Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Ямбол, 29 – 31 март 2013 г.

<u>Тема за 9 клас</u>

Задача 1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър m, за които системата

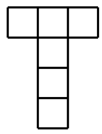
$$\left| \begin{array}{l} (x+m+2)^2+y^2=1 \\ y^2=2mx \end{array} \right.$$

има четири различни решения?

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Окръжността през върховете B и C, допираща се до AC в точка C и окръжността през върховете A и C, допираща се до BC в точка C се пресичат за втори път в точка D. Да се докаже, че правата CD минава през пресечната точка P на допирателните в A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност.

Задача 3. Дадена е шахматна дъска с размери 300×300. Казваме, че едно нейно покритие с плочки 1×3 е *добро*, ако никои две плочки в покритието не образуват буква Т (виж фигурата) в коя да е от възможните ѝ ориентации.

Да се намери броя на *добрите* покрития.



Буква Т

Задача 4. Нека p е нечетно просто число. Съществуват ли естествени числа

$$a, b_1, b_2, \ldots, b_6 \in \{1, 2, \ldots, p-2\},$$

за които да е изпълнено равенството

$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1} = \binom{p-1}{b_1}^2 + \binom{p-1}{b_2}^2 + \cdots + \binom{p-1}{b_6}^2 \ ?$$

(С $\binom{n}{k}$ означаваме числото $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$.)

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Успех!

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Ямбол, 29 – 31 март 2013 г.

Тема за 10 клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$4^{x-2} - 2^{x-a} + a = 0$$

има точно едно реално решение.

Задача 2. Даден е $\triangle ABC$. Нека I е пресечната точка на ъглополовящите AE и BD. Ако $S_{ABI} = S_{CDIE}$, то да се намери най-голямата възможна стойност на $\sphericalangle ACB$.

Задача 3. Дадена е безкрайна таблица, образувана по следния начин:

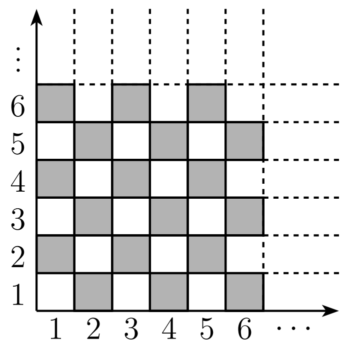
1) в горния ляв ъгъл е записано числото 4;

2) числата във всеки ред и стълб са записани в нарастващ ред като разликата между две съседни числа в ред i е $2i+1$, а в стълб j е $2j+1$.

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

Ако $N = \dfrac{2013^{2013} - 1}{2}$, то на колко места в таблицата се появява числото N?

Задача 4. Дадена е безкрайна шахматна дъска, разположена в първи квадрант, полетата на която са оцветени в бяло и черно както е показано на фигурата в дясно, а редовете и стълбовете са номерирани с числата $1, 2, 3, \ldots$. В началния момент е поставен пул в клетка $(1, 1)$. На всяка стъпка се избира един от вече поставените на дъската пулове и се заменя с два нови по следното правило: ако на дъската има k пула и избраният пул заема позиция (i, j), то двата нови пула се поставят в позиции $(i, k+1)$ и $(k+1, j)$.



Да се намери броя на достижимите конфигурации, състоящи се от n пула, разположени изцяло върху черни полета.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Успех!

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Ямбол, 29 – 31 март 2013 г.

Тема за 11 клас

Задача 1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които съществува x, за което

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \sin x \cos x$$

и $\sin 2x$ е рационално число.

Задача 2. В остроъгълен триъгълник ABC са построени височините AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че симетричната точка на B_1 спрямо правата, определена от средите на AA_1 и CC_1 лежи на отсечката A_1C_1.

Задача 3. Дадено е множество от 2013 прости числа. Иван избира двойка (p, q) от различни прости числа от даденото множество. Петър иска да намери числата p и q, като за един въпрос казва на Иван двойка (a, b) от естествени числа. Иван съобщава дали числото $ap - bq$ е положително, отрицателно или равно на нула. Колко най-малко въпроса са необходими на Петър за да може със сигурност да знае кои са числата на Иван?

Задача 4. Разглеждаме редицата от полиноми $f_1, f_2, f_3, \ldots$, за която

$$f_1(x) = x^3 - 3x \text{ и } f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \text{ за всяко } n \geqq 1.$$

Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

а) $f_{2013}(x) = 2$;   б) $f_{2013}(x) = 3$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Успех!

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Ямбол, 29 – 31 март 2013 г.

Тема за 12 клас

Задача 1. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle CDO$ разполовява отсечката AB, а правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle ABO$ разполовява отсечката CD. Да се докаже, че $AB \parallel CD$.

Задача 2. Четири положителни числа образуват растяща геометрична прогресия. Да се намери нейното частно, ако три от числата са нули на полином от трета степен, а четвъртото – на производната му.

Задача 3. Реалното число a е такова, че графиката на функцията $y = x^2 - a$ пресича квадрата $|x| + |y| = 1$ в шест точки. Да се докаже, че лицето на получения шестоъгълник е по-малко от $17/16$.

Задача 4. Да се намери най-малкото реално число θ такова, че за всяко естествено число $n \geq 2$ съществуват естествени числа a и b със сума n, за които $|a - b\sqrt{2}| < \theta$.

Време за работа: 4 часа и 30 минути
Успех!

Министерство на образованието, младежта и науката
Съюз на математиците в България

Пролетни математически състезания

Ямбол, 29 – 31 март 2013 г.

София, 2013 г.

Условия, кратки решения и критерии за оценяване

Задача 9.1. Да се намерят всички стойности на реалния параметър m, за които системата

$$\left| \begin{array}{l} (x+m+2)^2+y^2=1 \\ y^2=2mx \end{array} \right.$$

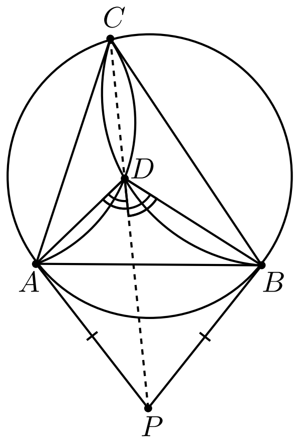
има четири различни решения?

Решение. От второто уравнение изразяваме $x=\frac{y^2}{2m}$ (лесно се вижда, че $m=0$ не е решение) и заместваме в първото. Полученото биквадратно уравнение трябва да има 4 реални различни корена, което означава, че съответното му квадратно уравнение $\left(\frac{t}{2m}+m+2\right)^2+t-1=0$ (положили сме $y^2=t$) трябва да има два реални различни положителни корена.

Получаваме уравнението $t^2+8m(m+1)t+4m^2(m+1)(m+3)=0$ с дискриминанта от съкратената формула $D=16m^2(m+1)^2-4m^2(m+1)(m+3)=4m^2(m+1)(3m+1)$. Имаме $D>0 \iff m\in(-\infty,-1)\cup(-\frac{1}{3},+\infty)$. Двата корена са положителни точно когато $4m^2(m+1)(m+3)>0 \iff m\in(-\infty,-3)\cup(-1,+\infty)$ и $8m(m+1)<0 \iff m\in(-1,0)$. Следователно търсените стойности на m са $m\in(-\frac{1}{3},0)$.

Оценяване. (6 точки) 1 т. за преминаването към биквадратното, 1 т. за формулиране на изискването съответното квадратно уравнение да има два реални положителни корена, 1 т. за изследване на дискриминантата, 2 т. за изследване на знаците на корените и 1 т. за заключението.

Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$. Окръжността през върховете B и C, допираща се до AC в точка C и окръжността през върховете A и C, допираща се до BC в точка C се пресичат за втори път в точка D. Да се докаже, че правата CD минава през пресечната точка P на допирателните в A и B към описаната около $\triangle ABC$ окръжност.



Решение. Ако $\sphericalangle ACB=\gamma$, то от условието следва, че

$$\sphericalangle ADC=\sphericalangle BDC=180^\circ-\gamma, \text{ т.е. } \sphericalangle ADB=2\gamma.$$

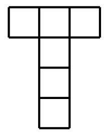
Тогава

$$\sphericalangle ADB+\sphericalangle APB=2\gamma+(180^\circ-2\gamma)=180^\circ,$$

т.е. четириъгълникът $APBD$ е вписан в окръжност. Остава да съобразим, че $PA=PB$, т.е. $\sphericalangle PDB=\sphericalangle PDA=\gamma$ и следователно $\sphericalangle PDB+\sphericalangle BDC=\gamma+(180^\circ-\gamma)=180^\circ$, т.е. точките C, D и P лежат на една права.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за $\sphericalangle ADB = 2\gamma$; 2 т. за $APBD$ – вписан; 1 т. за $\sphericalangle PDB = \sphericalangle PDA = \gamma$; 1 т. за колинеарността на C, D и P.

Задача 9.3. Дадена е шахматна дъска с размери 300×300. Казваме, че едно нейно покритие с плочки 1×3 е *добро*, ако никои две плочки в покритието не образуват буква Т (виж фигурата) в коя да е от възможните ѝ ориентации.



Буква Т

Да се намери броя на добрите покрития.

Решение. Да въведем координатна система по такъв начин, че долната лява клетка на дъската да има координати $(1, 1)$, а горната дясна – $(300, 300)$. Нека клетката $(1, 1)$ бъде покрита с вертикална плочка.

Да допуснем, че $(2, 1)$ е покрита с хоризонтална плочка. За да избегнем образуването на буква Т, $(2, 2)$ трябва да бъде покрита с вертикална плочка, $(3, 2)$ – с хоризонтална, и т.н. Образуването на тази стълбичка, обаче, ще продължи най-много докато достигнем десния или горния ръб на дъската, след което буква Т все пак ще се получи – противоречие.

И така, $(2, 1)$ също е покрита с вертикална плочка. Аналогично, $(3, 1)$ е покрита с вертикална плочка, $(4, 1)$ – също, и т.н.: всички клетки $(i, 1)$ за $1 \leq i \leq 300$ трябва да бъдат покрити с вертикални плочки.

След това, ако някоя клетка от вида $(i, 4)$ бъде покрита с хоризонтална плочка, то отново би се образувала буква Т. Следователно, всички клетки от този вид са покрити от вертикални плочки. Аналогично, всички клетки от вида $(i, 7)$, всички клетки от вида $(i, 10)$ и т.н. са покрити с вертикални плочки и всички плочки в покритието са вертикални.

По същия начин, ако $(1, 1)$ е покрита с хоризонтална плочка, то всички плочки в покритието са хоризонтални. Следователно броят на добрите покрития е 2.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за ясно формулирана идея за анализ от краищата на дъската, 5 т. за коректно доказателство, че видът на покритието на $(1, 1)$ определя цялото добро покритие, 1 т. за заключението, че добрите покрития са само две.

Задача 9.4. Нека p е нечетно просто число. Съществуват ли естествени числа

$$a, b_1, b_2, \ldots, b_6 \in \{1, 2, \ldots, p-2\},$$

за които да е изпълнено равенството

$$\binom{p-1}{a}\binom{p-1}{a+1} = \binom{p-1}{b_1}^2 + \binom{p-1}{b_2}^2 + \cdots + \binom{p-1}{b_6}^2 \ ?$$

(С $\binom{n}{k}$ означаваме числото $\dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k(k-1)\cdots 1}$.)

Решение. Ще използваме следното помощно твърдение.

Лема. За всяко просто число p и за всяко $k \in \{1, 2, \dots, p-2\}$ е в сила сравнението

$$\binom{p-1}{k} \equiv (-1)^k \pmod p.$$

Доказателство. Тъй като $(p, k!) = 1$, разглежданото сравнение

$$\frac{(p-1)(p-2)\dots(p-k)}{k!} \equiv (-1)^k \pmod p$$

е еквивалентно на $(p-1)(p-2)\dots(p-k) \equiv (-1)^k k! \pmod p$, което очевидно е вярно (разкриваме скобите!).

Да предположим, че числа с исканите свойства съществуват. Да отбележим, че $a = p - 2$ не дава решение (Защо?). Тогава от лемата следва, че лявата страна на даденото равенство е сравнима с $(-1)^a(-1)^{a+1} = 1$, а дясната с $(-1)^{2b_1} + (-1)^{2b_2} + \dots + (-1)^{2b_6} = 6$. Оттук $-1 \equiv 6 \pmod p$, което означава, че $p = 7$.

При $p = 7$ от свойствата на биномните коефициенти следва, че лявата страна може да приема само две различни стойности, които се получават при $a = 1$ и $a = 2$ и са съответно $\binom{6}{1}\binom{6}{2} = 90$ и $\binom{6}{2}\binom{6}{3} = 300$. Най-малката стойност на дясната страна е $6\binom{6}{1}^2 = 216$, а следващата по големина е $5.\binom{6}{1}^2 + \binom{6}{2}^2 = 405$. Следователно исканото равенство е невъзможно.

Оценяване. (7 точки) 4 т. за достигане да извода, че $p = 7$, 3 т. за отхвърляне и на тази възможност. Решение, което цитира точно лемата, но не дава доказателство, се оценява с до 5 т., а решение, в което е цитиран грешен вариант на лемата без доказателство, се оценява с до 3 т.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$4^{x-2} - 2^{x-a} + a = 0$$

има точно едно реално решение.

Решение. След полагането $2^{x-2} = t$ свеждаме задачата до намиране тези стойности на реалния параметър a, за които уравнението

$$t^2 - 2^{2-a}t + a = 0$$

има точно едно положително решение. Нека $f(t) = t^2 - 2^{2-a}t + a$.

Случай 1. Ако уравнението $f(t) = 0$ има двоен положителен корен, то необходимо и достатъчно условие е $D = 4^{2-a} - 4a = 0$, т.е. $4^{1-a} = a$ и $2^{1-a} > 0$. При $a > 1$ имаме

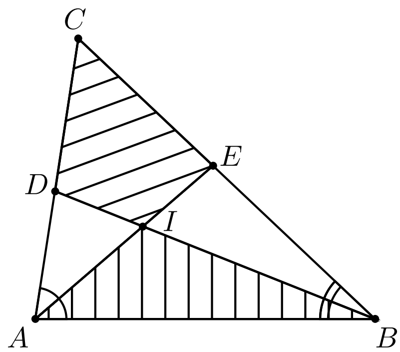
$4^{1-a} < 1 < a$, а при $0 < a < 1$ имаме $4^{1-a} > 1 > a$. При $a = 1$ получаваме единствен корен $t = 1$.

Случай 2. Ако уравнението $f(t) = 0$ има два реални корена $t_1 \leqq 0 < t_2$, то необходимо и достатъчно условие е $f(0) \leqq 0$ и $2^{1-a} > 0$, т.е. $a \leqq 0$.

Така търсените стойности са $a \in (-\infty, 0] \cup \{1\}$.

Оценяване. (6 точки) а) 1 т. за полагането $2^{x-2} = t$ и свеждане до квадратно уравнение; 2 т. за случай 1; 2 т. за случай 2; 1 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$. Нека I е пресечната точка на ъглополовящите AE и BD. Ако $S_{ABI} = S_{CDIE}$, то да се намери най-голямата възможна стойност на $\sphericalangle ACB$.



Решение. Ще използваме стандартните означения за $\triangle ABC$. От условието следва, че $S_{ABD} = S_{AEC}$, т.е.

$$\frac{AD}{AC} = \frac{CE}{BC} \Rightarrow \frac{c}{a+c} = \frac{b}{b+c} \Rightarrow ab = c^2$$

и от косинусова теорема за $\triangle ABC$ получаваме

$$\cos \sphericalangle ACB = \frac{a^2+b^2-c^2}{2ab} = \frac{a^2+b^2-ab}{2ab} \geqq \frac{1}{2}.$$

Следователно, $\sphericalangle ACB \leqq 60^\circ$ и равенство се достига, когато $\triangle ABC$ е равностранен.

Оценяване: (6 точки) 3 т. за $ab = c^2$; 2 т. за $\cos \sphericalangle ACB \geqq \dfrac{1}{2}$; 1 т. за $\sphericalangle ACB \leqq 60^\circ$.

Задача 10.3. Дадена е безкрайна таблица, образувана по следния начин:

4	7	10	13	16	...
7	12	17	22	27	...
10	17	24	31	38	...
13	22	31	40	49	...
16	27	38	49	60	...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋱

1) в горния ляв ъгъл е записано числото 4;

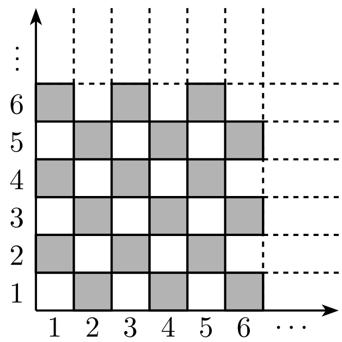
2) числата във всеки ред и стълб са записани в нарастващ ред като разликата между две съседни числа в ред i е $2i + 1$, а в стълб j е $2j + 1$.

Ако $N = \dfrac{2013^{2013} - 1}{2}$, то на колко места в таблицата се появява числото N?

Решение. Съобразяваме, че записаното в ред i и стълб j число е $2ij + i + j$. Тогава, ако едно число M се появява в таблицата, то $2M+1 = (2i+1)(2j+1)$ за някои $i, j \in \mathbb{N}$. Обратно, ако $2M+1 = ab$ и $a \neq 1, b \neq 1$, то a и b са нечетни числа и M се появява в ред $i = \dfrac{a-1}{2}$ и стълб $j = \dfrac{b-1}{2}$. Следователно, броят на появяванията на N в таблицата е равен на броя на наредените двойки (a, b), за които $2N + 1 = ab$, $a \neq 1$, $b \neq 1$. Този брой е с две по-малък от броя на делителите на N. Така за $N = \dfrac{2013^{2013} - 1}{2}$ имаме $2N + 1 = 2013^{2013} = 3^{2013} \cdot 11^{2013} \cdot 61^{2013}$ и търсеният брой появявания е $(2014)^3 - 2$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за намиране на общия член на елемента в позиция (i, j); 2 т. за намиране на условие за появяване на произволно число в таблицата; 2 т. за определяне на броя на появяванията на N в таблицата.

Задача 10.4. Дадена е безкрайна шахматна дъска, разположена в първи квадрант, полетата на която са оцветени в бяло и черно както е показано на фигурата в дясно, а редовете и стълбовете са номерирани с числата $1, 2, 3, \ldots$. В началния момент е поставен пул в клетка $(1, 1)$. На всяка стъпка се избира един от вече поставените на дъската пулове и се заменя с два нови по следното правило: ако на дъската има k пула и избраният пул заема позиция (i, j), то двата нови пула се поставят в позиции $(i, k + 1)$ и $(k + 1, j)$.



Да се намери броя на достижимите конфигурации, състоящи се от n пула, разположени изцяло върху черни полета.

Решение. Нека върху дъската са разположени n пула. Очевидно никои два пула не са в линия. (Защо?) С всяка конфигурация можем да свържем пермутация на числата $\{1, 2, \ldots, n\}$ по следния начин: ако пуловете заемат позиции

$$(1, a_1), (2, a_2), (3, a_3), \ldots, (n, a_n),$$

$\{a_1, a_2, \ldots, a_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$, то свързаната с конфигурацията пермутация е

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n \end{pmatrix}.$$

Лесно се проверява (индукция по n), че тази пермутация е цикъл

$$i_1 \to i_2 \to i_3 \to \ldots \to i_n \to i_1,$$

$\{i_1, i_2, \ldots, i_n\} = \{1, 2, \ldots, n\}$. Да забележим, че клетката (i, j) е черна тогава и само тогава, когато $i + j$ е нечетно. Следователно в горния цикъл имаме

$$i_1 + i_2 \equiv i_2 + i_3 \equiv \ldots \equiv i_{n-1} + i_n \equiv i_n + i_1 \equiv 1 \pmod 2.$$

Остава да съобразим, че за нечетно n не съществува цикъл с това свойство, а за четно n търсеният брой конфигурации е

$$\left(\frac{n}{2}\right)!\left(\frac{n-2}{2}\right)!.$$

Оценяване. (7 точки) 2 т. за показване на съответствие между достижимите конфигурации и пермутациите на n елемента; 2 т. за доказателство на факта, че достижимите конфигурации са асоциирани с цикли на n елемента; 1 т. за определяне на търсения брой конфигурации при нечетно n; 2 т за определяне на търсения брой конфигурации при четно n.

Задача 11.1. Да се намерят всички цели стойности на параметъра a, за които съществува x, за което

$$\sin^6 x + \cos^6 x = a \sin x \cos x$$

и $\sin 2x$ е рационално число.

Решение. Имаме

$$\begin{aligned} \sin^6 x + \cos^6 x &= (\sin^2 x + \cos^2)(\sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x) = \\ &= \sin^4 x - \sin^2 x \cos^2 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 3\sin^2 x \cos^2 x = \\ &= 1 - 3\sin^2 x \cos^2 x, \end{aligned}$$

откъдето след полагане $y = \sin x \cos x$ даденото уравнение става

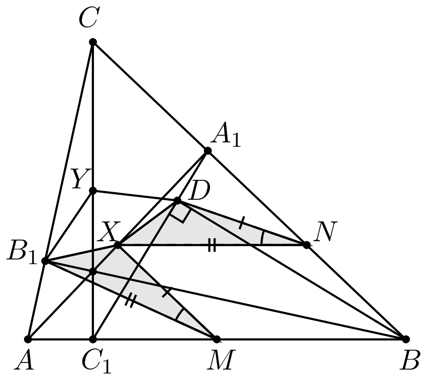
$$3y^2 + ay - 1 = 0.$$

Тъй като $\sin 2x = 2\sin x \cos x = 2y$, то y също е рационално число. Това означава, че дискриминантата на уравнението $3y^2 + ay - 1 = 0$ е точен квадрат. Следователно $a^2 + 12 = t^2$, откъдето $(t-a)(t+a) = 12$. Понеже $t - a$ и $t + a$ са с еднаква четност, лесно намираме решенията $t = \pm 4$ и $a = \pm 2$. Търсените стойности са $a = \pm 2$.

Оценяване. (6 точки) 3 т. за получаване на уравнението $3y^2 + ay - 1 = 0$; 3 т. за получаване на отговора $a = \pm 2$.

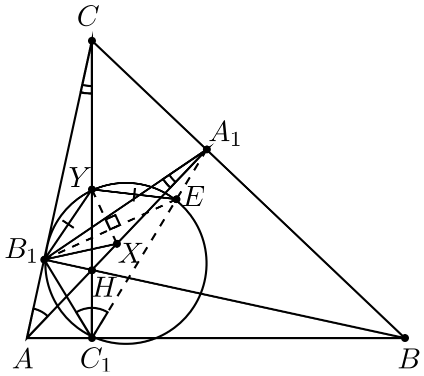
Задача 11.2. В остроъгълен триъгълник ABC са построени височините AA_1, BB_1 и CC_1. Да се докаже, че симетричната точка на B_1 спрямо правата, определена от средите на AA_1 и CC_1 лежи на отсечката A_1C_1.

Решение. (I начин) Да означим с D петата на перпендикуляра от B към A_1C_1. Ако X е средата на AA_1, ще докажем, че $XB_1 = XD$. Нека M и N са среди съответно на AB и A_1B. Тогава $MX = \frac{1}{2}A_1B = DN$ и $MB_1 = \frac{1}{2}AB = XN$. Освен това $|\sphericalangle XMB_1| = |\sphericalangle AMB_1 - \sphericalangle AMX|$ и $|\sphericalangle XND| = |\sphericalangle A_1ND - \sphericalangle A_1NX|$, като $\sphericalangle AMB_1 = 180^\circ - 2\alpha = \sphericalangle A_1ND$ и $\sphericalangle AMX = \beta = \sphericalangle A_1NX$. Следователно, $\triangle XMB_1 \cong \triangle DNX$, откъдето $XB_1 = XD$. Аналогично доказваме, че $YB_1 = YD$, където Y е средата на AA_1.



Следователно, XY е симетрала на BD, което означава, че D е симетрична на B_1 спрямо XY.

(II начин) Нека X и Y са средите на AA_1 и BB_1 съответно, а E симетричната точка на B_1 относно правата XY. Лесно се съобразява, че $\triangle AA_1B_1 \sim \triangle C_1CB_1$. Тогава B_1X и B_1Y са съответни медиани в подобни триъгълници и $\sphericalangle B_1XA = \sphericalangle B_1YC_1$. Следователно, четириъгълникът B_1HXY е вписан в окръжност и $\sphericalangle B_1EY = 90^\circ - \sphericalangle B_1YX = 90^\circ - \sphericalangle B_1HA = \sphericalangle B_1AH = \sphericalangle B_1C_1Y$, т.е. четириъгълникът B_1C_1EY е вписан в окръжност. Но $YE = YB_1$, т.е. $\sphericalangle EC_1Y = \sphericalangle YC_1B_1 = \sphericalangle XAB_1 = \sphericalangle A_1C_1C$ и следователно, $E \in A_1C_1$.



Оценяване. (6 точки) (I начин) 1 т. за предположението, че търсената точка е петата на перпендикуляра от B към A_1C_1; 2 т. за разглеждане на еднаквите триъгълници; 3 т. за доказване, че те са еднакви и довършване на решението.

(II начин) 2 т. за B_1HXY – вписан; 2 т. за B_1C_1EY – вписан; 2 т. за довършване на решението.

Задача 11.3. Дадено е множество от 2013 прости числа. Иван избира двойка (p, q) от различни прости числа от даденото множество. Петър иска да намери числата p и q, като за един въпрос казва на Иван двойка (a, b) от естествени числа. Иван съобщава дали числото $ap - bq$ е положително, отрицателно или равно на нула. Колко най-малко въпроса са необходими на Петър за да може със сигурност да знае кои са числата на Иван?

Решение. На всяка двойка (p, q) от различни прости числа от даденото множество съпоставяме дробта $\frac{p}{q}$. Да наредим така получените дроби в нарастващ ред. Отговорът на Иван показва кое от следните условия е изпълнено $\frac{b}{a} < \frac{p}{q}$, $\frac{b}{a} = \frac{p}{q}$ или $\frac{b}{a} > \frac{p}{q}$.

Да допуснем, че в даден момент възможните двойки на Иван са t. Да разгледаме следната стратегия на Петър. При t четно число той задава въпрос (a, b), където дробта $\frac{b}{a}$ е по-голяма от точно половината от възможните числа на Иван (той като множеството на рационалните числа е гъсто, това винаги е възможно), а при нечетно t дробта $\frac{b}{a}$ трябва да е равна на средната дроб. При всеки отговор на Иван за описаната стратегия възможните двойки на Иван остават $\frac{t}{2}$ при t четно число и $\frac{t-1}{2}$ при t нечетно число.

От друга страна е ясно, че при всеки въпрос на Петър съществува отговор, за който възможните двойки на Иван намаляват най-много с $\frac{t}{2}$ при t четно и с $\frac{t+1}{2}$ при t нечетно.

При описаната стратегия на Петър ако броят на възможните двойки на Иван е t и $t = 2^{\alpha_1} + 2^{\alpha_2} + \cdots + 2^{\alpha_k}$, където $\alpha_1 > \alpha_2 > \cdots > \alpha_k$ е двоичното представяне на t, то след всеки въпрос на Петър най-високата степен на двойката в това представяне намалява с 1. Следователно за да остане едно число са ни необходими точно α_1 въпроса.

Тъй като броят на дробите е 2013.2012 и $2^{21} < 2013.2012 < 2^{22}$, то отговорът е 21.

Оценяване. (7 точки) 2 т. за свеждане на задачата до задача за търсене на неизвестен елемент в наредено множество; 2 т. за дефиниране на правилната стратегия; 2 т. за доказване, че тази стратегия е оптимална; 1 т. за получаване на отговора.

Задача 11.4. Разглеждаме редицата от полиноми $f_1, f_2, f_3, \ldots$, за която

$$f_1(x) = x^3 - 3x \text{ и } f_{n+1}(x) = f_1(f_n(x)) \text{ за всяко } n \geqq 1.$$

Да се намери броят на реалните корени на уравнението:

а) $f_{2013}(x) = 2$; б) $f_{2013}(x) = 3$.

Решение. Ако $x \in [-2, 2]$, то x еднозначно се представя във вида $x = 2\cos\alpha$ за някое $\alpha \in [0, \pi]$. Ако $x \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$, то съществува единствено реално число $t < -1$ или $t > 1$, такова че $x = t + \frac{1}{t}$. По индукция лесно се доказва, че в първия случай $f_n(x) = 2\cos 3^n\alpha$, а във втория $f_n(x) = t^{3^n} + \frac{1}{t^{3^n}}$.

а) Ясно е, че корените са в интервала $[-2, 2]$. Имаме

$$2\cos 3^{2013}\alpha = 2 \iff 3^{2013}\alpha = 2k\pi \iff \alpha = \frac{2k\pi}{3^{2013}}.$$

Условието $\alpha \in [0, \pi]$ дава $k = 0, 1, \ldots, \frac{3^{2013}-1}{2}$, т.е. в този случай имаме $\frac{3^{2013}+1}{2}$ реални корена.

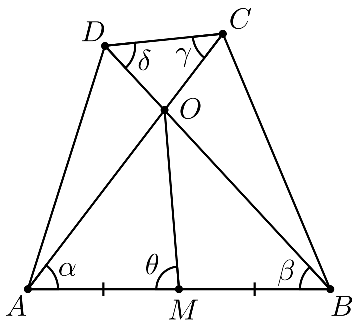
б) Сега е ясно, че $x \in (2, +\infty)$. При $x = t + \dfrac{1}{t}$, $t > 1$ имаме $t^{3^{2013}} + \dfrac{1}{t^{3^{2013}}} = 3$. Уравнението $y + \dfrac{1}{y} = 3$ има единствен корен, който е по-голям от 1 и този корен е $\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$. Следователно, уравнението $f_{2013}(x) = 3$ има единствен корен

$$x = \sqrt[3^{2013}]{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[3^{2013}]{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}.$$

Оценяване. (7 точки) по 1 т. за всяко от полаганията; по 1 т. за намиране на $f_{2013}(x)$ във всеки от двата случая; 2 т. за получаване на отговора в а); 1 т. за получаване на отговора в б).

Задача 12.1. Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD на изпъкнал четириъгълник $ABCD$. Правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle CDO$ разполовява отсечката AB, а правата през O и центъра на описаната окръжност около $\triangle ABO$ разполовява отсечката CD. Да се докаже, че $AB \parallel CD$.

Решение. Нека $\alpha = \sphericalangle BAO$, $\beta = \sphericalangle ABO$, $\gamma = \sphericalangle DCO$ и $\delta = \sphericalangle CDO$. Ако M е средата на AB, от първото условие следва, че $\gamma, \delta < 90^\circ$, $\sphericalangle AOM = 90^\circ - \delta$ и $\sphericalangle BOM = 90^\circ - \gamma$. Тогава от синусовата теорема получаваме, че



$$\frac{\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{AO}{BO} = \frac{AO/AM}{BO/BM} = \frac{\sin\theta/\cos\delta}{\sin\theta/\cos\gamma},$$

където $\theta = \sphericalangle AMO$. Следователно (1) $\sin\alpha\cos\gamma = \sin\beta\cos\delta$. Аналогично от второто условие намираме, че (2) $\cos\alpha\sin\gamma = \cos\beta\sin\delta$.

Като извадим почленно (1) и (2), получаваме, че

$$\sin(\alpha - \gamma) = \sin(\beta - \delta).$$

Понеже $-\pi < \alpha - \gamma + \beta - \delta < \pi$, следва, че $\alpha - \gamma = \beta - \delta$. Сега от $\alpha + \beta = \gamma - \delta$ заключаваме, че $\alpha = \gamma$, т.е. $AB || CD$.

Да отбележим, че тогава $\sin 2\alpha = \sin 2\beta$, откъдето $\alpha = \beta$ или $\alpha + \beta = \pi/2$. Това означава, че $ABCD$ е равнобедрен трапец или трапец с перпендикулярни диагонали, като и в двата случая условията са изпълнени.

Оценяване. (6 точки) 4 т. за (1)+(2) и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. Четири положителни числа образуват растяща геометрична прогресия. Да се намери нейното частно, ако три от числата са нули на полином от трета степен, а четвъртото – на производната му.

Решение. Нека числата са x_1, x_2, x_3, x_4, като x_4 е нула на

$$((x-x_1)(x-x_2)(x-x_3))' = 3x^2 + 3(x_1+x_2+x_3)x + x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1.$$

Тогава $3x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \pm \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1x_2 - x_2x_3 - x_3x_1}$.

Можем да считаме, че $1 = x_1 < x_2 < x_3$. При знак $-$ имаме $x_1 < x_4 < x_2$ и значи $x_4 = q$, $x_2 = q^2$, $x_3 = q^3$, а при знак $+$ следва, че $x_2 < x_4 < x_3$, откъдето $x_2 = q$, $x_4 = q^2$, $x_3 = q^3$. И така, $q > 1$ и

$$3q = 1 + q^2 + q^3 - \sqrt{1 - q^2 - q^3 + q^4 - q^5 + q^6} \text{ или}$$
$$3q^2 = 1 + q + q^3 + \sqrt{1 - q + q^2 - q^3 - q^4 + q^6}.$$

В първия случай получаваме, че

$$(q-1)\sqrt{q^4 + q^3 + 2q^2 + 2q + 1} = (q-1)(q^2 + 2q - 1) \text{ и значи}$$
$$q^4 + q^3 + 2q^2 + 2q + 1 = q^4 + 4q^3 + 2q^2 - 4q + 1, \text{ т.е. } q(q^2 - 2) = 0.$$

Във втория случай намираме, че

$$(1-q)\sqrt{q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1} = (q-1)(q^2 - 2q - 1), \text{ откъдето}$$
$$q^4 + 2q^3 + 2q^2 + q + 1 = q^4 - 4q^3 + 2q^2 + 4q + 1, \text{ т.е. } q(2q^2 - 1) = 0.$$

(Всъщност този случай се свежда до първия при смяната на q с $1/q$, т.е. обратна наредба на числата.)

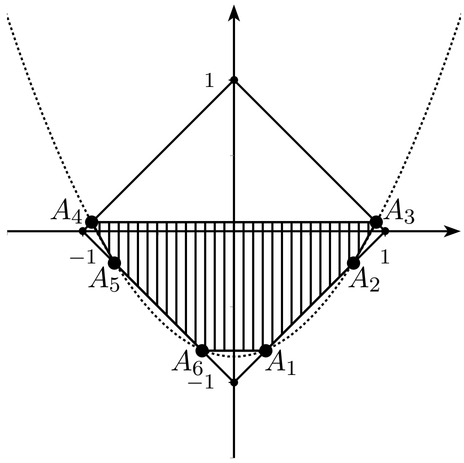
Следователно $q = \sqrt{2}$.

Оценяване. (6 точки) 2 т. за двете уравнения за q и по 2 т. за тяхното решаване.

Задача 12.3. Реалното число a е такова, че графиката на функцията $y = x^2 - a$ пресича квадрата $|x| + |y| = 1$ в шест точки. Да се докаже, че лицето на получения шестоъгълник е по-малко от 17/16.

Решение. Лесно се проверява, че броят на пресечните точки на графиката и квадрата е равен на 0 при $|a| > 1$, на 1 при $a = -1$, на 3 при $a = 1$, на 2 при $a \in (-1, 3/4)$, на 4 при $a = 3/4$ и на 6 при $a \in (3/4, 1)$.

При $a \in (3/4, 1)$ имаме две пресечни точки $A_1(x_1, y_1)$ и $A_2(x_2, y_2)$ в четвърти квадрант и една пресечна точка $A_3(x_3, y_3)$ в първи квадрант, където $0 < x_1 < x_2 < 1$ са корените на уравнението $x^2 - x + 1 - a = 0$, $x_3 \in (0, 1)$ е по-големият корен на уравнението $x^2 + x - 1 - a = 0$ и $y_i = x_i^2 - a$, $i = 1, 2, 3$. Останалите пресечни точки A_4, A_5 и A_6 са симетрични съответно на A_3, A_2 и A_1 спрямо ординатната ос.



Тогава лицето S на $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ е равно на сумата от лицата на $A_1A_2A_5A_6$ и $A_2A_3A_4A_5$, т.е.

$$S = (x_1 + x_2)(y_2 - y_1) + (x_2 + x_3)(y_3 - y_2) = u + \frac{(u+v)^2(v-u-2)}{8},$$

където $u = \sqrt{4a-3}$ и $v = \sqrt{4a+5}$.

Понеже $v^2 - u^2 = 8$, то $S = 2u + v - \dfrac{(u+v)^2}{4}$. Тъй като $u < 1$, то $u + v < 4$ и значи S е растяща квадратна функция спрямо u. Имаме, че $u + 8 < 3v$ ($\Leftrightarrow (u-1)^2 > 0$) и следователно

$$S < 2(3v-8) + v - \frac{(3v-8+v)^2}{4} = \frac{17 - (8v-23)^2}{16}.$$

Забележка. В действителност, $S_{\max} \approx 1,049$.

Оценяване. (7 точки) 1 т. за $a \in (3/4, 1)$, 2 т. за формулата за S и 4 т. за $S < 17/16$ (1 т. за $S < 5/4$).

Задача 12.4. Да се намери най-малкото реално число θ такова, че за всяко естествено число $n \geq 2$ съществуват естествени числа a и b със сума n, за които $|a - b\sqrt{2}| < \theta$.

Решение. Нека $0 < \psi < \theta$. Тогава $\psi \leq \sqrt{2} - 1$ или съществуват естествени числа $n \geq 3$ и $1 \leq k \leq n-1$ така, че

$$k - (n-k)\sqrt{2} \leq -\psi < \psi \leq k + 1 - (n-k-1)\sqrt{2},$$

$$\text{т.е.} \quad \frac{n\sqrt{2}+\psi}{\sqrt{2}+1} - 1 \leq k \leq \frac{n\sqrt{2}-\psi}{\sqrt{2}+1}$$

и значи $\psi \le \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$. При $\psi = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$ имаме, че $k = 2n - 1/2 - n\sqrt{2}$, което не е цяло число. Следователно $\theta \le \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

От друга страна, ако $\theta < \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$, то интервалът

$$\Delta_n = \left[\frac{n\sqrt{2}+\theta}{\sqrt{2}+1} - 1, \frac{n\sqrt{2}-\theta}{\sqrt{2}+1}\right]$$

има дължина, по-голяма от 1. Както е добре известно, за всяко $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ редицата с общ член $\{n\alpha\}$ е гъсто подмножество на $(0,1)$. При $\alpha = 2 - \sqrt{2}$. следва, че безбройно много от интервалите Δ_n съдържат естествени числа $k_n (< n)$. Полученото противоречие показва, че $\theta = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2}$.

Оценяване. (7 точки) 3 т. за $2\theta \le \sqrt{2}+1$ и 4 т. за $2\theta \ge \sqrt{2}+1$.