<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

30.08.2013 Г. – <u>ВАРИАНТ 2</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кое от числата е най-голямо?

А) $8^{-0,01}$ **Б)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{0,1}$ **В)** $\left(\frac{1}{8}\right)^{\frac{1}{2}}$ **Г)** $0,125^{\frac{3}{2}}$

2. Стойността на израза $\frac{2xy-y^2}{5y+2x}$ **при** $x=\sqrt{3}$ **и** $y=-2\sqrt{3}$ **е равна на:**

А) $-8\sqrt{3}$ **Б)** $\frac{-2\sqrt{3}}{3}$ **В)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ **Г)** $\sqrt{3}$

3. Всичките допустими стойности на израза $\sqrt{|x|}$ **са:**

А) $(-\infty;+\infty)$ **Б)** $[0;+\infty)$ **В)** $(-\infty;0)\cup(0;+\infty)$ **Г)** $(-\infty;0]$

4. Стойността на израза $\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{16}-\log_3\frac{1}{27}+\lg 0,1$ **е равна на:**

А) -2 **Б)** -1 **В)** 0 **Г)** 6

5. Кое от уравненията има реални корени, чийто сбор е равен на 5**?**

А) $x^2+5x+5=0$ **Б)** $x^2-5x+7=0$

В) $x^2-5x-3=0$ **Г)** $x^2+5x+6=0$

6. Решенията на неравенството $\frac{x-1}{x+4}<2$ **са:**

А) $x\in(-9;+\infty)$ **Б)** $x\in(-\infty;-9)\cup(-4;+\infty)$

В) $x\in(-9;-4)$ **Г)** $x\in(-\infty;-4)\cup(3;+\infty)$

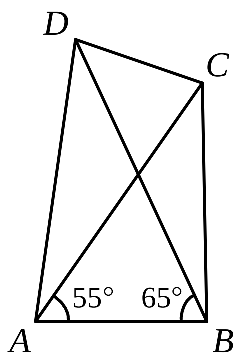
7. Стойността на израза $\cos 105^\circ - \cos 165^\circ$ **е:**

А) $-\sqrt{3}$ **Б)** $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ **В)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** $\sqrt{3}$

8. Основата и бедрото на равнобедрен триъгълник са съответно 12 cm **и** 10 cm**.**
Радиусът на вписаната му окръжност е равен на:

А) 1,5 cm **Б)** 3 cm **В)** 5 cm **Г)** 8 cm

9. Произведението от дължините на диагоналите AC **и** BD **на четириъгълника** $ABCD$ е 24**,** $\angle CAB = 55^\circ$ **и** $\angle ABD = 65^\circ$ **.**
Лицето на $ABCD$ **е равно на:**



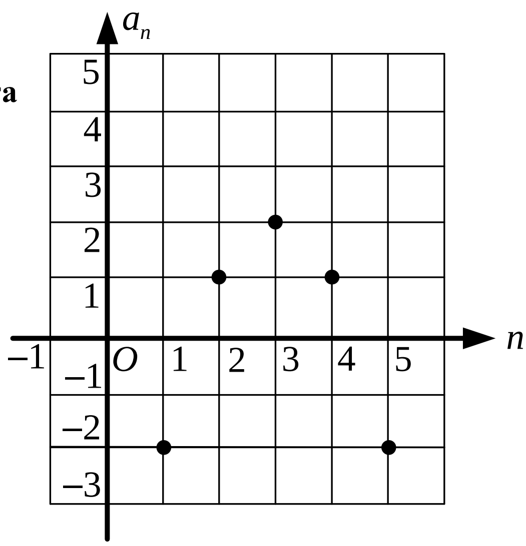
А) $12\sqrt{3}$ **Б)** 12

В) $6\sqrt{3}$ **Г)** 6

10. Ако за геометрична прогресия $a_2 = -2\sqrt{3}$ **и** $a_5 = 18$**, то частното на прогресията е равно на:**

А) $-\frac{1}{3}$ **Б)** $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ **В)** $-\sqrt{3}$ **Г)** $3\sqrt{3}$

11. Формулата на общия член $a_n = an^2 + bn + c$ **на числовата редица, първите пет члена от която са изобразени графично на фигурата, е:**



А) $a_n = -n^2 + 6n - 7$

Б) $a_n = n^2 - 6n + 3$

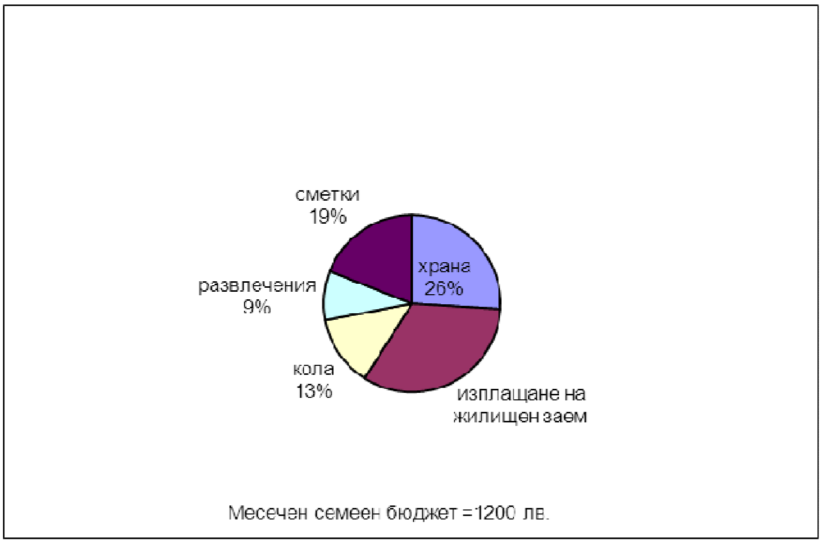
В) $a_n = -n^2 - 6n + 15$

Г) $a_n = -n^2 - 6n + 29$

12. Наредената двойката числа $(1;-1)$ **е решение на системата:**

А) $\begin{cases}(x-1)y=1\\ x^2+y^2=2\end{cases}$ **Б)** $\begin{cases}(x-1)y=0\\ x^2-y^2=2\end{cases}$ **В)** $\begin{cases}(x-1)y=1\\ x^2-y^2=2\end{cases}$ **Г)** $\begin{cases}(x-1)y=0\\ x^2+y^2=2\end{cases}$

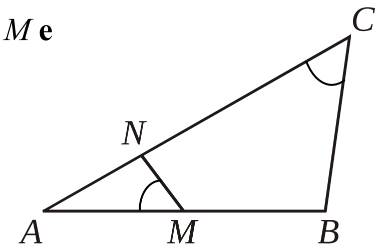
13. Кръговата диаграма представя в проценти разпределението на месечния бюджет на едно семейство. Определете по диаграмата колко са средствата (в лева), отделяни за изплащане на жилищния заем.



А) 156 **Б)** 228

В) 312 **Г)** 396

14. Даден е $\triangle ABC$**, за който** $AB=8\,\text{cm}$**,** $BC=5\,\text{cm}$ **и** $AC=10\,\text{cm}$**. Ако** M **е средата на** AB **и** $\angle AMN=\angle ACB$**, намерете дължината на** MN**.**



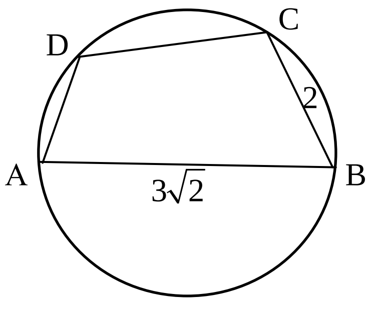
А) 2 cm **Б)** 2,5 cm

В) 3,2 cm **Г)** 6,4 cm

15. За $\triangle ABC$ **е дадено, че** $\sin\angle BAC : BC = 1:4\sqrt{7}$ **. Ако** $AB=2\sqrt{21}$**, където** $AB<BC$**, то мярката на** $\angle ACB$ **е:**

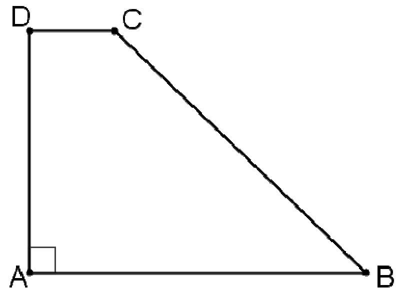
А) 60° **Б)** 60° **или** 120° **В)** 30° **Г)** 30° **или** 150°

16. Четириъгълник $ABCD$ **е вписан в окръжност. Ако** $\angle ADC=135^\circ$**,** $AB=3\sqrt{2}\,\text{cm}$ **и** $BC=2\,\text{cm}$**, да се намери дължината на радиуса на описаната около четириъгълника окръжност.**



А) $2\sqrt{5}$ cm **Б)** $\sqrt{10}$ cm **В)** $\sqrt{5}$ cm **Г)** $\frac{\sqrt{5}}{2}$ cm

17. За правоъгълния трапец $ABCD$ $\left(\angle A = 90°,\ AB \parallel CD\right)$ **е дадено, че** $AB = 10$ cm, $CD = 4$ cm **,** $BC = 6\sqrt{2}$ cm. **Дължината на диагонала** BD **е:**



А) 6 cm **Б)** $2\sqrt{13}$ cm

В) 8 cm **Г)** $2\sqrt{34}$ cm

18. Височината към хипотенузата в правоъгълен триъгълник има дължина 3 cm **и сключва с един от катетите ъгъл** $60°$**. Лицето на триъгълника е:**

А) $4{,}5$ cm^2 **Б)** 9 cm^2 **В)** $6\sqrt{3}$ cm^2 **Г)** $12\sqrt{3}$ cm^2

19. Даден е успоредник $ABCD$ **със страни** $AB = 18$ cm, $BC = 12$ cm **и диагонал** $BD = 15$ cm**. Дължината на по-късата височина на успоредника е равна на:**

А) $\frac{15\sqrt{7}}{2}$ cm **Б)** $\frac{15\sqrt{7}}{4}$ cm

В) $\frac{3\sqrt{7}}{2}$ cm **Г)** $\frac{5\sqrt{7}}{4}$ cm

20. Дванадесет различни точки лежат върху окръжност. Колко хорди могат да се построят с краища тези точки ?

А) 33 **Б)** 54 **В)** 66 **Г)** 132

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

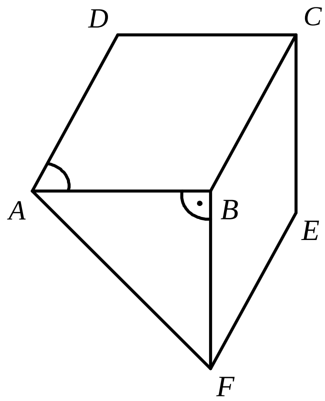
21. Намерете решенията на неравенството $\frac{(x+1)(2-x)(x-3)^2}{x^2+6x+5} > 0$.

22. Да се реши уравнението $\frac{5}{x^2-3x-4} + \frac{1}{x+1} = \frac{10x}{4-x}$**.**

23. Числата $2x^2$ **;** $1{,}5$ **и** $5x$ **са последователни членове на намаляваща аритметична прогресия. Намерете** x **.**

24. С цифрите 1, 2, 3, 4 и 5 **са записани всички трицифрени числа с неповтарящи се цифри. Каква е вероятността случайно избрано от тях число да се дели на пет?**

25. Двата ромба *ABCD* **и** *BFEC* **на чертежа имат обща страна** $BC = 10$ **cm,** $AB \perp BF$ **,** $\angle BAD$ **е остър и** $\sin \angle BAD = \frac{4}{5}$ **. Намерете лицето на петоъгълника** *AFECD***.**



Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{x^2 - 10x + 32} + \sqrt{2}x = 2\sqrt{2}$.

27. Ако α, β **и** γ **са ъгли в триъгълник, да се докаже тъждеството:**

$$\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma = 4\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}\cos\frac{\gamma}{2}$$

28. В $\triangle ABC$ **е дадено, че** $AC = 15$ cm**,** $BC = 12$ cm**. Ъглополовящата през върха** *C* **пресича описаната около триъгълника окръжност в точка** *L* **и** $CL = 18$ cm**. Да се намери страната** *AB***.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $D=b^2-4ac$ $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $a^{\log_a b}=b$ $\log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО
И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 30.08. 2013 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	**Верен отговор**	**Брой точки**
1	**А**	2
2	**Г**	2
3	**А**	2
4	**Г**	2
5	**В**	2
6	**Б**	2
7	**В**	2
8	**Б**	2
9	**В**	2
10	**В**	2
11	**А**	3
12	**Г**	3
13	**Г**	3
14	**А**	3
15	**А**	3
16	**В**	3
17	**Г**	3
18	**В**	3
19	**Б**	3
20	**В**	3
21	$x \in (-5;-1) \cup (-1;2)$	4
22	$-\frac{1}{10} = -0,1$	4
23	$x_1 = -3$	4
24	$\frac{1}{5}$	4
25	$S_{AFECD} = 190\,\text{cm}^2$	4
26	$x_1 = -6$	10
27	-	10
28	$AB = 18\ \text{cm}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. За прехвърляне на $\sqrt{2}x$ в дясната страна $\sqrt{x^2-10x+32}=2\sqrt{2}-\sqrt{2}x$ (0,5 т.)

2. За повдигане на квадрат (0,5 т.)

3. За получаване на уравнението $x^2+2x-24=0$ (3 т.)

4. За решаване на уравнението и намиране на корените $x_1=-6$ и $x_2=4$ (3 т.)

5. За проверка дали $x_1=-6$ е решение на уравнението (1 т.)

6. За проверка дали $x_2=4$ е решение на уравнението (1 т.)

7. За определяне на отговора $x=-6$ (1 т.)

З а б ел е ж к а *:

Ако са определени допустими стойности и е направена проверка чрез тях (2 т.)

27. Критерии за оценяване:

1. За изразяване на $\sin\gamma=\sin(\alpha+\beta)$ (2 т.)

2. За прилагане на формулата $\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ (1 т.)

3. За прилагане на формулата $\sin(\alpha+\beta)=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$ (2 т.)

4. За изнасяне на общия множител $2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}$ пред скоби (1 т.)

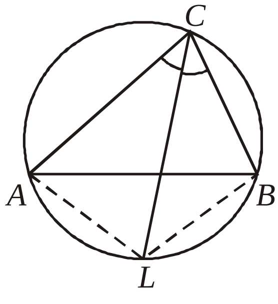
5. За прилагане на формула за $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+\cos\frac{\alpha+\beta}{2}=2\cos\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\beta}{2}$ (2 т.)

6. За изразяване на $\sin\frac{\alpha+\beta}{2}=\cos\frac{\gamma}{2}$ (1,5 т.)

7. За доказване на тъждеството (0,5 т.)

28. Критерии за оценяване:

I начин:



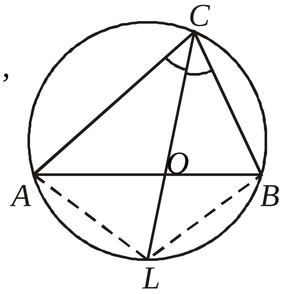
1. От $\angle ACL=\angle BCL \Rightarrow \overset{\frown}{AL}=\overset{\frown}{BL} \Rightarrow AL=BL$ (2 т.).

2. Нека $AL=BL=x$ и $\angle ACL=\angle BCL=\frac{\gamma}{2}$. От косинусова теорема за $\triangle ACL$ и $\triangle BCL$ имаме $x^2=15^2+18^2-2.15.18\cos\frac{\gamma}{2}$ и

$x^2 = 18^2 + 12^2 - 2.18.12.\cos\frac{\gamma}{2}$ (2 т.).

3. Като извадим от първото уравнение второто, последователно намираме
$15^2 - 12^2 - (2.15.18 - 2.12.18)\cos\frac{\gamma}{2} = 0$ и $\cos\frac{\gamma}{2} = \frac{3}{4}$ (2 т.)

4. Оттук $\cos\gamma = 2\cos^2\frac{\gamma}{2} - 1 = 2.\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$ (2 т.)



5. От косинусова теорема за $\triangle ABC$ имаме $AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2.AC.BC\cos\gamma$,
$AB^2 = 15^2 + 12^2 - 2.15.12.\frac{1}{8} = 324$, откъдето $AB = 18$ cm (2 т.)

II начин:

1. За доказване, че $\triangle AOC \sim \triangle LBC$ (3 т.)
2. За правилно съставени пропорции $\frac{AO}{LB} = \frac{OC}{BC} = \frac{AC}{LC}$ (1 т.)
3. За намиране на $OC = 10$ от пропорцията $\frac{OC}{12} = \frac{15}{18}$ (1 т.)
4. За намиране на $OL = 8$ (1 т.)
5. За вярно прилагане свойството на ъглополовящата и изразяване на $AO = 5x$ и $OB = 4x$, както правилно съставено уравнение за ъглополовящата $10^2 = 15.12 - 5x.4x$ (2 т.)
6. За правилно намиране на $x = 2$ и $AB = 18\,\text{cm}$ (2 т.)