Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на математиците в България

Зимни математически състезания

Пловдив, 25 – 27 януари 2013 г.

София, 2013 г.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
26 – 27 януари 2013 г., ПЛОВДИВ

Тема за 8 клас

Задача 1. Цената на един костюм е 200 лв. За коледните празници търговецът намалил цената му с определен процент. След няколко дни той отново намалил цената на костюма, но с два пъти по-голям от първоначалния процент.
С какъв процент е намалена цената на костюма първия път, ако след второто намаление цената е станала 144 лв.?

Задача 2. Върху страните BC и AC на триъгълника ABC, вън от него, са построени квадратите $BDEC$ и $ACFG$. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове центровете на квадратите и средите на отсечките AB и EF е квадрат.

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа n, които имат такъв делител d, че n^4+d^3 се дели на n^2d+1.

Задача 4. Част от клетките на квадратна таблица 2013×2013 са оцветени. Една клетка (независимо дали е оцветена или не) се нарича *нечетна*, ако се намира на ред с нечетен брой оцветени клетки и стълб с нечетен брой оцветени клетки.
а) Съществува ли оцветяване с 2012 нечетни клетки?
б) Съществува ли оцветяване с 2014 нечетни клетки?

Време за работа 4 часа 30 мин.
Журито Ви желае успешна работа!

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

СЪЮЗ НА МАТЕМАТИЦИТЕ В БЪЛГАРИЯ

Зимни математически състезания
26 – 27 януари 2013 г., ПЛОВДИВ
Тема за 8 клас, решения и оценяване

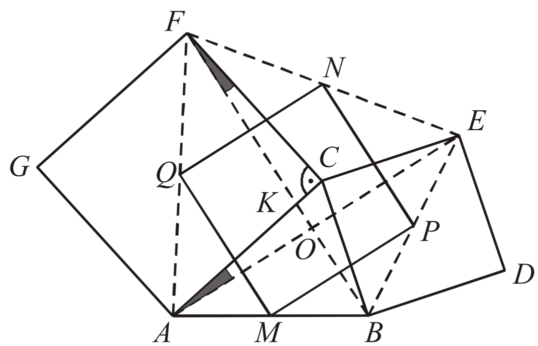
Задача 8.1. Цената на един костюм е 200 лв. За коледните празници търговецът намалил цената му с определен процент. След няколко дни той отново намалил цената на костюма, но с два пъти по-голям от първоначалния процент.
С какъв процент е намалена цената на костюма първия път, ако след второто намаление цената е станала 144 лв.?

Решение. Нека първия път цената е намалена с x% ($0<x<100$). **(1 т.)** Тогава $200\left(1-\frac{x}{100}\right)\left(1-\frac{2x}{100}\right)=144$. **(3 т.)** Последователно получаваме $200\left(1-\frac{3x}{100}+\frac{2x^2}{10\,000}\right)=144$,

$200-6x+\frac{2x^2}{50}=144$, $x^2-150x+50.28=0$. Откъдето

$x_{1,2}=75\pm\sqrt{75^2-50.28}=75\pm5\sqrt{15^2-56}$, $x_{1,2}=75\pm65$. **(1 т.)** Очевидно решението на задачата е $x=10$, т.е. първия път цената е намалена с 10%. **(1 т.)**

Задача 8.2. Върху страните BC и AC на триъгълника ABC, вън от него, са построени квадратите $BDEC$ и $ACFG$. Да се докаже, че четириъгълникът с върхове центровете на квадратите и средите на отсечките AB и EF е квадрат.



Решение. Нека P и Q са центровете на квадратите, а M и N средите на AB и EF. Понеже четирите точки са средите на страните на четириъгълника $ABEF$, то $MP=NQ=\frac{1}{2}AE$ и $MP \parallel AE \parallel NQ$ ($MQ=NP=\frac{1}{2}BF$, $MQ \parallel BF \parallel NP$).
Следователно $MPNQ$ е успоредник. **(2 т.)**
От $\triangle AEC \cong \triangle FBC$ (I пр.) Имаме $AE=FB$ и $\sphericalangle EAC=\sphericalangle BFC$. **(1 т.)** Ако $K=AC\cap BF$ и $O=AE\cap BF$, то в $\triangle FCK$ и $\triangle AOK$ имаме $\sphericalangle FKC=\sphericalangle AKO$. Така получаваме $\sphericalangle AOK=180^\circ-(\sphericalangle AKO+\sphericalangle KAO)=180^\circ-(\sphericalangle FKC+\sphericalangle KFC)=\sphericalangle ACF=90^\circ$. Следователно $AE\perp BF$. **(2 т.)** Следователно $MPNQ$ е правоъгълник, а от $AE=FB$, $MP=\frac{1}{2}AE$ и $NP=\frac{1}{2}BF$ следва, че $MP=NP$ и следователно $MPNQ$ е квадрат. **(1 т.)**

Задача 8.3. Да се намерят всички естествени числа n, които имат такъв делител d, че n^4+d^3 се дели на n^2d+1.

Решение. Нека n е естествено число с исканото свойство и нека d е такъв негов делител, че $n^4+d^3=\left(n^2d+1\right)k$ за някое естествено число k. От последното равенство получаваме $k-d^3=n^4-kn^2d=n^2\left(n^2-kd\right)$. Заключаваме, че $k-d^3$ се дели на n^2. Възможни са два случая. **(1 т.)**

Първи случай. $k-d^3\ge n^2$. Имаме, че $k\ge n^2+d^3$ и тогава

$$n^4+d^3=\left(n^2d+1\right)k\ge\left(n^2d+1\right)\left(n^2+d^3\right)=n^4d+n^2d^4+n^2+d^3.$$

Оттук $n^4\ge n^4d+n^2d^4+n^2$, което е невъзмжно. **(2 т.)**

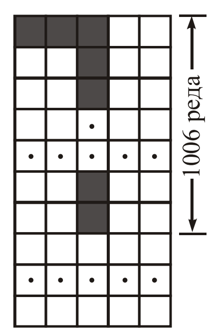
Втори случай. $k-d^3=0$. Имаме $k=d^3$ и следователно $n^4+d^3=\left(n^2d+1\right)d^3$, откъдето $n^4=n^2d^4$. Полученото равенство е възможно само ако $n^2=d^4$, т.е. $n=d^2$. Следователно, че ако n е естествено число с исканото свойство, то n е точен квадрат. **(2 т.)**

Обратно, нека n е точен квадрат, т.е. $n=m^2$ за някое естествено число m. Ясно е, че m е делител на n и за този делител имаме $n^4+m^3=m^8+m^3=m^3\left(m^5+1\right)$, което очевидно се дели на $m^5+1=m^4m+1=n^2m+1$. **(2 т.)**

Задача 8.4. Част от клетките на квадратна таблица 2013×2013 са оцветени. Една клетка (независимо дали е оцветена или не) се нарича *нечетна*, ако се намира на ред с нечетен брой оцветени клетки и стълб с нечетен брой оцветени клетки.

а) Съществува ли оцветяване с 2012 нечетни клетки?

б) Съществува ли оцветяване с 2014 нечетни клетки?



Решение. **а)** Оцветяваме горния ляв ъгъл на таблицата по показания начин: първите 3 клетки отляво надясно на първия ред и първите 1006 клетки отгоре надолу на третия стълб. Останалите клетки на таблицата не се оцветяват. Клетките от двата леви стълба на показания отрязък са единствените нечетни клетки в таблицата 2013×2013. Техният брой е $1006.2=2012$. Примерът не е единствен. Всеки верен пример се оценява с **(3 т.)**. За частични резултати не се присъждат точки.

б) Тъй като всяка нечетна клетка е сечение на ред и стълб с нечетен брой оцветени клетки, то броят на нечетните клетки в таблицата е произведение от броя на редовете с нечетен брой оцветени клетки и броя на стълбовете с нечетен брой оцветени клетки **(1 т.)**. От друга страна броят на редовете и броят на стълбовете с нечетен брой оцветени клетки са с еднаква четност **(1 т.)**. Този факт се съобразява, като преброим оцветените клетки в таблицата веднъж по редове и втори път по стълбове. По-нататък ще използваме, че броят на нечетните клетки 2014 е четно число. Това означава, че това число не може да се получи като произведение на две нечетни числа и следователно броят на редовете с нечетен брой оцветени клетки и броят на стълбовете с нечетен брой оцветени клетки са едновременно четни числа **(1 т.)**. Тогава тяхното произведение трябва да се дели на 4, което не е изпълнено за числото 2014 **(1 т.)**. Така, отговорът на б) е отрицателен.

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни математически състезания
Пловдив, 25 – 27 януари 2013 г.

Тема за 9. клас

Задача 1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$, с ъглополовяща AL, $L \in BC$. Окръжността с диаметър AL пресича AC и BL съответно в точки D и E, $D \neq A$, $E \neq L$. Да се докаже, че D е среда на AC тогава и само тогава, когато E е среда на BL.

Задача 2. Да се намерят всички цели стойности на параметрите p и q, за които уравнението $x^2 + px + q = 0$ има два реални корена x_1 и x_2, такива че

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Задача 3. Да се намерят всички естествени числа x, y и z, за които е изпълнено равенството

$$\frac{x^2 + y^2}{z!} = \frac{1}{x!} + \frac{1}{y!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Задача 4. В един турнир по тенис всеки играч изиграл по една игра с всеки друг, като никоя от игрите не завършила наравно. Оказало се, че най-големият брой играчи, които могат да седнат около кръгла маса така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е четирима. Да се докаже, че броят на начините, по които всички играчи могат да се строят в редица така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е кратен на пет.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни математически състезания
Пловдив, 25 – 27 януари 2013 г.

Тема за 10. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$|x^2 + x - 2| = ax + 2$$

има точно три реални решения.

Задача 2. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = \alpha < 90^\circ$. Нека M е средата на страната CD и $BP \perp AM$ $(P \in AM)$. Да се намери $\sphericalangle BPD$ и отношението $BP : PD$.

Задача 3. Нека N е броят на двойките цели числа (x, y), които са решения на неравенството

$$\sqrt{x - ay^2} > \sqrt{y - ax^2}.$$

Да се намерят всички положителни a, за които а) $N = 9$; б) $N = 10$?

Задача 4. В държава с n, $n \geq 4$, града се поддържат полети между повече от $3(n-1)/2$ двойки градове. Маршрут наричаме редица от градове $v_1, \dots, v_k$, такава, че съществува полет от v_i до v_{i+1} за всяко $i = 1, \dots, k-1$. Два маршрута наричаме независими, ако те нямат общ град с изключение на крайните градове. Да се докаже, че съществуват два града x и y , между които съществуват три независими маршрута.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни математически състезания
Пловдив, 25 – 27 януари 2013 г.

Тема за 11. клас

Задача 1. Да се намерят всички стойности на $x \in [0, 90^\circ]$ за които числата $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, $\sin x . \cos x$ и 1, в някакъв ред, образуват геометрична прогресия.

Задача 2. Вписаната в правоъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до хипотенузата AB в точка C_1. Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ са такива, че PQ е успоредна на BC и в четириъгълника AC_1PQ може да се впише окръжност. Да се докаже, че $CP = O_1O_2$, където O_1 и O_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

Задача 3. Намерете най-голямото реално число a със следното свойство: съществува изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, всички страни на който са равни на 1, и точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 във вътрешността на шестоъгълника за които всяка от отсечките AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 и FF_1 има дължина a и никои две от тези отсечки нямат обща точка, която е вътрешна и за двете отсечки.

Задача 4. В равнината са дадени $2n$ точки, никои три от които не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки така, че за всеки n точки съществува точка, свързана с отсечка с всяка от тези n точки. Да се намери минималния възможен брой прекарани отсечки.

Време за работа: 4.5 часа

Министерство на Образованието, Младежта и Науката
Съюз на Математиците в България

Зимни математически състезания
Пловдив, 25 – 27 януари 2013 г.

Тема за 12. клас

Задача 1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\left|\frac{|x+1|-|x-1|}{|x+1|+|x-1|}\right| = a$$

има четири различни реални решения, които образуват аритметична прогресия.

Задача 2. Дължините на страните на неравностранен триъгълник образуват аритметична прогресия и правата през медицентъра и центъра на вписаната окръжност е перпендикулярна на негова страна. Да се докаже, че триъгълникът е правоъгълен.

Задача 3. Да се докаже, че ако $a, b > -1$, то

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \geq \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Задача 4. Да се докаже, че всеки полином от трета степен с реални коефициенти може да се представи като сума от кубовете на три неконстантни полинома с реални коефициенти.

Време за работа: 4.5 часа

Кратки решения на задачите

Задача 9.1. Даден е равнобедрен $\triangle ABC$, $AC = BC$, с ъглополовяща AL, $L \in BC$. Окръжността с диаметър AL пресича AC и BL съответно в точки D и E, $D \neq A$, $E \neq L$. Да се докаже, че D е среда на AC тогава и само тогава, когато E е среда на BL.

Решение. Ако D е среда на AC, то LD е медиана и височина в $\triangle ALC$ и следователно $\sphericalangle ACL = \sphericalangle CAL$. От друга страна,

$$\sphericalangle CAL = \frac{1}{2} \sphericalangle BAC = \frac{180^\circ - \sphericalangle ACL}{2}$$

и лесно получаваме, че $\sphericalangle ACB = 36^\circ$ и $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAC = 72^\circ$. Сега от $\triangle ABL$ намираме $\sphericalangle ALB = 72^\circ$, т.е. $\triangle ABL$ е равнобедрен и AE е, освен височина, и медиана в този триъгълник, т.е. E е среда на BL. Другата посока се доказва аналогично.

Оценяване. 1 т. за доказване, че $\triangle ACL$ е равнобедрен, 1 т. за намиране на ъглите на $\triangle ABC$, 1 т. за доказване, че $\triangle ABL$ е равнобедрен, 1 т. за доказване, че E е среда на BL, 2 т. за обратната посока.

Задача 9.2. Да се намерят всички цели стойности на параметрите p и q, за които уравнението $x^2 + px + q = 0$ има два реални корена x_1 и x_2, такива че

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2}.$$

Решение. С помощта на формулите на Виет последователно получаваме

$$\frac{p^3}{q^2} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1^2 + x_2^2} \iff \frac{p^3}{q^2} = \frac{(x_1 + x_2)^3 - 3x_1x_2(x_1 + x_2)}{(x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2} \iff \frac{p^3}{q^2} = \frac{3pq - p^3}{p^2 - 2q}.$$

Последното равенство очевидно е изпълнено при $p = 0$, като тогава корените са реални точно когато $q < 0$.

При $p \neq 0$ получаваме $p^2(p^2 - 2q) = q^2(3q - p^2) \iff p^4 + q(q-2)p^2 - 3q^3 = 0$, което разглеждаме като биквадратно уравнение относно p. Имаме

$$p^2 = \frac{-q(q-2) \pm \sqrt{D}}{2},$$

където $D = q^2[(q-2)^2 + 12q] = q^2(q^2 + 8q + 4)$. Тъй като $q \neq 0$, числото $q^2 + 8q + 4 = t^2$ трябва да е точен квадрат на цяло число t. Получаваме $(q+4)^2 - t^2 = 12 \iff (q + 4 + t)(q + 4 - t) = 12$. Тъй като $q + 4 - t$ и $q + 4 + t$ са с еднаква четност, имаме само две възможности: $q+4-t=2$, $q+4+t=6$ или $q+4-t=-6$, $q+4+t=-2$. В първия случай получаваме $q=0$, което е невъзможно, а във втория $q=-8$, което дава $p^2=(-80\pm 16)/2<0$, противоречие.

Окончателно, решенията на задачата са двойките $(0,q)$, където q е произволно цяло отрицателно число.

Оценяване. 1 т. за получаване на $\dfrac{p^3}{q^2}=\dfrac{3pq-p^3}{p^2-2q}$, 1 т. за случая $p=0$; 1 т. за получаване на биквадратното уравнение, 1 т. за получаване на уравнението $q^2+8q+4=t^2$ и 1 т. за решаването му, 1 т. за проверка на решенията.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа x, y и z, за които е изпълнено равенството

$$\frac{x^2+y^2}{z!}=\frac{1}{x!}+\frac{1}{y!}.$$

(С $n!$ се означава произведението на естествените числа от 1 до n.)

Решение. Без ограничение на общността можем да считаме, че $y\geq x$. При $y=x$ получаваме $x^2.x!=z!$, като очевидно $z\geq x$. Това уравнение няма решение при $z\geq x+2$, защото тогава лявата страна е по-малка от дясната, а случаите $z=x$ и $z=x+1$ лесно водят до решението $x=y=z=1$.

Нека $y>x$, в частност $y\geq 2$. Умножаваме двете страни на уравнението с $y!$ и получаваме

$$\frac{y!(x^2+y^2)}{z!}=1+y(y-1)\dots(x+1).$$

Ако $y>z$, получаваме, че лявата страна се дели на y и оттам $y|1$, противоречие. Следователно $y\leq z$.

Случай 1. При $y=z$ имаме $x^2+y^2=1+y(y-1)\dots(x+1)$. Ако $y\geq x+3$, то $y\geq 4$ и

$$(y-3)^2+y^2\geq x^2+y^2\geq 1+y(y-1)(y-2),$$

откъдето $y^3-5y^2+8y-8\leq 0 \iff y^2(y-5)+8(y-1)\leq 0$. Лесно се вижда, че последното не е изпълнено при $y\geq 5$, а $y=4$ не дава решение. Следователно $x+1\leq y\leq x+2$. При тези две възможности получаваме съответно уравненията $2x^2+x-1=0$ и $2(x^2+2x+2)=1+(x+1)(x+2)$, които очевидно нямат решения в естествени числа.

Случай 2. При $y<z$ имаме $\dfrac{x^2+y^2}{z(z-1)\dots(y+1)}=1+y(y-1)\dots(x+1)$. Ясно е, че при $y\geq x+3$ горните оценки са даже усилени, което означава, че отново $x+1\leq y\leq x+2$. При $y=x+2\geq 3$ получаваме $z\geq 4$ и значи

$$\frac{x^2+(x+2)^2}{4}\geq\frac{x^2+y^2}{z(z-1)\dots(y+1)}=1+(x+1)(x+2).$$

Оттук $2x^2+4x+4 \geq 4x^2+12x+12$, което очевидно е невъзможно. Остава да разгледаме $y = x+1$, като сега $\dfrac{x^2+(x+1)^2}{z(z-1)\dots(x+2)} = x+2 \geq 3$. Ако в знаменателя отляво има поне два множителя, той не надминава $\dfrac{2x^2+2x+1}{x^2+5x+6} < 2$. Следователно $z = x+2$ и $2x^2+2x+1 = (x+2)^2$, откъдето $x = 3$, съответно $y = 4$ и $z = 5$.

Окончателно, решенията са $(x, y, z) = (1, 1, 1)$, $(3, 4, 5)$ и $(4, 3, 5)$.

Оценяване. 1 т. за случая $x = y$, 1 т. за доказване на $y \leq z$, 2 т. за случай 1 и 3 т. за случай 2.

Задача 9.4. В един турнир по тенис всеки играч изиграл по една игра с всеки друг, като никоя от игрите не завършила наравно. Оказало се, че най-големият брой играчи, които могат да седнат около кръгла маса така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е четирима. Да се докаже, че броят на начините, по които всички играчи могат да се строят в редица така, че всеки да е победил стоящия отдясно, е кратен на пет.

Решение. Група от играчи, които могат да седнат около кръгла маса така, че всеки да е победил стоящия отдясно, ще наричаме цикъл, а редица от играчи, в която всеки е победил стоящия отдясно, ще наричаме пътека.

Нека A, B, C и D образуват (в този ред) един цикъл от четирима играчи; тях ще наричаме "средни".

Нека X бъде произволен друг играч, който е победил A. Ако D е победил X, то $X - A - B - C - D$ би бил цикъл, съдържащ повече от четирима играчи, което е противоречие. Следователно X е победил D. По същия начин последователно установяваме, че X е победил и C и B. Всеки такъв играч ще наричаме "силен".

Аналогично се вижда, че всеки играч, който е победен от A, е победен и от B, C и D. Всеки такъв играч ще наричаме "слаб".

Да допуснем, че някой слаб играч X е победил някой силен играч Y. Тогава $X - Y - A - B - C - D$ би бил цикъл, съдържащ повече от четирима играчи, което е противоречие.

Получихме, че всеки силен играч е победил всички средни и всички слаби играчи, и всеки среден играч е победил всички слаби играчи. Оттук следва, че във всяка пътека трябва да стоят първо силните играчи, след това средните, и най-накрая – слабите.

Нека P, Q и R бъдат съответно броят на начините, по които силните, средните и слабите играчи могат да бъдат подредени в пътека (възможно е изобщо да няма силни или слаби играчи – тогава полагаме съответно $P = 1$ или $R = 1$). Тогава броят на начините, по които всички играчи могат да бъдат строени в пътека, е равен на PQR. Но $Q = 5$ винаги, независимо от изходите на срещите $A - C$ и $B - D$ и с това задачата е решена.

Оценяване. 1 т. за ясно формулирана идея, че средните играчи са важни за преброяването, по 1 т. за въвеждане и доказване на свойствата на слабите и силните играчи, 2 т. за съображението за PQR начина за подредба в исканата редица и 2 т. за доказване, че $Q = 5$.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, за които уравнението

$$|x^2 + x - 2| = ax + 2$$

има точно три реални решения.

Решение. Тъй като $x^2 + x - 2 = (x + 2)(x - 1)$, разглеждаме два случая:

Случай 1. Нека $x \in [-2, 1]$. Тогава уравнението е еквивалентно на $x^2 + (1 + a)x = 0$, което в разглеждания интервал има два различни корена $x = 0$ и $-(a + 1)$ при $a \in [-2, -1) \cup (-1, 1]$ и един корен $x = 0$ в противен случай.

Случай 2. Нека $x \in (-\infty, -2) \cup (1, +\infty)$. Тогава уравнението е еквивалентно на $x^2 + (1 - a)x - 4 = 0$, което в разглеждания интервал има два различни корена при $a \in (-2, 1)$ и един корен в противен случай.

Така необходимото и достатъчно условие даденото уравнение да има точно три реални решения е $a = -2$, $a = 1$ или $a = -1$. Съответните решения са $x = 0, 1, -4$; $0, -2, 2$ и $0, 1 - \sqrt{5}, 1 + \sqrt{5}$.

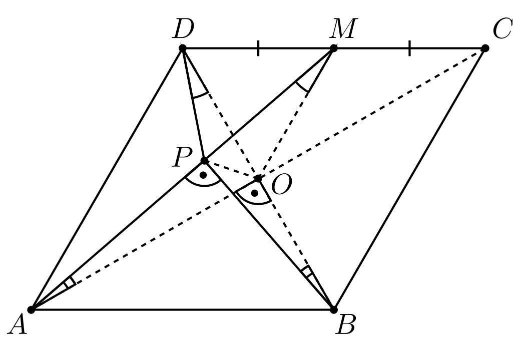
Оценяване. а) 1 т. за разглеждане на двата случая; 1 т. за определяне броя на корените на уравнението $x^2 + (1 + a)x = 0$ в случай 1; 2 т. за определяне броя на корените на уравнението $x^2 + (1 - a)x - 4 = 0$ в случай 2; 2 т. за окончателния отговор.

Задача 10.2. Даден е ромб $ABCD$ с $\sphericalangle BAD = \alpha < 90^\circ$. Нека M е средата на страната CD и $BP \perp AM$ ($P \in AM$). Да се намери $\sphericalangle BPD$ и отношението $BP : PD$.

Решение Нека O е пресечната точка на диагоналите AC и BD. От $\sphericalangle APB = 90^\circ = \sphericalangle AOB$ следва, че четириъгълникът $ABOP$ е вписан. Тогава

$$\sphericalangle POD = 180^\circ - \sphericalangle POB = \sphericalangle PAB = \sphericalangle PMD$$

и следва, че четириъгълникът $DPOM$ е вписан. От $\sphericalangle PDO = \sphericalangle PMO$ и $\sphericalangle PBO = \sphericalangle PAO$ следва, че $\triangle BDP \sim \triangle AMO$. Освен това OM е средна отсечка в $\triangle ACD$ и получаваме



$$\sphericalangle BPD = \sphericalangle AOM = 180^\circ - \frac{\alpha}{2} \text{ и } BP : PD = AO : OM = AC : AD = 2\cos\frac{\alpha}{2}.$$

Оценяване: а) 1 т. за построяването на т. O и $ABOP$ – вписан; 1 т. за $DPOM$ – вписан; 2 т. за $\triangle BDP \sim \triangle AMO$; 1 т. за $\sphericalangle BPD = 180^\circ - \frac{\alpha}{2}$; 1 т. за $BP : PD = 2\cos\frac{\alpha}{2}$.

Задача 10.3. Нека N е броят на двойките цели числа (x, y), които са решения на неравенството

$$\sqrt{x - ay^2} > \sqrt{y - ax^2}.$$

Да се намерят всички положителни a, за които а) $N = 9$; б) $N = 10$?

Решение. Дефиниционната област включва всички точки (x, y), лежащи между и върху графиките на $y = ax^2$ и $y = \sqrt{x/a}$ за $x \in [0, 1/a]$. Неравенството от условието се опростява до $(x - y)(1 + a(x + y)) > 0$, откъдето $x > y$. Числото N е равно на броя на точките с цели координати, заключени между графиките на $y = ax^2$ и $y = x$, $x \in [0, 1/a]$, но нележащи на втората от тях.

Очевидно $N = 0$ при $a \leq 1$. Когато a намалява от 1 към 0, N расте скокообразно, като големините на скоковете са равни на броя на точките с цели координати, лежащи върху графиката на $y = ax^2$ в момента на скока (т.е. за съответно a).

Да намерим най-голямото $a \in (0, 1)$, за което графиката на $y = ax^2$, $x \in [0, 1/a]$, съдържа две различни точки с цели координати. Очевидно това е еквивалентно на намирането на най-малката цяла стойност на $\dfrac{1}{a}$, за която a се среща в две от множествата $A_n = \{\dfrac{k}{n^2} \mid k = 1, \ldots, n - 1\}$. Директно се проверява, че при $a = \dfrac{1}{9}$ имаме първи скок с големина 2, и че за тази стойност на a имаме $N = 10$. Следователно за всяко $a \geq \dfrac{1}{9}$ имаме $N \geq 10$, а за $a < \frac{1}{9}$ имаме $N \leq 8$, т.е. не съществуват стойности на a, за които $N = 9$. Лесно се проверява, че за всяко $\dfrac{7}{64} < a \leq \dfrac{1}{9}$ имаме $N = 10$.

Оценяване. 1 т. за дефиниране на N като броя на точките с две цели координати, заключени между графиките на $y = ax^2$ и $y = x$, $x \in [0, 1/a]$, но нележащи на втората от тях; 1 т. за досещането да се търсят скоковете, 2 т. за намиране на първия скок с големина 2, 1 т. за довършване на подточка а) и 2 т. за довършване на подточка б).

Задача 10.4. В държава с n, $n \geq 4$, града се поддържат полети между повече от $3(n - 1)/2$ двойки градове. Маршрут наричаме редица от градове $v_1, \ldots, v_k$, такава, че съществува полет от v_i до v_{i+1} за всяко $i = 1, \ldots, k - 1$. Два маршрута наричаме независими, ако те нямат общ град с изключение на крайните градове. Да се докаже, че съществуват два града x и y , между които съществуват три независими маршрута.

Решение. Трябва да докажем, че в граф G с n върха и повече от $3(n - 1)/2$ ребра съществуват два върха, между които има поне три независими пътя.

Ще използваме индукция по n. За $n = 4$ твърдението е очевидно. Без ограничение на общността можем да считаме, че графът е свързан, както и че всеки връх е от степен поне 2. Нека C е цикъл в G. Ако съществува път, свързващ два върха в цикъла задачата е решена. Следователно всички ребра, излизащи от върхове на C имат в другия си край различни върхове от G.

Разглеждаме граф G' с множество от върхове $(G \setminus C) \cup \{C\}$ и с ребра – ребрата от G, имащи поне един край в $G \setminus C$. Извън $G \setminus C$ има поне три върха и броят на ребрата в G' е по-голям от $3(n'-1)/2$, където $n' = n - |C| + 1$ е броят на върховете в G'. Съгласно индукционното допускане в G' съществуват два върха, свързани с поне три независими пътя. Оттук лесно конструираме двойка върхове в G, между които съществуват три независими пътя.

Оценяване. 1 т. за опростяването, че графът е свързан и всички върхове са от степен поне 2; 6 т. за пълно провеждане на индукцията; 1 т. се отнема за липса на обосновка, защо G съдържа цикъл; 1 т. се отнема при ненаправена проверкана това, че G' удовлетворявя условията на теоремата.

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на $x \in [0, 90°]$ за които числата $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$, $\sin x . \cos x$ и 1, в някакъв ред, образуват геометрична прогресия.

Решение. Ако 1 е средният член на прогресията, то

$$\frac{\sin x \cos x}{\sin x + \cos x} = 1,$$

което е невъзможно поради $\sin x + \cos x > \sin x \cos x$ (последното е еквивалентно на $(\sin x - 1)(\cos x - 1) < 1$).

Ако $\sin x \cos x$ е средният член на прогресията, то

$$\frac{1}{\sin x + \cos x} = \sin^2 x \cos^2 x,$$

което е невъзможно поради $\dfrac{1}{\sin x + \cos x} \geq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ (използваме известното неравенство $\sin x + \cos x \leq \sqrt{2}$) и $\sin x \cos x \leq \dfrac{1}{2}$, т.е. $\sin^2 x \cos^2 x \leq \dfrac{1}{4} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

Ако $\dfrac{1}{\sin x + \cos x}$ е средният член на прогресията, то

$$\sin x \cos x = \left(\frac{1}{\sin x + \cos x} \right)^2.$$

Тъй като $\sin x \cos x = \dfrac{(\sin x + \cos x)^2 - 1}{2}$, то горното равенство е еквивалентно но $\dfrac{1}{a^2} = \dfrac{a^2 - 1}{2}$ при $a = \sin x + \cos x$. Единственото решение е $a^2 = 2$, т.е. $a = \sqrt{2}$. Тогава $x = 45°$.

Оценяване: по 2 т. за решаване на всеки от трите случая.

Задача 11.2. Вписаната в правоъгълен триъгълник ABC окръжност се допира до хипотенузата AB в точка C_1. Точките $P \in CC_1$ и $Q \in AC$ са такива, че PQ е успоредна на BC и в четириъгълника AC_1PQ може да се впише окръжност. Да се докаже, че $CP = O_1O_2$, където O_1 и O_2 са центровете на вписаните окръжности в $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$.

Решение. При стандартните означения за $\triangle ABC$ имаме $AC_1 = p - a$ и $BC_1 = p - b$. Нека X и Y са допирните точки съответно на вписаните окръжности в $\triangle AC_1C$ и $\triangle BC_1C$ със страната CC_1. Пресмятаме

$$CX = \frac{CC_1 + CA - AC_1}{2} = \frac{CC_1 + b - (p-a)}{2} = \frac{CC_1 + a + b - p}{2}$$

и аналогично

$$CY = \frac{CC_1 + CB - BC_1}{2} = \frac{CC_1 + a - (p-b)}{2} = \frac{CC_1 + a + b - p}{2}.$$

Следователно $CX = CY$, т.е. двете окръжности допират страната CC_1 в една и съща точка. Тогава $O_1O_2 \perp CC_1$.

Нека $\sphericalangle ACO_1 = \sphericalangle C_1CO_1 = \varphi$ и $\sphericalangle BCO_2 = \sphericalangle C_1CO_2 = \psi$. Тогава $\sphericalangle QPC = \sphericalangle PCB = 2\psi$ и понеже PO_1 е ъглополовяща на $\sphericalangle QPC_1$, намираме $\sphericalangle QPO_1 = 90^\circ - \psi$. Сега от $\triangle CPO_1$ получаваме

$$\sphericalangle CO_1P = 180^\circ - \varphi - 2\psi - (90^\circ - \psi) = 90^\circ - \varphi - \psi.$$

Следователно $O_1P \perp CO_2$, т.е. P е ортоцентър на $\triangle CO_1O_2$. Тъй като $\sphericalangle O_1CO_2 = \frac{1}{2} \sphericalangle ACB = 45^\circ$, то

$$CP = 2R\cos \sphericalangle O_1CO_2 = O_1O_2 \operatorname{cotg} \sphericalangle O_1CO_2 = O_1O_2.$$

Оценяване. 2 т. за доказване, че $CX = CY$; 3 т. за доказване, че P е ортоцентър на $\triangle CO_1O_2$; 1 т. за довършване нарешението.

Задача 11.3. Намерете най-голямото реално число a със следното свойство: съществува изпъкнал шестоъгълник $ABCDEF$, всички страни на който са равни на 1, и точки A_1, B_1, C_1, D_1, E_1 и F_1 във вътрешността на шестоъгълника за които всяка от отсечките AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 и FF_1 има дължина a и никои две от тези отсечки нямат обща точка, която е вътрешна и за двете отсечки.

Решение. Да разгледаме сборовете $\sphericalangle A_1AB + \sphericalangle B_1BA$, $\sphericalangle B_1BC + \sphericalangle C_1CB$, $\sphericalangle C_1CD + \sphericalangle D_1DC$, $\sphericalangle D_1DE + \sphericalangle E_1ED$, $\sphericalangle E_1EF + \sphericalangle F_1FE$ и $\sphericalangle F_1FA + \sphericalangle A_1AF$. Тъй като сборът на ъглите на шестоъгълника е 720°, то поне един от тези сборове не надминава 120°. Без ограничение нека това е $\sphericalangle A_1AB + \sphericalangle B_1BA$, т.е.

$$\sphericalangle A_1AB + \sphericalangle B_1BA \le 120^\circ.$$

Тогава правите AA_1 и BB_1 се пресичат в точка X, която е в една и съща полуравнина с шестоъгълника $ABCDEF$ спрямо правата AB и $\sphericalangle AXB \ge 60^\circ$. Тъй като AA_1 и BB_1 нямат обща вътрешна точка, то поне една от отсечките AX и BX има дължина поне a. От друга страна, всяка от тези отсечки е най-много равна на диаметъра на окръжността, от която отсечката AB се вижда под ъгъл 60°. Понеже този диаметър е равен на $\dfrac{AB}{\sin 60^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$, то $a \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}$.

Да разгледаме правилен шестоъгълник $ABCDEF$ със страна 1. Нека $A_1 = AE \cap FD$, $B_1 = BF \cap AE$, $C_1 = CA \cap BF$, $D_1 = DB \cap AC$, $E_1 = EC \cap DB$ и $F_1 = FD \cap EC$. Отсечките AA_1, BB_1, CC_1, DD_1, EE_1 и FF_1 са с равни дължини и всеки две от тях нямат обща вътрешна точка. Понеже $\sphericalangle FAA_1 = 120^\circ - 90^\circ = 30^\circ$, то от $\triangle FAA_1$ намираме $AA_1 = \dfrac{1}{\cos 30^\circ} = \dfrac{2}{\sqrt{3}}$. Следователно търсената най-голяма стойност е $a = \dfrac{2}{\sqrt{3}} = \dfrac{2\sqrt{3}}{3}$.

Оценяване. 5 т. за оценката $a \le \dfrac{2}{\sqrt{3}}$; 2 т. за примера.

Задача 11.4. В равнината са дадени $2n$ точки, никои три от които не лежат на една права. Някои от точките са свързани с отсечки така, че за всеки n точки съществува точка, свързана с отсечка с всяка от тях. Да се намери минималния възможен брой прекарани отсечки.

Решение. Първо ще докажем следната

Лема. Даден е граф G с n върха със следното свойство: за всеки k, $1 \le k \le n-1$ върха на G съществува връх, който е свързан с всеки от тези k върха. Тогава минималният брой ребра на G е $\left\lceil \dfrac{(2k-1)n - k^2 + 1}{2} \right\rceil$.

Доказателство: Ще докажем твърдението с индукция по k. При $k = 1$ от всеки връх трябва да излиза поне едно ребро и следователно са необходими поне $\left\lceil \dfrac{n}{2} \right\rceil$ ребра. Следователно твърдението е вярно при $k = 1$ и прозволно n.

Нека $2 \le k+1 < n$ и да допуснем, че твърдението е вярно за всички стойности по-малки от $k+1$. Нека A е произволен връх, който не е свързан с s от дадените върхове (да означим множеството от тези върхове с M) и съответно е свързан с $n - s - 1$

върха (да означим множеството от тези върхове с N). Лесно се забелязват следните свойства:

1. Всеки връх е от степен поне $k+1$, защото в противен случай множеството от връх и свързаните с него най-много k върха не изпълнява условието на задачата.

2. Множеството N удовлетворява условието на задачата за k върха. За целта е достатъчно да разгледаме произволни k върха от N и върха A.

3. За всеки два върха свързаните едновременно с тях върхове са поне k. Следователно от всеки връх от M излизат поне k ребра към върховете в N.

Понеже всеки връх в M е от степен поне $k+1$, то имаме още поне $\lceil \frac{s}{2} \rceil$ ребра.

Използвайки индукционната хипотеза за N и неравеството $\lceil a \rceil + \lceil b \rceil \geq \lceil a+b \rceil$, получаваме, че общият брой ребра е поне

$$n - s - 1 + ks + \left\lceil \frac{s}{2} \right\rceil + \left\lceil \frac{(2k-1)(n-s-1) - k^2 + 1}{2} \right\rceil \geq$$

$$\left\lceil \frac{(2k+1)n - 2k - k^2}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{(2k+1)n - (k+1)^2 + 1}{2} \right\rceil.$$

За решаване на задачата трябва да заместим в получената формула n с $2n$, а k с n. Получаваме, че ребрата в графа са поне

$$\left\lceil \frac{3n^2 - 2n + 1}{2} \right\rceil.$$

Ще построим граф с $2n$ върха и $\left\lceil \frac{3n^2 - 2n + 1}{2} \right\rceil$ ребра, който има исканото свойство. Разделяме върховете на две групи от съответно $n-1$ и $n+1$ върха. Всеки връх от първата група свързваме с всички върхове на графа. Във втората група прекарваме $\left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil$ ребра така, че от всеки връх да излиза поне едно ребро. Директно се вижда, че за всеки n върха съществува връх, който е свързан с всеки един от тях. Ребрата на този граф са

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} + (n-1)(n+1) + \left\lceil \frac{n+1}{2} \right\rceil = \left\lceil \frac{3n^2 - 2n + 1}{2} \right\rceil.$$

Оценяване. 2 т. за верен отговор; най-много 3 т. за коректни разсъждения, които могат да се допълнят до решение.

Задача 12.1. Да се намерят стойностите на реалния параметър a, за които уравнението

$$\left| \frac{|x+1| - |x-1|}{|x+1| + |x-1|} \right| = a$$

има четири различни реални решения, които образуват аритметична прогресия.

Решение. Да означим с $f(x)$ функцията в лявата част на уравнението. Лесно се вижда, че

$$f(x) = \begin{cases} |x|, & |x| \le 1 \\ 1/|x|, & |x| \ge 1 \end{cases}.$$

Следователно уравнението има 4 различни решения при $0 < a < 1$ и те са $x = \frac{1}{a}, a, -a, -\frac{1}{a}$. Тези числа образуват аритметична прогресия, когато $\frac{1}{a} - a = a + a = -a + \frac{1}{a}$, т.е. при $a = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Оценяване. 2 т. за извода $0 < a < 1$, 2 т. за намиране на четирите решения и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.2. Дължините на страните на неравностранен триъгълник образуват аритметична прогресия и правата през медицентъра и центъра на вписаната окръжност е перпендикулярна на негова страна. Да се докаже, че триъгълникът е правоъгълен.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Нека $GI \perp AB$, C_1 е средата на B, а C_2 и C_3 са проекциите съответно на I и C върху AB. Тогава $GC_2||CC_3$ и значи

$$\frac{C_1C_3}{C_1C_2} = \frac{C_1C}{C_1G} = 3.$$

Можем да считаме, че $a > b$. Тогава

$$C_1C_2 = BC_2 - BC_1 = \frac{a-b+c}{2} - \frac{c}{2} = \frac{a-b}{2},$$

а от косинусовата теорема следва, че

$$C_1C_3 = BC_3 - BC_1 = a\cos\beta - \frac{c}{2} = \frac{a^2-b^2+c^2}{2c} - \frac{c}{2} = \frac{(a-b)(a+b)}{2c}$$

Оттук $3c = a + b$. От друга страна, a, b, c образуват (в някакъв ред) аритметична прогресия, откъдето $2b = a + c$. Получаваме, че $a : b : c = 5 : 4 : 3$ и значи $\alpha = 90^\circ$.

Забележка. Ако страните на правоъгълен триъгълник образуват аритметична прогресия, то те са в отношение $3 : 4 : 5$ и правата MI е перпендикулярна на по-големия катет.

Оценяване. 1 т. за $C_1C_3 = 3C_1C_2$, 1 т. за изразяване на C_1C_2, 2 т. за изразяване на C_1C_3 и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Да се докаже, че ако $a, b > -1$, то

$$\frac{1+a^6}{1+a} \cdot \frac{1+b^6}{1+b} \ge \frac{1+ab}{2} \cdot \frac{1+a^4b^4}{2}.$$

Кога се достига равенство?

Решение. Имаме, че

$$\left(\frac{1+x^2}{1+x}\right)^2 \geq \frac{1+x^2}{2}, \quad \left(\frac{1+x^3}{1+x}\right)^2 = (1-x+x^2)^2 \geq \frac{1+x^4}{2},$$

(след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите второто неравенство приема вида $(x-1)^4 \geq 0$). Ще използваме още, че

$$(1+x^2)(1+y^2) \geq (1+xy)^2.$$

Тогава

$$\frac{1+a^2}{1+a} \cdot \frac{1+b^2}{1+b} \geq \sqrt{\frac{1+a^2}{2} \cdot \frac{1+b^2}{2}} \geq \frac{1+ab}{2},$$

$$\frac{1+a^6}{1+a^2} \cdot \frac{1+b^6}{1+b^2} \geq \sqrt{\frac{1+a^8}{2} \cdot \frac{1+b^8}{2}} \geq \frac{1+a^4b^4}{2}$$

и остава да умножим тези неравенства. Равенство се достига само при $a = b = 1$.

Забележка. Неравенството

$$\left(\frac{1+x^6}{1+x}\right)^2 \geq \frac{1+x^2}{2} \cdot \frac{1+x^8}{2},$$

което всъщност е нужно, може да се докаже и директно. Наистина, след привеждане под общ знаменател и разкриване на скобите то приема вида

$$3x^{12} - 2x^{11} - 2x^{10} - 2x^9 - x^8 + 8x^6 - x^4 - 2x^3 - 2x^2 - 2x + 3 \geq 0,$$

което може да се запише като

$$(x-1)^2[2(x+1)^2(x^4-1)^2 + (x^2+1)(x^8+1)] \geq 0.$$

Оценяване. 5 т. за доказателство на неравенството при $a = b$ и 2 т. за довършване на решението.

Задача 12.4. Да се докаже, че всеки полином от трета степен с реални коефициенти може да се представи като сума от кубовете на три неконстантни полинома с реални коефициенти.

Решение. Всеки полином P от трета степен с реални коефициенти има поне една реална нула. Ако тази нула е трикратна, то твърдението е очевидно. Иначе P има еднократна реална нула α. Тогава $P(x+\alpha) = a(x^3 + 3bx^2 + 3cx)$ $(ac \neq 0)$ и трябва да докажем твърдението за полинома в скобите. Достатъчно е да намерим реални числа $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ така, че

$$x^3 + 3bx^2 + 3cx = \lambda_1(x+\alpha_1)^3 + \lambda_2(x+\alpha_2)^3 + \lambda_3 x^3.$$

Имаме, че $\lambda_3 = 1 - \lambda_1 - \lambda_2$, където λ_1 и λ_2 са решения на преопределената линейна система

$$\left|\begin{array}{l} \alpha_1\lambda_1 + \alpha_2\lambda_2 = b \\ \alpha_1^2\lambda_1 + \alpha_2^2\lambda_2 = c \\ \alpha_1^3\lambda_1 + \alpha_2^3\lambda_2 = 0 \end{array}\right. .$$

При $0 \neq \alpha_1 \neq \alpha_2 \neq 0$ системата от първите две уравнения има (единствено) решение. Ако умножим първото уравнене по $\alpha_1\alpha_2$ и от него извадим второто умножено по $\alpha_1 + \alpha_2$, ще получим третото уравнение при условие, че $b\alpha_1\alpha_2 = c(\alpha_1 + \alpha_2)$. Понеже $c \neq 0$, можем да намерим различни ненулеви реални числа β_1 и β_2 така, че $b/c = \beta_1 + \beta_2$. Остава да положим $\alpha_1 = 1/\beta_1$ и $\alpha_2 = 1/\beta_2$.

Забележки. а) С помощта на стандартни методи от линейната алгебра може да се докаже, че ако P е даден полином от първа, втора или трета степен с реални коефициенти, то за почти всички двойки от (различни) реални числа α_1 и α_2 съществуват единствени реални числа α_3 ($\neq \alpha_1, \alpha_2$), $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ така, че

$$P(x) = \lambda_1(x + \alpha_1)^3 + \lambda_2(x + \alpha_2)^3 + \lambda_3(x + \alpha_3)^3.$$

Броят (три) на полиномите в горното представяне не може да се намали.

б) Всеки полином от втора или трета степен с реални коефициенти може да се представи и като сума от кубовете на един константен и два неконстантни полинома с реални коефициенти. Това не е вярно за полином от първа степен.

Оценяване. 2 т. за редукцията $P(0) = 0$, 1 т. за свеждане до *линейна* система и 4 т. за довършване на решението.