МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

30.05.2016 г. – Вариант 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Ако числото 2 **е с** $20\ \%$ **по-малко от числото** x**, то числото** $x+2$ **е равно на:**

А) $\frac{5}{2}$ **Б)** $\frac{9}{2}$ **В)** 10 **Г)** 12

2. Стойността на израза $\left(\sqrt{2}-1\right)^3$ **е:**

А) $2\sqrt{2}-1$ **Б)** $4\sqrt{2}-5$ **В)** $5\sqrt{2}-7$ **Г)** $5\sqrt{2}+7$

3. Изразът $\frac{1}{x^2-16}:\frac{x}{x+4}$ **е дефиниран при :**

А) $x\neq 4; x\neq 0$ **Б)** $x\neq -4; x\neq 0$ **В)** $x\neq \pm 4; x\neq 0$ **Г)** $x\neq \pm 4$

4. Множеството от решенията на неравенството $\frac{(x-1)(x+5)}{(x-3)}\geq 0$ **е:**

А) $x\in[-5;1]\cup(3;+\infty)$ **Б)** $x\in(-5;1)\cup(3;+\infty)$

В) $x\in(-5;1]\cup[3;+\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;-5)\cup(1;3)$

5. Стойността на израза $\log_{\frac{1}{5}} 25+25^{1+\log_5 2}$ **е равна на:**

А) 98 **Б)** 27 **В)** 26 **Г)** 18

6. Сборът от реалните корени на уравнението $4x^4+3x^2-1=0$ **е равен на:**

А) -1 **Б)** $-\frac{3}{4}$ **В)** 0 **Г)** $\frac{1}{4}$

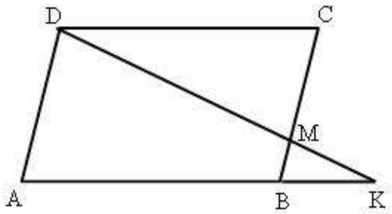
7. Уравнението, което има два положителни корена, е:

А) $x^2-7x+6=0$ **Б)** $x^2+7x+6=0$ **В)** $-x^2-x+30=0$ **Г)** $3x^2+5=0$

8. Коя от двойките числа $(x;\ y)$ **е решение на системата** $\begin{vmatrix} x+y=4 \\ xy=3 \end{vmatrix}$ **?**

А) $(3;1)$ **Б)** $(1;-3)$ **В)** $(-1;-3)$ **Г)** $(-3;-1)$

9. В успоредник $ABCD$ **със страна** $AB=42\ cm$ **е взета точка** M **от страната** BC**, така че** $BM:MC=2:7$**. Правата** DM **пресича продължението на** AB **в точка** K**. Дължината на** BK **е:**



А) $9\ cm$ **Б)** $12\ cm$ **В)** $14\ cm$ **Г)** $16,8\ cm$

10. В правоъгълен $\triangle ABC$ **катетите са с дължини** $3\,cm$ **и** $4\,cm$**. Радиусът на вписаната в триъгълника окръжност е:**

А) $0,5\ cm$ **Б)** $1\ cm$ **В)** $2,5\ cm$ **Г)** $5cm$

11. Координатите на върха на параболата $y=-x^2+2x+2$ **са:**

А) $(1;-1)$ **Б)** $(-1;1)$ **В)** $(-1;5)$ **Г)** $(1;3)$

12. Намерете стойността на произведението $a_1a_3a_5$ **, където** a_1, a_3 **и** a_5 **са членове на редицата с общ член** $a_n=(-1)^n.n^2+2,\ n\in\mathbb{N}$ **.**

А) -161 **Б)** -23 **В)** 23 **Г)** 161

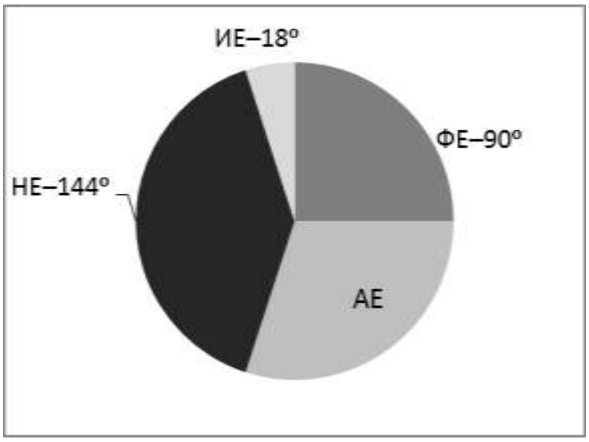
13. За крайната геометрична прогресия $a_1,a_2,....,\ a_n$ **е дадено, че** $a_1=32$**,** $q=\frac{1}{2}$ **и сумата от членовете ѝ е** $S_n=63\frac{3}{4}$**. Броят** n **на членовете на прогресията е:**

А) 7 **Б)** 8 **В)** 9 **Г)** 10

14. Стойността на израза $A=2\cos^2\alpha-2\sin^2\alpha$ **при** $\alpha=15°$**, е:**

А) 1 **Б)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **В)** $\sqrt{3}$ **Г)** 2

15. Посетителите на исторически музей са пожелали превод на един от следните четири езика: английски език – АЕ, френски език – ФЕ, немски език – НЕ и испански език – ИЕ. Изборът е отразен на кръговата диаграма в градуси. Избралите английски език са:



А) 25% **Б)** 30% **В)** 35% **Г)** 40%

16. Ако $n \geq 3$ **и** $V_n^3 = C_n^4$**, то** n **е:**

А) 4 **Б)** 7 **В)** 12 **Г)** 27

17. За $\triangle ABC$ **дължината на страната** AB **е** $6\sqrt{3}$ **и** $\sin(\alpha+\beta) = \frac{\sqrt{3}}{4}$**. Радиусът на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност е:**

А) 36 **Б)** $12\sqrt{3}$ **В)** 12 **Г)** $\frac{9}{2}$

18. Лицето на $\triangle ABC$ **със страна** $BC = 2\ cm$ **и** $\sphericalangle ABC = 45^\circ$ **е** $3\ cm^2$**. Дължината на страната** AC **е:**

А) $\sqrt{10}\ cm$ **Б)** $3\sqrt{2}\ cm$ **В)** $2\sqrt{13}\ cm$ **Г)** $10\ cm$

19. За успоредника $ABCD$ **е дадено, че** $AB = 8\ cm,\ AD = 7\,cm$ **и** $AC = 13\ cm$**. Разстоянието от върха** C **до правата** AB **е:**

А) $28\sqrt{3}\,cm$ **Б)** $7\,cm$ **В)** $\frac{7}{2}\sqrt{3}\,cm$ **Г)** $\sqrt{57}\ cm$

20. В равнобедрен трапец $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ **е вписана окръжност с център точка** O**, която се допира до бедрото** BC **в точка** K**. Ако** $OC = 6\ cm$ **и** $CK = 4\ cm$**, то лицето на трапеца е:**

А) $36\sqrt{2}\,cm^2$ **Б)** $72\sqrt{2}\,cm^2$ **В)** $36\sqrt{5}\,cm^2$ **Г)** $72\sqrt{5}\,cm^2$

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете стойността на израза $A = tg44^\circ . tg45^\circ . tg46^\circ$**.**

22. Решете неравенството $x^3 > \dfrac{16}{x}$**.**

23. Запишете числото *x*, за което е изпълнено равенството $5\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x} + 4\left(\dfrac{2}{3}\right)^{3x} = 4$

24. При измерване на ръста на група служители се установило, че средната височина на мъжете е $180\ cm$**, а на жените –** $165\ cm$**. Намерете средния ръст на всички служители, ако е известно, че жените са с** 50% **повече от мъжете.**

25. Намерете периметъра на $\triangle ABC$ **със страни** a, b, c**, ако** $a - c = c - b = 2$ **и един от ъглите на триъгълника е** 120°**.**

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

26. Решете уравнението $\sqrt{\dfrac{2x-2}{x-2}} + 2\sqrt{\dfrac{x-2}{2x-2}} = 3$**.**

27. Намерете всички възможни четири числа, за които едновременно е изпълнено: първите три образуват аритметична прогресия, а последните три – геометрична прогресия, сборът на първото и третото е 2**, а отношението на четвъртото и първото е** (– 9)**.**

28. В $\triangle ABC$ **ъглополовящата на** $\sphericalangle ACB$ **пресича страната** AB **в точка** L **така, че** $AL = 7\sqrt{2}\ cm$ **и** $LB = 5\sqrt{2}\ cm$**. Ако** $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{3}{5}$**, намерете дължините на** AC, BC**,** CL **и лицето на** $\triangle ABC$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a\left(x-x_1\right)\left(x-x_2\right)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$
cotg	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{cotg}\,\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\mathrm{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha\pm\mathrm{tg}\,\beta}{1\mp\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

$$\mathrm{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\mathrm{cotg}\,\alpha\,\mathrm{cotg}\,\beta\mp1}{\mathrm{cotg}\,\beta\pm\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\mathrm{tg}\,2\alpha=\frac{2\,\mathrm{tg}\,\alpha}{1-\mathrm{tg}^2\,\alpha}$$

$$\mathrm{cotg}\,2\alpha=\frac{\mathrm{cotg}^2\,\alpha-1}{2\,\mathrm{cotg}\,\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 30 май 2016 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	В	2
3	В	2
4	А	2
5	А	2
6	В	2
7	А	2
8	А	2
9	Б	2
10	Б	2
11	Г	3
12	Г	3
13	Б	3
14	В	3
15	Б	3
16	Г	3
17	В	3
18	А	3
19	В	3
20	В	3
21	1	4
22	$x \in (-2;0) \cup (2;+\infty)$	4
23	$x = \frac{2}{3}$	4
24	171 cm	4

25	15	**4**
26	$x_1 = 0,\ x_2 = 3$	**10**
27	-4, 1, 6 и 36 или -1, 1, 3 и 9	**10**
28	$AC = 21\ cm,\ BC = 15\ cm\ CL = 7\sqrt{5}\ cm$. $S_{ABC} = 126\ cm^2$.	**10**

Въпроси с решения

26. Решение и критерии за оценяване.

I начин.

1. Полагане на $u = \sqrt{\dfrac{2x-2}{x-2}},\ u > 0$ **(2 точки).**
2. Получаване на уравнението $u + \dfrac{2}{u} = 3$ **(1 точка) .**
3. Намиране на корените $u_1 = 1,\ u_2 = 2$ **(1 точка).**
4. Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{2x-2}{x-2}} = 1$ и получаване на $x_1 = 0$ **(2 точки) .**
5. Решаване на уравнението $\sqrt{\dfrac{2x-2}{x-2}} = 2$ и получаване на $x_2 = 3$ **(2 точки).**
6. Установяване, че x_1 *и* x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности**. (2 точки)**

II начин.

Повдигане в квадрат и получаване на уравнението $\dfrac{2x-2}{x-2} + 4\dfrac{x-2}{2x-2} = 5$ **(2 точки),** като $x \neq 2,\ x \neq 1$ **(1 точка).**

Освобождаване от знаменател и получаване на уравнението $2x^2 - 6x = 0$ **(3 точки).**

Намиране на корените на уравнение $x_1 = 0,\ x_2 = 3$ **(2 точки).**

Установяване, че x_1 *и* x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности**. (2 точки)**

27. Решение и критерии за оценяване.

Ако числата са $a,\ b,\ c,\ d$, то от това, че са членове на прогресии и даденото отношение, е в сила системата $\begin{vmatrix} b=\dfrac{a+c}{2} \\ c^2=bd \\ a+c=2 \\ \dfrac{d}{a}=-9 \end{vmatrix}$.

Намираме, че $b=1,\ c=6$ и $c=3$.

При $c=6,\ d=36, a=-4$.

При $c=3,\ d=9, a=-1.$

Получават се две четворки числа $-4,\ 1,\ 6,\ 36$ или $-1, 1, 3, 9$

Критерии за оценяване:

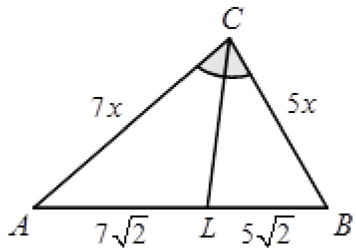
1. За означаване на четирите числа и свойствата на прогресиите – **2 точки.**

2. За съставяне на системата уравнения и правилното решение – по **1 точка** за всяко уравнение от системата и **2 точки** за решаването й**.**

3. За намиране на числата $-4,\ \ 1,\ \ 6,\ \ 36$ – **1 точка.**

4. За намиране на числата $-1,\ \ 1,\ \ 3,\ \ 9$ – **1 точка.**

28. Решение и критерии за оценяване.



От свойството на ъглополовящата следва, че $\dfrac{AC}{BC}=\dfrac{AL}{LB}=\dfrac{7}{5}$ и нека $AC=7x$, $BC=5x$, $\sphericalangle ACB=\gamma$.

От косинусовата теорема за страната $AB=12\sqrt{2}$ cm намираме**:**

$$AC^2+BC^2-2AC.BC.\cos\gamma=AB^2 \ \Leftrightarrow 49x^2+25x^2-2.7x.5x.\frac{3}{5}=288$$

$$\Leftrightarrow\ 32x^2=288\ \Leftrightarrow\ x^2=9,\ x=3 \text{ и } AC=21\ cm,\ BC=15\ cm.$$

Тогава $CL^2=AC.BC-AL.BL=21.15-35.2=5.7^2$ и $CL=7\sqrt{5}\ cm$.

От $\cos\gamma=\dfrac{3}{5}$ следва, че $\sin\gamma=\sqrt{1-\cos^2\gamma}=\sqrt{1-\dfrac{9}{25}}=\sqrt{\dfrac{16}{25}}=\dfrac{4}{5}$ и

$$S_{ABC}=\frac{AC.BC}{2}.\sin\gamma=\frac{21.15}{2}.\frac{4}{5}=126\ cm^2$$

Критерии за оценяване:

1. Използване на свойството на ъглополовящата $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{LB} = \frac{7}{5}$ **(1 точка).**

2. Намиране на $AC = 21\ cm$ **(2 точки).**

3. Намиране на $BC = 15\ cm$ **(2 точки).**

4. Намиране на $CL = 7\sqrt{5}\ cm$ **(2 точки).**

5. Пресмятане на $\sin\sphericalangle ACB = \frac{4}{5}$ **(1 точка).**

6. Пресмятане на $S_{ABC} = 126\ cm^2$ **(2 точки).**