаваме прогресията $a; 3a; 5a; 7a; ....,\ (a > 0)$.

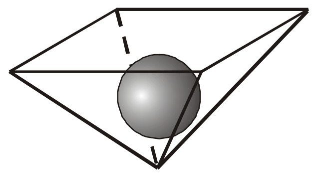
ТЕМА ЗА ДВАНАДЕСЕТИ КЛАС

1. Корените на квадратното уравнение $2x^2 - 3x - 7 = 0$ са x_1 и x_2. Пресметнете $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$.

Решение: От формулите на Виет имаме $x_1 + x_2 = \frac{3}{2}$ и $x_1.x_2 = -\frac{7}{2}$. Последователно пресмятаме $\frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1+x_2)}{x_1x_2} = \frac{\frac{27}{8} + 3\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{2}}{-\frac{7}{2}} = -\frac{153}{28}$.

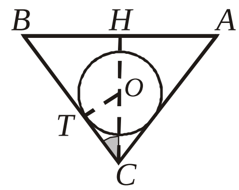
Отговор: $-\frac{153}{28}$.

2. Сфера с диаметър 10 cm е поставена в правилна четириъгълна пирамида с околни стени равностранни триъгълници. Ако сферата се допира до стените на пирамидата, намерете разстоянието от центъра на сферата до върха на пирамидата.



Решение: Голям кръг на сферата се допира до апотемите на две срещулежащи стени на пирамидата, като се намира изцяло вътре в триъгълника с бедра тези апотеми. Ако ръбът на пирамидата е a, $AB = a$ и $AC = BC = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, а $OT = 5$. Ако $\sphericalangle OCB = \alpha$,

$\sin\alpha = \frac{BH}{BC} = \frac{a}{2} : \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ и от $\triangle OTC$ намираме $OC = \frac{OT}{\sin\alpha} = 5\sqrt{3}$, или $OC = 5\sqrt{3}$ cm.



Отговор: $5\sqrt{3}$ cm.

3. Намерете най-голямото реално число $x > 0$, за което $x^{x\sqrt{x}} = (x\sqrt{x})^x$.

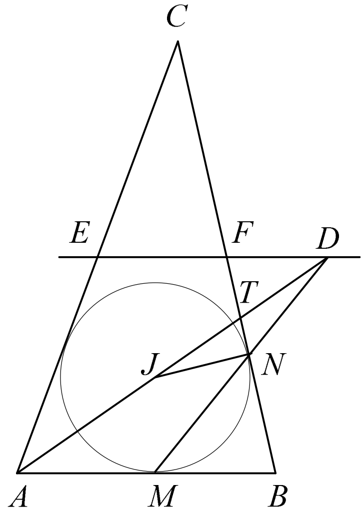
Решение: Очевидно $x = 1$ е решение на уравнението. Нека сега $x \neq 1$. Тъй като $(x\sqrt{x})^x = \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^x = x^{\frac{3x}{2}}$, даденото уравнение приема вида $x^{x\sqrt{x}} = x^{\frac{3x}{2}}$ и значи е еквивалентно на $x^{x\sqrt{x}-\frac{3x}{2}} = 1$. Оттук, имайки предвид, че $x \neq 1$, получаваме $x\sqrt{x} - \frac{3x}{2} = 0$, откъдето $x = \frac{9}{4}$.

Отговор: $x = \frac{9}{4}$.

4. Решете уравнението $4\sqrt{x^2 - (a-1)x} = a - 4x,$ където a е реален параметър.

Решение: При $a - 4x < 0$ уравнението няма решение. При $a - 4x \geq 0$, в дефиниционното си множество $\left(x^2 - (a-1)x \geq 0\right)$, уравнението е еквивалентно на $16\left(x^2 - (a-1)x\right) = (a-4x)^2$, откъдето получаваме $8(2-a)x = a^2$. При $a \neq 2$ намираме $x = \frac{a^2}{8(2-a)}$. Получената стойност на x със сигурност е от дефиниционното множество на уравнението, и за да е решение трябва да е изпълнено неравенството $a - 4x \geq 0.$ Имаме $a - \frac{4a^2}{8(2-a)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4a-3a^2}{2(2-a)} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{a(4-3a)}{2(2-a)} \geq 0.$ Решението на последното неравенство е $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right] \cup (2; +\infty).$ Следователно при $a \in \left[0; \frac{4}{3}\right] \cup (2; +\infty)$ уравнението има единствено решение $x = \frac{a^2}{8(2-a)}$. При $a \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{4}{3}; 2\right]$ уравнението няма решение.

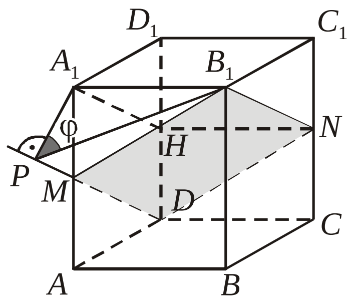
5. В остроъгълен $\triangle ABC$ ($AB < AC$) е вписана окръжност с център J, която се допира до страната AB в точка M. Нека точките E и F са среди съответно на страните AC и BC. Нека правата AJ пресича правата EF в точка D и правата BC в точка T, а правата MD пресича страната BC в точка N.
а) Да се докаже, че $BT < BF$.
б) Да се намери големината на $\sphericalangle JNB$.



Решение: Означаваме $BC = a$, $AC = b$ и $AB = c$, а по-надолу ще използваме стандартните означения за триъгълник.
а) От $AB < AC$ следва, че $BT < TC$. Тъй като $BF = FC$, то $BT < BF$.
б) От $ED \parallel AB$ следва, че $\triangle MBN \sim \triangle DFN$. От подобието следва, че $\dfrac{BN}{NF} = \dfrac{BM}{FD}$. $\triangle ADE$ е равнобедрен, откъдето следва че $FD = ED - EF = AE - EF = \dfrac{b-c}{2}$.

От $\dfrac{BN}{BF - BN} = \dfrac{MB}{FD}$ след заместване получаваме $\dfrac{BN}{a - 2BN} = \dfrac{MB}{b-c}$. Следователно $\dfrac{b-c+2BM}{BM} = \dfrac{a}{BN}$. От последното равенство и $2BM = a + c - b$ следва, че $BN = BM$. Следователно $\sphericalangle JNB = 90°$.

6. Дадена е правилна четириъгълна призма $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с основен ръб $AB = \sqrt{2}$. Точката M е средата на ръба AA_1. Равнината λ, определена от M и върховете D и B_1, сключва със стената ADD_1A_1 ъгъл 60°. Да се намери:
а) дължината на околния ръб на призмата;
б) лицето на сечението на призмата с равнината λ.



Решение: Сечението е успоредникът $MDNB_1$, където N е средата на ръба CC_1.
а) Нека $\mu = (ADD_1A_1)$. Понеже $A_1 = \text{пр}_\mu B_1$, ако $A_1P \perp DM$, то по теоремата за трите перпендикуляра $B_1P \perp DM$.
Следователно $\sphericalangle A_1PB_1 = \varphi$ е линейният на двустенния, т.е. $\varphi = 60°$. От правоъгълния триъгълник A_1PB_1 имаме $\dfrac{A_1B_1}{A_1P} = \operatorname{tg} 60° = \sqrt{3}$, откъдето $A_1P = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$.

Нека $AA_1 = 2A_1M = 2x$. От $\triangle A_1PM \sim \triangle DAM \Rightarrow \dfrac{A_1P}{AD} = \dfrac{A_1M}{DM}$ и $DM = \sqrt{2 + x^2}$ получаваме $A_1P = \dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2+x^2}}$. Следователно $\dfrac{\sqrt{2}x}{\sqrt{2+x^2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, откъдето намираме $x = 1$ и $AA_1 = 2$.
б) Нека S_λ е лицето на сечението и λ пресича ръба CC_1 в точка N. Тъй като M е средата на ръба AA_1, то N е средата на ръба CC_1. Оттук $DM = MB_1 = B_1N = ND$, т.е. четириъгълникът DMB_1N е ромб. Тогава $S_\lambda = \dfrac{1}{2} MN.DB_1$. От $MN = AC = \sqrt{AB^2 + BC^2} = 2$ и $DB_1 = \sqrt{BD^2 + BB_1^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$ намираме $S_\lambda = 2\sqrt{2}$.

Задачите са предложени от:Кирил Банков(8.4; 9.4), Мадлен Христова (8.1; 11.1; 11.2;), Симеон Замковой (8.5; 9.5;10.5;11.4;12.5), Таня Ичева (9.1;10.1; 10.4; 11.6), Теодоси Витанов (8.3; 9.2; 10.2; 10.3; 11.5; 12.1;12.2;12.4), Христо Ганчев (8.6; 9.6; 10.6; 12.3), Чавдар Лозанов (8.2; 9.3; 11.3; 12.6).

Брошурата е подготвена от Чавдар Лозанов.