МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

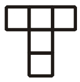
ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

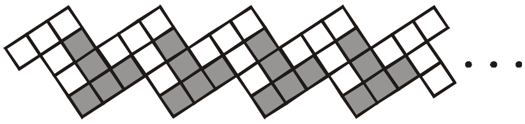
29 – 31 март 2013 г., Варна

Тема за 4 клас

Задача 1. Да се възстанови умножението $\dfrac{*7**.6}{*2*84}$.

Задача 2. От 5 еднакви квадратчета със страна 1 см е образувана буква „**Т**”, която е показана вдясно. Взети са 2013 такива „букви” и са подредени една до друга, както е показано на чертежа по-долу:





Намерете лицето и обиколката на получената фигура.

Задача 3. Числата от 1 до 9 се разполагат в таблица от три реда и три стълба. Едно разположение ще наричаме *правилно*, ако сборовете на всеки две съседни числа по диагонал са различни. Възможно ли е да се поставят липсващите числа така, че полученото разположение да е правилно? Обосновете отговора си.

9	**4**	**8**
♥	♣	**7**
♦	♠	**1**

Задача 4. Войник марширува по следния начин: тръгва по права линия, изминава 1 м и се обръща под прав ъгъл наляво; изминава 2 м по права линия и се обръща под прав ъгъл наляво; изминава 3 м по права линия и се обръща под прав ъгъл наляво и т.н. (всеки път увеличава с 1 м разстоянието, което изминава по права линия).

а) На какво най-малко разстояние от началното си положение преминава войникът, когато между две последователни обръщания наляво той изминава 11 м?

б) Колко метра ще е изминал войникът от началото на маршировката до момента, в който ще е изминал последната отсечка, намираща се на разстояние 10 м от началното му положение?

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

29 – 31 март 2013 г., Варна

Тема за 5 клас

Задача 1. Илиана пресметнала вярно стойността на израза

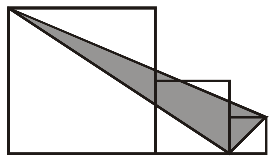
$$(0{,}5 + 2{,}01.20{,}11 + 20{,}11.2{,}012).(2{,}01.20{,}11 + 20{,}11.2{,}012 + 2{,}012.20{,}13),$$

а Иван пресметнал вярно стойността на израза

$$(0{,}5 + 20{,}1.2{,}011 + 2{,}011.20{,}12 + 20{,}12.2{,}013).(20{,}1.2{,}011 + 2{,}011.20{,}12).$$

С колко получената от Илиана стойност е по-голяма от тази на Иван?

Задача 2. Дължините на страните на квадратите на чертежа са съответно 12 см, 6 см и 3 см. Да се намери лицето на затъмнения триъгълник.



Задача 3. Дадени са 4 последователни естествени числа, по-малки от 3000. Най-малкото от тях се дели на 4, следващото на 7, третото на 10 и най-голямото на 13. Кое може да е най-малкото от тези числа?

Задача 4. По колко различни начина може да се оцвети надписът „ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ ВАРНА 2013”, като се използват пет различни цвята – червен, зелен, жълт, черен, син – и са изпълнени следните условия:

(1) Всяка дума се оцветява в един цвят (ще наричаме и числото 2013 „дума”).
(2) Различните думи са оцветени в различни цветове.
(3) „ВАРНА” не е черна, „2013” не е жълта и „ПРОЛЕТНИ” не е зелена.

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

29 – 31 март 2013 г., Варна

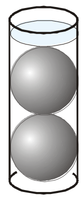
Тема за 6 клас

Задача 1. Да се подредят по големина числата:

$$x=\frac{\left(-1\right)^{2013}}{\left(2013^4-20{,}13^7\right)^0}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}\right)^2,\ y=\frac{\left(-2^5\right)^5}{\left(-2^7\right)^4}\cdot\left(\frac{4}{5}0{,}9^3+27{,}1\cdot 0{,}2^3\right) \text{ и}$$

$$z=\left(\left|(-3^6)^3\right|+(-3^2)^9\right)^5.$$

Задача 2. В цилиндричен съд с диаметър 12 см е налято някакво количество вода. В съда се пускат две плътни тежки топки, всяка с диаметър 12 см. След като се пуснат топките, височината на водния стълб е 27 см. Колко сантиметра е височината на водния стълб преди пускане на топките?



Задача 3. Числото 17 е представено като сбор на положителни цели числа. Намерете възможно най голямото произведение на такива числа.

Задача 4. Във всяко поле на квадратна таблица 5×5 е записано цяло число. За един ход се избират две съседни полета (т.е. полета с обща страна) и числата в тях се умножават по (-1). Сигурно ли е, че можем с редица от ходове да направим:

а) всички числа неотрицателни;

б) всички сборове на числа в две съседни полета неотрицателни?

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

29 – 31 март 2013 г., Варна

Тема за 7 клас

Задача 1. Даден е 720 г воден разтвор на сол. Колко грама вода трябва да се долеят, за да се получи разтвор, в който процентното съдържание на сол е с $\frac{1}{5}$ пъти по-малко от това в първоначалния?

Задача 2. Даден е остроъгълен ΔABC, в който $BC > AC$. Ако T и P са петите на височините съответно от върховете A и B, да се докаже, че $S_{ABT} > S_{ABP}$.

Задача 3. Ако увеличим едно трицифрено число с квадрата на една от цифрите му, получаваме число, равно на сбора от първите две цифри и третата степен на третата цифра на първоначалното число. Кое може да е това число?

Задача 4. Квадрат с размери $n\times n$ в сантиметри (n е естествено число) е разделен на единични квадратчета със страни 1 см и във върховете му е поставена по една пионка. За един ход четирите пионки се преместват едновременно на разстояние 1 см хоризонтално или вертикално. Възможно ли е след определен брой ходове да се обходят всички страни на единичните квадратчета точно по веднъж във всяка от двете посоки и пионките да се върнат в изходните си позиции, ако не е разрешено едновременно пребиваване на пионки във върховете на единичните квадратчета? Не е задължително обхождането на страна на единично квадратче да се осъществява от една и съща пионка и в двете посоки. Обосновете отговора си при:

а) $n=2$; б) $n=3$; в) $n=5$.

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

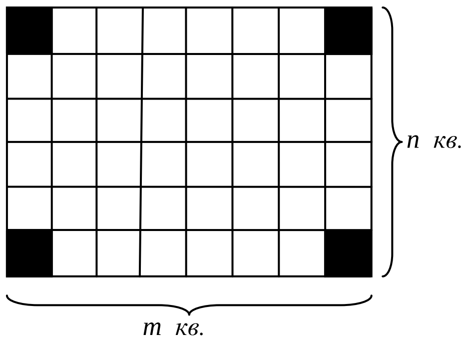
29 – 31 март 2013 г., Варна

Тема за 8 клас

Задача 1. Да се намерят всички реални числа x и y, за които $x<y$ и $|6x-6y+24|=x^2+y^2-6$, ако е известно, че в интервала $[x;y]$ се съдържат поне 5 цели числа.

Задача 2. Дадени са успоредниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове средите на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 е успоредник или четирите среди лежат на една права.

Задача 3. Четирите ъглови квадратчета на квадратна мрежа $m\times n$, където $m>n>6$ са естествени числа, са оцветени в черно. Разглеждаме правоъгълниците с върхове във върховете на мрежата и страни по линиите на мрежата. Ако броят на тези, които съдържат поне едно черно квадратче, е равен на 2013, намерете броя на правоъгълниците без черни квадратчета.



Задача 4. Да се намерят всички естествени числа $n>1$, за които естественото число

$$N=n^5-n^4+2n^3-2n^2+2n-1$$

е степен на просто число.

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА
СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

ПРОЛЕТЕН МАТЕМАТИЧЕСКИ ТУРНИР

В А Р Н А

29 март – 31 март 2013 г.

ЗАДАЧИ, ПРИМЕРНИ РЕШЕНИЯ

ПРИМЕРНИ КРИТЕРИИ ЗА ОЦЕНЯВАНЕ

4 – 8 КЛАС

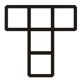
Решения и примерно точкуване

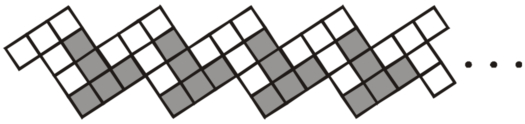
Задача 4.1. Да се възстанови умножението $\dfrac{*7**.6}{*2*84}$.

Решение: За да бъде цифрата на единиците на произведението равна на 4, цифрата на единиците на първия множител трябва да е 4 или 9. Не е възможно тя да е 9, тъй като тогава преносът е нечетно число (5) и няма как да се получи цифра на десетиците на произведението равна на 8 (сборът на четно и нечетно число е нечетно число). Следователно цифрата на единиците на първия множител е 4 и преносът е 2. **(1 т.)** За да бъде цифрата на десетиците на произведението равна на 8, цифрата на десетиците на първия множител трябва да е 1 или 6. **(1 т.)** Ако тя е 1, няма да има пренос и цифрата на стотиците на произведението е 2, а преносът е 4. Тогава цифрата на хилядите на множителя е 3 или 8, понеже 6.8 = 48 и с пренос 4 получаваме 52 или 6.3 = 18 и с пренос 4 получаваме 22. **(1 т.)** Ако цифрата на десетиците на първия множител е 6, преносът е 3, цифрата на стотиците на произведението е 5 и преносът е 4. Както по-горе, за цифрата на хилядите на първия множител се получава 3 или 8. **(1 т.)** Така стигаме до следните четири решения:

$$\frac{3714.6}{22\,284},\quad \frac{8714.6}{52\,284},\quad \frac{3764.6}{22\,584},\quad \frac{8764.6}{52\,584}.$$ **(2 т.)**

Задача 4.2. От 5 еднакви квадратчета със страна 1 см е образувана буква „**Т**”, която е показана вдясно. Взети са 2013 такива „букви” и са подредени една до друга, както е показано на чертежа по-долу:





Намерете лицето и обиколката на получената фигура.

Решение: Всяка буква „Т” има лице 5 кв. см. Фигурата е съставена от 2013 букви и следователно лицето ѝ е 2013.5 = 10 065 кв. см. **(2 т.)**

Да групираме буквите по двойки. **(1 т.)** Лявата външна двойка има обиколка (която участва в обиколката на цялата фигура) 13 см. **(1 т.)** Всяка следваща вътрешна двойка участва в обиколката на фигурата с 10 см и накрая (понеже 2013 е нечетно число) остава една фигура, с която се добавят още 9 см. **(1 т.)** Така за обиколката на фигурата получаваме $13+1005.10+9=10\,072$ см. **(1 т.)**

Задача 4.3. Числата от 1 до 9 се разполагат в таблица от три реда и три стълба. Едно разположение ще наричаме *правилно*, ако сборовете на всеки две съседни числа по диагонал са различни. Възможно ли е да се поставят липсващите числа така, че полученото разположение да е правилно? Обосновете отговора си.

9	**4**	**8**
♥	♣	**7**
♦	♠	**1**

Решение: **Отг.**: Не е възможно. Числата, които остава да се допълнят, са 2, 3, 5 и 6. Случаите, когато ♣$=2$ или ♣$=3$, са невъзможни, тъй като в първия случай $2+9=4+7$, а във втория $3+8=4+7$. Следователно ♣$=5$ или ♣$=6$. **(1 т.)** Ако ♣$=5$, то ♦$\neq 6$, защото $5+6=4+7$, откъдето ♥$=6$ или ♠$=6$. Ако ♥$=6$, то никое от ♦ и ♠ не може да е нито 2, нито 3, защото $6+4=3+7$ или $5+3=2+6$. Получаваме, че ♠$=6$.

Отново никое от ♦ и ♥ не може да е нито 2, нито 3, защото $3+4=2+5$ или $2+6=3+5$. Така случаят ♣$=5$ отпада. **(3 т.)** Остава ♣$=6$. Сега ♦$\neq 5$, т.е. ♥$=5$ или ♠$=5$. В първия случай, ако ♠$=3$ и ♦$=2 \Rightarrow 5+3=6+2$, което е невъзможно. Остава ♠$=2$ и ♦$=3 \Rightarrow 5+4=6+3$, така че и този случай не е възможен. Заключаваме, че ♠$=5$. Но тогава ♥$=2$, ♦$=3$ или ♥$=3$, ♦$=2$. В първия случай $6+1=5+2$, а във втория $6+1=3+4$ и отново няма как да се получи правилно разположение на числата. **(3 т.)**

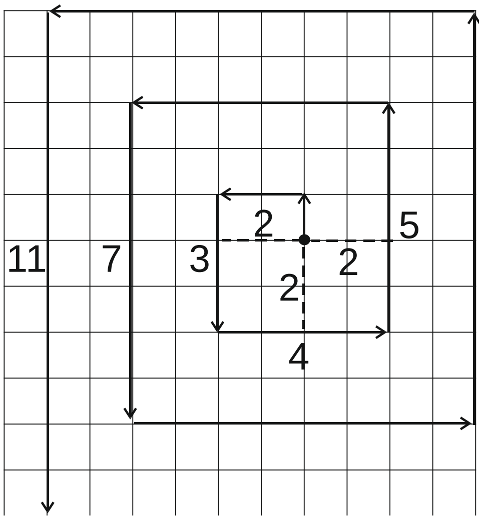
Забележка: При директно изчерпване на случаите трябва да бъдат разгледани всичките 24 възможни разположения, за да се получи максимално оценяване.

Задача 4.4. Войник марширува по следния начин: тръгва по права линия, изминава 1 м и се обръща под прав ъгъл наляво; изминава 2 м по права линия и се обръща под прав ъгъл наляво; изминава 3 м по права линия и се обръща под прав ъгъл наляво и т.н. (всеки път увеличава с 1 м разстоянието, което изминава по права линия).

а) На какво най-малко разстояние от началното си положение преминава войникът, когато между две последователни обръщания наляво той изминава 11 м?

б) Колко метра ще е изминал войникът от началото на маршировката до момента, в който ще е изминал последната отсечка, намираща се на разстояние 10 м от началното му положение?

Решение: а) **Отг.:** 6 м. **(1 т.)** Построяваме траекторията, по която марширува войникът, в квадратна мрежа и намираме, че отсечката с дължина 11 м е на 6 единици от началото. **(2 т.)** (*Забележка*: Тези точки включват и подходящ чертеж, който да онагледява траекторията, както е показано по-долу.)



б) Последователно правим наблюдения върху разстоянията на отсечките от траекторията до началното положение на войника. За удобство ползваме единицата от квадратна мрежа.

Забелязваме, че (вж. чертежа по-горе):

- на разстояние 1 има една отсечка и тя е с дължина 2;
- на разстояние 2 има три отсечки: първата е с дължина 3, втората е с дължина 4, третата е с дължина 5;
- на разстояние 3 има една отсечка и тя е с дължина 6;
- на разстояние 4 има три отсечки: първата е с дължина 7, втората е с дължина 8, третата е с дължина 9;
- на разстояние 5 има една отсечка и тя е с дължина 10;
- на разстояние 6 има три отсечки: първата е с дължина 11 и т.н. **(2 т.)**

Продължавайки по този начин, можем да заключим, че на разстояние 10 от началото има три отсечки: първата е с дължина 19, втората е с дължина 20, третата е с дължина 21. **(1 т.)** По този начин разстоянието, което е изминал войникът до края на третата отсечка (на разстояние 10 от началото), е $1+2+3+\dots+21=231$ м. **(1 т.)**

Задача 5.1. Илиана пресметнала вярно стойността на израза

$$(0{,}5 + 2{,}01.20{,}11 + 20{,}11.2{,}012).(2{,}01.20{,}11 + 20{,}11.2{,}012 + 2{,}012.20{,}13),$$

а Иван пресметнал вярно стойността на израза

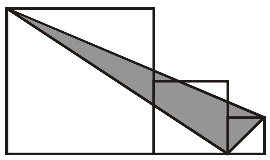
$$(0{,}5 + 20{,}1.2{,}011 + 2{,}011.20{,}12 + 20{,}12.2{,}013).(20{,}1.2{,}011 + 2{,}011.20{,}12).$$

С колко получената от Илиана стойност е по-голяма от тази на Иван?

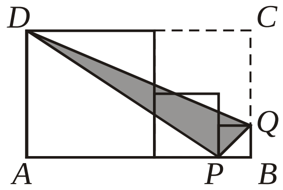
Решение: Нека $A=2{,}01.20{,}11+20{,}11.2{,}012=20{,}1.2{,}011+2{,}011.20{,}12$ **(2 т.)** и $B=2{,}012.20{,}13=20{,}12.2{,}013$.**(2 т.)** Търсената разлика е равна на

$$(0{,}5+A).(A+B)-(0{,}5+A+B).A=0{,}5.B=20{,}25078.$$ **(2 т.)**

Задача 5.2. Дължините на страните на квадратите на чертежа са съответно 12 см, 6 см и 3 см. Да се намери лицето на затъмнения триъгълник.



Решение: Да достроим фигурата до правоъгълника $ABCD$. Ясно е, че $AB=21$ см и $AD=12$ см. **(2 т.)** Тогава за лицето S на триъгълника имаме $S=S_{ABCD}-\left(S_{APD}+S_{PBQ}+S_{CDQ}\right)$ $=252-(108+4{,}5+94{,}5)=45$, т.е. $S=45$ кв. см. **(4 т.)**



Задача 5.3. Дадени са 4 последователни естествени числа, по-малки от 3000. Най-малкото от тях се дели на 4, следващото на 7, третото на 10 и най-голямото на 13. Кое може да бъде най-малкото от тези числа?

Решение: **Отг.:** 608 и 2428. Нека x е най-малкото от четирите числа. Тогава $3x-4$ се дели на 4, 7, 10 и 13, а значи и на НОК(4; 7; 10; 13)$=1820$. **(2 т.)**

Ако $3x-4=1820$, имаме $x=608$. **(1 т.)**

Ако $3x-4=2.1820=3640$, числото x не е естествено. **(1 т.)**

Ако $3x-4=3.1820=5460$, числото x не е естествено. **(1 т.)**

Ако $3x-4=4.1820=7280$, имаме $x=2428$. **(1 т.)**

Ако $3x-4$ е поне 5.1820, то $x>3000$, така че повече решения няма. **(1 т.)**

Задача 5.4. По колко различни начина може да се оцвети надписът „ПРОЛЕТНИ МАТЕМАТИЧЕСКИ СЪСТЕЗАНИЯ ВАРНА 2013”, като се използват пет различни цвята – червен, зелен, жълт, черен, син – и са изпълнени следните условия:

(1) Всяка дума се оцветява в един цвят (ще наричаме и числото 2013 „дума”).

(2) Различните думи са оцветени в различни цветове.

(3) „ВАРНА” не е черна, „2013” не е жълта и „ПРОЛЕТНИ” не е зелена.

Решение: Нека

A е множеството от оцветявания, в които „ВАРНА” е черна;

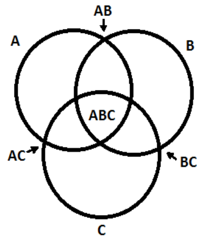
B е множеството от оцветявания, в които „2013” е жълта;

C е множеството от оцветявания, в които „ПРОЛЕТНИ” е зелена;

AB е множеството от оцветявания, в които „ВАРНА” е черна и „2013” е жълта;

AC е множеството от оцветявания, в които „ВАРНА” е черна и „ПРОЛЕТНИ” е зелена;

BC е множеството от оцветявания, в които „2013” е жълта и „ПРОЛЕТНИ” е зелена; *ABC* е множеството от оцветявания, в които „ВАРНА” е черна, „2013” е жълта и „ПРОЛЕТНИ” е зелена.



Всички възможни оцветявания са на брой $5.4.3.2.1 = 120$. Остава да извадим тези, които са в множествата *A*, *B* или *C*. **(1 т.)** Всяко от тези множества съдържа по $4.3.2.1 = 24$ оцветявания. **(1 т.)** При това елементите на *AB*, *AC*, *BC* са броени по два пъти и трябва да ги изключим. Всяко от тези множества съдържа по $3.2.1 = 6$ оцветявания. **(1 т.)** В крайна сметка елементите на *ABC* са включени три пъти и изключени три пъти, така че се налага да ги включим отново; техният брой е $2.1 = 2$. **(1 т.)** Окончателно броят на оцветяванията, които са в множествата *A*, *B* или *C*, е $24+24+24-6-6-6+2=56$. **(2 т.)** Следователно броят на оцветяванията, в които „ВАРНА” не е черна, „2013” не е жълта и „ПРОЛЕТНИ” не е зелена, е $120-56=64$. **(1 т.)**

Второ решение: За думата „ПРОЛЕТНИ” имаме 4 различни възможности – черна, жълта, синя и червена. Ако е черна, то тогава за „2013” имаме 3 възможности, а за останалите остават 6 различни оцветявания. Така имаме 18 оцветявания, когато „ПРОЛЕТНИ” е черна. **(1 т.)** Аналогично имаме 18 оцветявания, когато „ПРОЛЕТНИ” е жълта. **(1 т.)** Ако „ПРОЛЕТНИ” е червена, тогава „2013” може да е зелена, черна или синя. Ако „2013” е черна, тогава за останалите остават 6 различни оцветявания. Ако „2013” е зелена, тогава за останалите остават 4 различни оцветявания. **(1 т.)** Ако „2013” е синя, тогава за останалите остават 4 различни оцветявания. И така, имаме 14 оцветявания, когато „ПРОЛЕТНИ” е червена. **(1 т.)** Аналогично имаме 14 оцветявания, когато „ПРОЛЕТНИ” е синя. **(2 т.)** В крайна сметка броят на оцветяванията, в които „ВАРНА” не е черна, „2013” не е жълта и „ПРОЛЕТНИ” не е зелена, е $18+18+14+14=64$. **(1 т.)**

Задача 6.1. Да се подредят по големина числата:

$$x=\frac{(-1)^{2013}}{\left(2013^4-20{,}13^7\right)^0}\cdot\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}\right)^2,\quad y=\frac{\left(-2^5\right)^5}{\left(-2^7\right)^4}\cdot\left(\frac{4}{5}0{,}9^3+27{,}1\cdot 0{,}2^3\right)\text{ и}$$

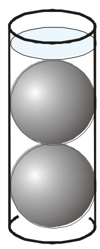
$$z=\left(\left|(-3^6)^3\right|+(-3^2)^9\right)^5.$$

Решение: Имаме

$$y=\frac{-2^{25}}{2^{28}}\cdot(0{,}8\cdot 0{,}729+27{,}1\cdot 0{,}008)=-\frac{1}{2^3}\cdot 0{,}8\cdot(0{,}729+0{,}271)=-0{,}1 \text{ (2 т.)}$$

$$x=\frac{-1}{1}\cdot\left(\frac{35+5+2}{140}\right)^2=-\left(\frac{3}{10}\right)^2=-0{,}09 \text{ (2 т.) и } z=\left(\left|-3^{18}\right|-3^{18}\right)^5=0 \text{ (1 т.)}.$$

Получаваме, че $y<x<z$. **(1 т.)**



6.2. В цилиндричен съд с диаметър 12 см е налято някакво количество вода. В съда се пускат две плътни тежки топки, всяка с диаметър 12 см. След като се пуснат топките, височината на водния стълб е 27 см. Колко сантиметра е височината на водния стълб преди пускане на топките?

Решение: Радиусът на топките R е равен на радиуса на съда и е 6 см. **(1 т.)** Обемът на двете топки е $2.\frac{4}{3}\pi R^3 = 576\pi$. **(1 т.)** Обемът тялото след пускане на топките (водата и двете топки) е $27\pi R^2 = 972\pi$. **(1 т.)** Разликата на двата обема е обемът V на първоначалния воден стълб. Така $V = 396\pi$. **(1 т.)** От друга страна, ако x е височината на първоначалния воден стълб, то $V = \pi R^2 x = 36\pi x$. **(1 т.)** Оттук получаваме $36\pi x = 396\pi$ и $x = 11$, т.е. височината на първоначалния воден стълб е 11 см. **(1 т.)**

6.3. Числото 17 е представено като сбор на положителни цели числа. Намерете възможно най голямото произведение на такива числа.

Решение: Нека $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 17$. Ако в произведението $N = a_1 a_2 \cdots a_k$ има множител $a_i \geq 5$, то той може да бъде заменен с два по-малки множителя 2 и $a_i - 2$. При това произведението N се увеличава, понеже $2(a_i - 2) = 2a_i - 4 > a_i$. Така можем да считаме, че множителите не надминават 4. **(2 т.)** Ако има множител 4, той може да бъде заменен с две двойки, без да се промени произведението. **(1 т.)** Ако има множител 1, той заедно с някое a_i може да бъде заменен с $a_i + 1$, при което произведението се увеличава. Така в произведението остават само множители 2 и 3. **(1 т.)** Тъй като $2^3 = 8 < 3^2$, то 3 двойки могат да бъдат заменени с 2 тройки и произведението ще се увеличи. **(1 т.)** Следователно, за да бъде произведението най-голямо, в сбора $a_1 + a_2 + \cdots + a_k = 17$ трябва да участват само събираеми 3 и най-много две събираеми 2. **(1 т.)** Тъй като $17 = 5.3 + 2$, то най-голямото произведение е $3^5.2 = 486$. **(1 т.)**

Задача 6.4. Във всяко поле на квадратна таблица 5×5 е записано цяло число. За един ход се избират две съседни полета (т.е. полета с обща страна) и числата в тях се умножават по (–1). Сигурно ли е, че можем с редица от ходове да направим:

а) всички числа неотрицателни;

б) всички сборове на числа в две съседни полета неотрицателни?

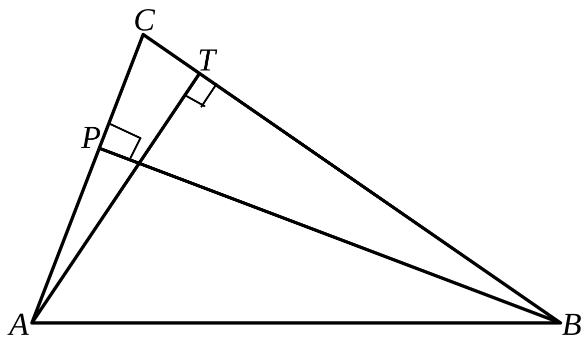
Решение: а) **Не.** Ако отначало има само едно отрицателно число, то винаги в таблицата ще има нечетен брой отрицателни числа, тъй като ходовете не променят четността им. **(2 т.)**

б) **Да.** Да означим първоначалната таблица с T. Нека $\overline{T}$ е коя да е таблица, получена от дадената чрез прилагане на операцията от условието на задачата някакъв брой пъти и нека T^* е таблицата, в която положителните числа в T са запазени, а на отрицателните е сменен знакът. С $s(T)$ означаваме сбора на всички сборове по двойки на числата в съседните полета на произволна таблица T. Да разгледаме числата $s(T)$. Ясно е, че $-s(T^*) \leq s(\overline{T}) \leq s(T^*)$. Това означава, че множеството от числата $s(\overline{T})$ е с краен брой елементи и следователно в него има най-голямо число. Нека $\overline{T_0}$ е такава таблица, получена от дадената, за която $s(\overline{T}) \leq s(\overline{T_0})$ за всяка друга таблица $\overline{T}$, получена от дадената. Можем да твърдим, че всички сборове на числата в две съседни полета на $\overline{T_0}$ са неотрицателни, защото ако има две съседни полета с отрицателен сбор, ще умножим числата в тях по (–1) и ще получим по-голям сбор от $s(\overline{T_0})$. Последното ще влезе в противоречие с максималността на $s(\overline{T_0})$. **(5 т.)**

Задача 7.1. Даден е 720 г воден разтвор на сол. Колко грама вода трябва да се долеят, за да се получи разтвор, в който процентното съдържание на сол е с $\frac{1}{5}$ пъти по-малко от това в първоначалния?

Решение: Ако солта в разтвора е a г, то частта на солта в разтвора е $\frac{a}{720}$. **(1 т.)** След доливане на x г вода частта на солта става $\frac{a}{720+x}$ **(1 т.)** и е $\frac{8}{10}\cdot\frac{a}{720}=\frac{a}{900}$. **(2 т.)** Като сравним двете дроби, получаваме $\frac{a}{720+x}=\frac{a}{900}$, **(1 т.)** откъдето $720+x=900$ и $x=180$. Следователно трябва да се долеят 180 г вода. **(1 т.)**

Задача 7.2 Даден е остроъгълен ΔABC, в който $BC > AC$. Ако T и P са петите на височините съответно от върховете A и B, да се докаже, че $S_{ABT} > S_{ABP}$.



Решение:

$BP=\frac{2S_{ABC}}{AC}>\frac{2S_{ABC}}{BC}=AT$. **(2 т.)** Сега от условието $BC > AC$ и от $\angle PBC=\angle TAC$ непосредствено следва (чрез налагане на двата триъгълника), че

$S_{PBC} > S_{TAC}$ **(3 т.)**,

откъдето $S_{ABT} > S_{ABP}$. **(1 т.)**

Задача 7.3. Ако увеличим едно трицифрено число с квадрата на една от цифрите му, получаваме число, равно на сбора от първите две цифри и третата степен на третата цифра на първоначалното число. Кое може да е това число?

Решение: Ако числото е $\overline{abc}$, то $100a+10b+c+d^2=a+b+c^3$, където a е различно от 0 и d е равно на a, b или c. Тогава $99a+9b+d^2=c^3-c=c(c-1)(c+1)$. **(1 т.)** Дясната страна е произведение на три поредни цели числа и следователно се дели на 3. Тогава това важи и за лявата страна, откъдето получаваме, че d също се дели на 3, т.е. $d=3e$, където e = 0, 1, 2 или 3. **(1 т.)** Сега лявата страна се дели на 9, значи дясната също. Но сред трите множителя отдясно точно един се дели на 3, което означава, че той трябва да се дели на 9. Лявата страна е положителна, така че $c=8$ или $c=9$. **(1 т.)**

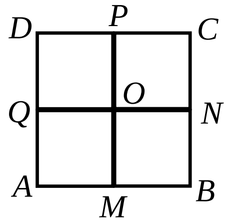
При $c=8$ имаме $11a+b+e^2=56$. Ако $e=0$, то $a=5$, $b=1$, но d не е никоя от цифрите a, b или c. Ако $e=1$, то $a=5$, $b=0$ и d отново не е никоя от цифрите a, b или c. Ако $e=2$, то $a=4$, $b=8$ и пак d не е никоя от цифрите a, b или c. Ако $e=3$, то $a=4$, $b=3$ и d не е никоя от цифрите a, b или c. **(2 т.)**

При $c=9$ имаме $11a+b+e^2=80$. Ако $e=0$, то $a=7$, $b=3$, но d не е никоя от цифрите a, b или c. Ако $e=1$, то $a=7$, $b=2$ и d не е никоя от цифрите a, b или c. При $e=2$ съответното диофантово уравнение няма решение. Ако $e=3$, то $a=6$, $b=5$ и $d=9=c$. Числото 659 има желаното свойство (659 + 81 = 6 + 5 + 729). То е единствено. **(2 т.)**

Задача 7.4. Квадрат с размери $n\times n$ в сантиметри (n е естествено число) е разделен на единични квадратчета със страни 1 см и във върховете му е поставена по една пионка. За един ход четирите пионки се преместват едновременно на разстояние 1 см хоризонтално или вертикално. Възможно ли е след определен брой ходове да се обходят всички страни на единичните квадратчета точно по веднъж във всяка от двете посоки и пионките да се върнат в изходните си позиции, ако не е разрешено едновременно пребиваване на пионки във върховете на единичните квадратчета? Не е задължително обхождането на страна на единично квадратче да се осъществява от една и съща пионка и в двете посоки. Обосновете отговора си при:

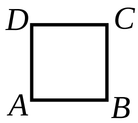
а) $n=2$; б) $n=3$; в) $n=5$.

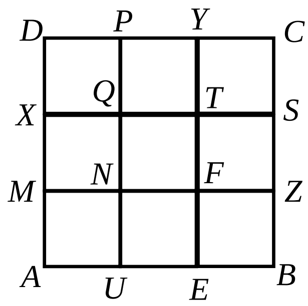
Решение: а) При $n=2$ първоначално пионките са във върховете A, B, C и D, а броят на страните на единичните квадратчета без повторение е равен на 12. Тъй като пионките са 4 и преместването им е едновременно, то за пълно обхождане точно по веднъж във всяка посока са необходими $\frac{12.2}{4}=6$ хода. При тези 6 хода всяка пионка осъществява 6 „посещения“ на върхове (възможно е някои от тези „посещения“ да са в един и същ връх) и като прибавим първоначалните позиции, получаваме общо 7 „посещения“ за всяка пионка, т.е. общо $4.7=28$ „посещения“. Но върховете са общо 9 и



заключаваме, че поне един от тях е „посетен“ най-малко 4 пъти (ако всеки връх е „посетен“ най-много 3 пъти, то всички „посещения“ са най-много $9.3=27$ и това е невъзможно, защото $27<28$). От върховете A, B, C и D излизат по две отсечки и следователно „посещенията“ в тях заедно с първоначалните позиции на пионките са най-много по 3. От върховете M, N, P и Q излизат по три отсечки и следователно „посещенията“ в тях са отново най-много по 3. Единствената възможност за 4 „посещения“ е върхът O. (От направените разсъждения следва, че в 8 от върховете „посещенията“ са точно по 3.) Ясно е, че тези 4 „посещения“ не могат да се реализират при първия, петия и шестия ход, т.е. те се реализират евентуално при втория, третия и четвъртия ход. Но $4>3$ и това означава, че при някой от ходовете имаме едновременно „посещение“ на пионки. Заключаваме, че при $n=2$ не е възможно обхождане с исканите свойства. **(3 т.)**

б) Най-напред ще разгледаме случая $n=1$. Нека първи ход: *A* отива в *B*, *B* отива в *C*, *C* отива в *D*, *D* отива в *A*; втори ход: четирите пионки се връщат на изходните си позиции. Примерът показва, че обхождането е възможно при $n=1$. **(1 т.)** Ще покажем, че то е възможно и при $n=3$. Пример: нека $A\to M\to N$, $D\to P\to Q$, $C\to S\to T$ и $B\to E\to F$, т.е. траекторията на всяка следваща пионка по





посока на часовниковата стрелка е перпендикулярна на траекторията на предходната пионка. По този начин след 2 хода четирите пионки попадат във вътрешния квадрат $NQTF$. Сега прилагаме предложеното по-горе обхождане за $n=1$. По-нататък траекторията на пионката от N е: $N\to M\to X\to Q\to X\to D\to X\to M\to A$, траекторията на пионката от Q е перпендикулярна на предходната траектория: $Q\to P\to Y\to T\to Y\to C\to Y\to P\to D$, траекторията на пионката от T е перпендикулярна на предходната траектория: $T\to S\to Z\to F\to Z\to B\to Z\to S\to C$, траекторията на пионката от *F* е перпендикулярна на предходната траектория:

$$F\to E\to U\to N\to U\to A\to U\to E\to B.$$ **(1 т.)**

в)

Да предположим, че обхождането е възможно за квадрат $(n-2)\times(n-2)$. Както и в б), нека за два хода пионката от A се премества в N (вж. картинката). Траекторията на пионката от D е перпендикулярна на траекторията на пионката от A, траекторията на пионката от C е перпендикулярна на траекторията на пионката от D, а траекторията на пионката от B е перпендикулярна на траекторията на пионката от C. Като ползваме означенията от б), след първите два хода пионките се преместват в квадрата $NQTF$, който е с размери $(n-2)\times(n-2)$. Тук прилагаме предположението за $(n-2)\times(n-2)$ и пионките се връщат в квадрата $NQTF$. По-нататък траекторията на точката от A минава през M, продължава вертикално нагоре, завива надясно, връща се обратно, отново прави ход вертикално нагоре, завива надясно, връща се обратно и т.н., докато стигне в X от чертежа. Сега завива надясно, връща се в X, отива в D и накрая с n хода се връща праволинейно в изходна позиция A. Другите 3 точки се движат аналогично по траектории, перпендикулярни на траекториите на предхождащите ги пионки. По този начин забелязваме, че принципна разлика между общия случай и случая $n=3$ няма. Тъй като твърдението е доказано за $n=3$, след повторение на горните разсъждения заключаваме за верността му при $n=5$. **(2 т.)** Обхождането е възможно за произволно нечетно число.

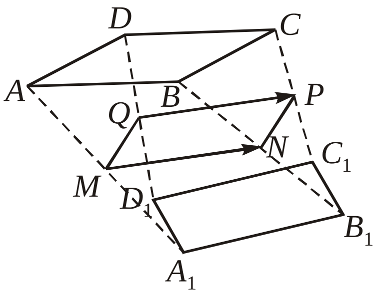
Задача 8.1. Да се намерят всички реални числа x и y, за които $x<y$ и $|6x-6y+24|=x^2+y^2-6$, ако е известно, че в интервала $[x;y]$ се съдържат поне 5 цели числа.

Решение: От условието, че интервалът $[x;y]$ съдържат поне 5 цели числа, следва неравенството $y-x\geq 4$. **(1 т.)** Оттук $6x-6y\leq -24$, т.е. $6x-6y+24\leq 0$ **(1 т.)** и следователно равенството $|6x-6y+24|=x^2+y^2-6$ е еквивалентно с $-6x+6y-24=x^2+y^2-6$. **(1 т.)** Получаваме $x^2+6x+y^2-6y+18=0$ и като допълним до точни квадрати, намираме:

$$(x^2+6x+9)+(y^2-6y+9)=0, \text{ т.е. } (x+3)^2+(y-3)^2=0. \textbf{ (2 т.)}$$

Последното е възможно само в случай, че $x=-3$ и $y=3$, които са единствените решения на задачата. **(1 т.)**

Задача 8.2. Дадени са успоредниците $ABCD$ и $A_1B_1C_1D_1$. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове средите на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 е успоредник или четирите среди лежат на една права.



Решение: Нека M, N, P и Q са средите съответно на отсечките AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1. Ако O е произволна точка **(1 т.)**, то

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{ON}-\overrightarrow{OM}=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OB_1}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OA_1}\right)=$$

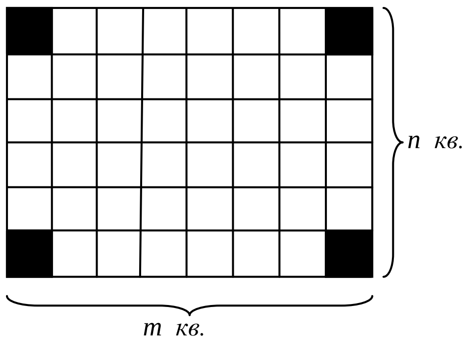
$$=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB_1}-\overrightarrow{OA_1}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}\right).\ \textbf{(2 т.)}$$

Аналогично $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OC_1}\right)-\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OD_1}\right)=$

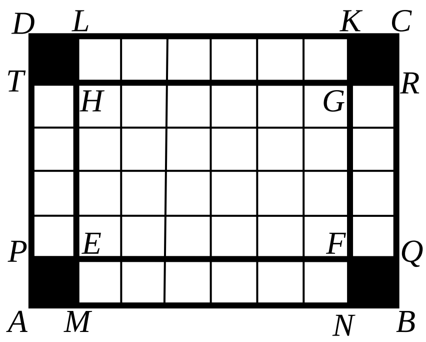
$$=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OD}+\overrightarrow{OC_1}-\overrightarrow{OD_1}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{D_1C_1}\right)=\tfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{A_1B_1}\right)\ \textbf{(2 т.)}$$

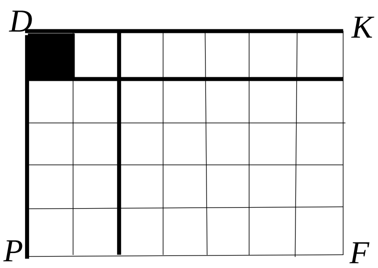
Следователно $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{QP}$, откъдето $MNPQ$ е успоредник или точките M, N, P и Q лежат на една права. **(1 т.)**

Задача 8.3. Четирите ъглови квадратчета на квадратна мрежа $m\times n$, където $m>n>6$ са естествени числа, са оцветени в черно. Разглеждаме правоъгълниците с върхове във върховете на мрежата и страни по линиите на мрежата. Ако броят на тези, които съдържат поне едно черно квадратче, е равен на 2013, намерете броя на правоъгълниците без черни квадратчета.



Решение: Първо пресмятаме броя на правоъгълниците с поне 1 черно квадратче. Да означим върховете на черните ъглови квадратчета съответно с A,M,E,P; N,B,Q,F; G,R,C,K и T,H,L,D (вж. чертежа). Всички правоъгълници с точно едно черно квадратче, са разположени в правоъгълниците $PFKD$, $EQCL$, $ANGT$ и $MBRH$. Тези в $PFKD$ намираме по следния начин. Броят на правоъгълниците с черното квадратче в първия ред са $m-1$ на брой. Всеки правоъгълник от първия ред води след себе си колона. Без значение за нейната широчина, отново по горния начин пресмятаме, че в нея се съдържат $n-1$ на брой правоъгълници с широчина, равна на широчината на колоната с черното квадратче. Следователно броят на всички интересуващи ни правоъгълници е $(m-1)(n-1)$. **(1 т.)** Аналогично намираме, че всеки един от правоъгълниците $EQCL$, $ANGT$ и $MBRH$ съдържа също толкова правоъгълници с точно 1 черно квадратче. Така броят на всички правоъгълници с точно едно черно квадратче е $4(m-1)(n-1)$. **(1 т.)** Сега ще намерим броя на правоъгълниците с точно 2



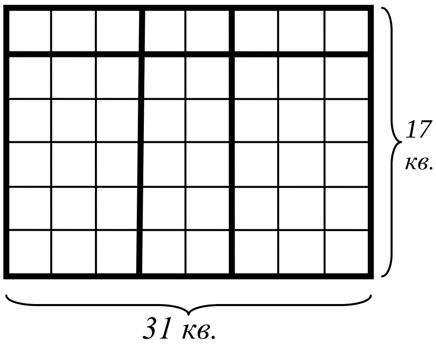


черни квадратчета. Това са тези правоъгълници, които са разположени в $PQCD$, $ABRT$ и тези – в $ANKD$ и $MBCL$. Ясно е, че в първите два те са по $n-1$ на брой (вж. чертежа), а във вторите два – по $m-1$ на брой. **(1 т.)** Като вземем предвид и единствения правоъгълник с точно 4 черни квадратчета (с точно 3 няма), то за броя на всички правоъгълници от условието на задачата получаваме:

$$4(m-1)(n-1)+2(n-1)+2(m-1)+1=4mn-2m-2n+1=(2m-1)(2n-1).$$

И така $(2m-1)(2n-1)=2013$. **(1 т.)** Но $2013=1.3.11.61$ и отчитайки условието $m>n>6$, получаваме единствената възможност

$$\left|\begin{array}{l}2n-1=33\\2m-1=61\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}n=17\\m=31\end{array}\right. . \textbf{(1 т.)}$$



Сега ще пресметнем броя на правоъгълниците от условието на задача в правоъгълна мрежа с размери 31×17. Да разгледаме само първия ред от мрежата. Броят на правоъгълниците в него с размери 1×1 е 31, броят на тези с размери 2×1 е 30, а броят на правоъгълниците с размери 3×1 е 29. Въобще броят на всички правоъгълници в първия ред е 31 + 30 + 29 + ... 2 + 1. По метода на Гаус $\frac{(1+31)\cdot31}{2}=16.31=496$. Всеки правоъгълник от първия ред води след себе си колона. Без значение от нейната широчина, отново по горния начин пресмятаме, че в нея се съдържат $\frac{(1+17)\cdot17}{2}=153$ правоъгълника с широчина, равна на широчината на колоната. Сега вече е ясно, че броят на всичките правоъгълници е равен на броя на колоните, умножен по броя на правоъгълниците в една колона, т.е. 496.153 = 75888. Отговорът на задачата е $75888-2013=73875$. **(2 т.)**

Задача 8.4. Да се намерят всички естествени числа $n>1$, за които естественото число

$$N=n^5-n^4+2n^3-2n^2+2n-1$$

е степен на просто число.

Решение: Ще представим N като произведение на два израза – единият от трета степен спрямо n, а другият от втора степен спрямо n. Имаме:

$$N=n^5-n^4+n^3+n^3-n^2-n^2+n+n-1=(n^5-n^4+n^3)+(n^3-n^2+n)-(n^2-n+1)=$$
$$=n^3(n^2-n+1)+n(n^2-n+1)-(n^2-n+1)=(n^2-n+1)(n^3+n-1).$$

От полученото представяне следва, че N е произведение на две естествени числа и тези естествени числа са по-големи от 1, защото $n>1$. **(1 т.)** Ясно е, че стойностите на n, за които числата n^3+n-1 и n^2-n+1 са взаимнопрости, не са решения на задачата. Ще разгледаме случая, когато те се делят едновременно на някое просто число p. При това можем да считаме, че нито едно от тях няма прост делител, различен от p. **(1 т.)** Ще използваме, че:

1). $n^3+n-1=(n^2-n+1)(n+1)+(n-2)$ и 2). $n^2-n+1=(n+1)(n-2)+3$. **(2 т.)**

От 1) следва, че p дели $n-2$, а оттук и от 2) следва, че p дели 3. Заключаваме, че $p=3$. **(1 т.)** Освен това, не е възможно n^3+n-1 и n^2-n+1 да се делят едновременно на 9, защото по същия път ще излезе, че 9 дели 3, което не е вярно. От проведените разсъждения следва, че $n^3+n-1=3$ или $n^2-n+1=3$. **(1 т.)** Но при $n \geq 2$ имаме $n^3+n-1 \geq 8+2-1=9>3$. От уравнението $n^2-n+1=3$ намираме $n=2$, което е единственото решение на задачата. В този случай $N=27=3^3$. **(1 т.)**

Автори на задачите са:

4.1. и 4.2. – Т. Витанов, 4.3. – Ж. Желев, 4.4. – Б. Лазаров;
5.1. и 5.4. – И. Ангелов, 5.2. – Т. Витанов, 5.3. – И. Кортезов;
6.1. и 6.4. – И. Кортезов, 6.2. и 6.3. – Т. Витанов;
7.1. – Т. Витанов, 7.2. – Е. Стоянов, 7.3. – И. Кортезов, 7.4. – В. Ненков и С. Гроздев;
8.1. и 8.4. – В. Ненков и С. Гроздев, 8.2. – Т. Витанов, 8.3. – Е. Стоянов.