<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

28.08.2015 г. – <u>ВАРИАНТ 2</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кое е най-малкото от посочените числа?

А) $2\sqrt{13}$ **Б)** $4\sqrt{3}$ **В)** $3\sqrt{5}$ **Г)** $5\sqrt{2}$

2. За $a=-2$ **и** $b=2$ **стойността на израза** a^b-b^a **е:**

А) $-\dfrac{17}{4}$ **Б)** $-\dfrac{15}{4}$ **В)** $\dfrac{15}{4}$ **Г)** $\dfrac{17}{4}$

3. Всички допустими стойности на израза $\dfrac{\sqrt{x-1}}{x^2-2x}$ **са:**

А) $x\in[1;+\infty)$ **Б)** $x\neq 0; x\neq 2$

В) $x\in[1;2)\cup(2;+\infty)$ **Г)** $x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$

4. Решенията на неравенството $x^2-10x+25\leq 0$ **са:**

А) $x\in\varnothing$ **Б)** $x\in\{5\}$ **В)** $x\in[0;\,5]$ **Г)** $x\in(-\infty;\,+\infty)$

5. Стойността на израза $\lg\dfrac{1}{10}+\log_3 81-\log_{\frac{1}{2}} 8+\log_5 5$ **е равна на:**

А) 1 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 7

6. Върхът на параболата $y = x^2 - 3x + 4$ **е точката с координати:**

А) $\left(\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$ **Б)** $\left(\frac{3}{2}; 0\right)$ **В)** $(3; 4)$ **Г)** $\left(-\frac{3}{2}; \frac{7}{4}\right)$

7. Кое от квадратните уравнения има реални корени с различни знаци?

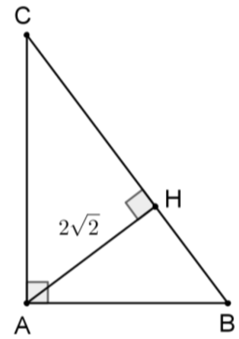
А) $-3x^2 - 4x + 1 = 0$ **Б)** $3x^2 - 4x + 1 = 0$

В) $3x^2 + 4x + 1 = 0$ **Г)** $4x^2 + 3x + 1 = 0$

8. Ако $\cos\alpha = -\frac{12}{13}$ **, то стойността на израза** $\sin(180° - \alpha).\text{tg}(90° + \alpha)$ **е:**

А) $\frac{12}{13}$ **Б)** $\frac{5}{13}$ **В)** $-\frac{5}{13}$ **Г)** $-\frac{12}{13}$

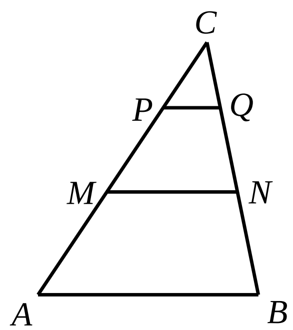
9. Даден е правоъгълен $\triangle ABC\ (\sphericalangle CAB = 90°)$ **с височина** $AH = 2\sqrt{2}$ cm**.**
Ако $BH = 2$ cm**, то радиусът на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност е:**



А) $\sqrt{2}$ cm **Б)** 2 cm

В) 2,5 cm **Г)** 3 cm

10. Точките M **и** P **са от страната** AC **на** $\triangle ABC$ **и** $AM : MP : PC = 5 : 4 : 3$**. Точките** N **и** Q **са от страната** BC**, като** $PQ \parallel MN$, $MN \parallel AB$ **и** $QN = 6$ cm**. Дължината на страната** BC **е:**



А) 16 cm **Б)** 18 cm

В) 20 cm **Г)** 24 cm

11. Ако x_1 **и** x_2 **са реалните корени на уравнението** $x^2 + 6x + 3 = 0$**, стойността на израза** $x_1x_2(x_1 + x_2) - \frac{x_1 + x_2}{x_1x_2}$ **е равна на:**

А) -20 **Б)** -16 **В)** 16 **Г)** 2

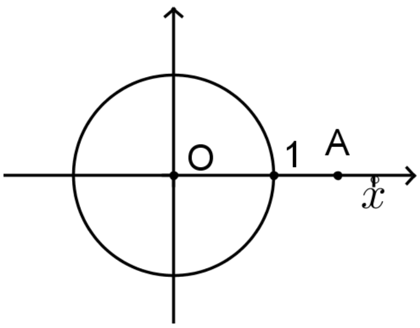
12. Първият член на безкрайна числова редица е $a_1 = 1$. Ако членовете на редицата са нечетни числа, то за всяко естествено число $n \geq 2$ те се получават по формулата:

А) $a_n = 3a_{n-1} + 1$ **Б)** $a_n = 4 + a_{n-1}$ **В)** $a_n = a_{n-1} - 1$ **Г)** $a_n = a_{n-1} + n$

13. За крайната аритметична прогресия $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ е дадено, че $a_1 = 13,\ \ a_2 = 9$ и сумата на членовете ѝ е $S_n = -27$. Броят n на членовете на прогресията е:

А) 8 **Б)** 9 **В)** 10 **Г)** 11

14. Ако за $\sphericalangle AOB$ е дадено, че върхът му е точката O на чертежа, лъчът $\overrightarrow{OA}$ съвпада с положителната посока на оста Ox и $cotg\sphericalangle AOB = -\frac{\sqrt{3}}{3}$, то лъчът $\overrightarrow{OB}$ лежи:



А) само във II квадрант **Б)** в I или в III квадрант

В) във II или в IV квадрант **Г)** само в IV квадрант

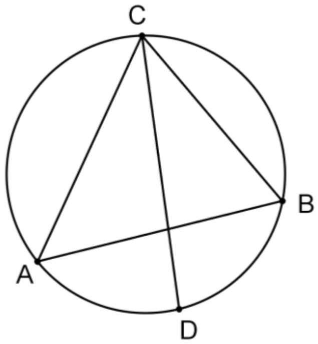
15. Три момчета и две момичета са наредени в редица, като първо са наредени момчетата, а до тях – момичетата. Броят на възможните наредби е:

А) $3!.2!$ **Б)** $3! + 2!$ **В)** $5!$ **Г)** $2!.3!.2$

16. В клас от 30 ученици двама завършили първия срок с двойки по математика, 6 имали тройки, 7 – четворки, 9 – петици и 6 били с шестици. Медианата на статистическия ред от данните за оценките на всички ученици в класа е:

А) $4,5$ **Б)** 5 **В)** 7 **Г)** 9

17. На чертежа остроъгълният $\triangle ABC$ е със страна $AB = 3\,\text{cm}$ и е вписан в окръжност с радиус $\sqrt{3}\,\text{cm}$. Ако точка D е средата на дъгата AB, то $\sphericalangle ACD$ е равен на:



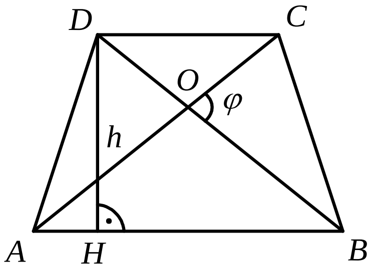
А) $60°$ **Б)** $45°$

В) $30°$ **Г)** $15°$

18. Даден е $\triangle ABC$, за който $AB = 15\sqrt{2}\,\text{cm}$, $AC = 7\,\text{cm}$ и $\sphericalangle ABC + \sphericalangle ACB = 135°$. Дължината на страната BC е равна на:

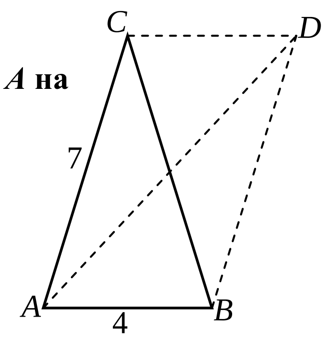
А) 23 cm **Б)** 17 cm **В)** 16 cm **Г)** 7 cm

19. Лицето на равнобедрен трапец $ABCD$ $(AB \parallel CD)$ с височина $DH = h$ и $\sphericalangle BOC = \varphi$ $(O = AC \cap BD)$ е равно на:



А) $\dfrac{h^2}{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}}$ **Б)** $h^2\cos\dfrac{\varphi}{2}$ **В)** $h^2\operatorname{tg}\dfrac{\varphi}{2}$ **Г)** $h^2\operatorname{cotg}\dfrac{\varphi}{2}$

20. Равнобедреният $\triangle ABC$ с основа $AB = 4\,\text{cm}$ и бедро $AC = 7\,\text{cm}$ е допълнен до успоредник $ABDC$. Разстоянието от точката D до върха A на триъгълника е равно на:

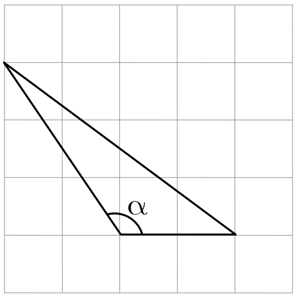


А) 8 cm **Б)** 9 cm **В)** $9\sqrt{2}$ cm **Г)** 10 cm

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете корените на уравнението $\sqrt{x^2 + 4x - 9} = 2x - 4$.

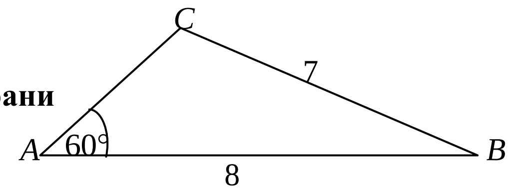
22. Като използвате квадратната мрежа, намерете стойността на $tg\alpha$.



23. Гражданин депозирал в банка 5000 лв. **при сложна годишна лихва. Намерете лихвения процент, ако след две години сумата нараснала на** 5202 лв.

24. В успоредника $ABCD$ **е построена ъглополовящата** $AL\left(L \in DC\right)$ **на** $\sphericalangle DAB$**. Правата** BL **пресича правата** AD **в точка** P**, като** D **е между точките** A **и** P**, а** $PD:AD=2:5$**. Намерете отношението на лицата** $S_{\triangle DLP}:S_{ABLD}$ **.**

25. Намерете периметъра на тъпоъгълен $\triangle ABC$ **със страни** $AB=8$**,** $BC=7$ **и** $\sphericalangle A=60^\circ$**.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете системата $\begin{vmatrix} 3\dfrac{x}{y}+8\dfrac{y}{x}=10 \\ -2x^2+2y+3y^2=1 \end{vmatrix}$ **.**

27. Каква е вероятността трицифрено число, без повтарящи се цифри, записано с цифрите 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, **да се дели на** 5**?**

28. Да се намери периметърът на равнобедрен триъгълник, ако основата му е 8cm **и радиусът на вписаната в него окръжност е** $2\sqrt{2}\,\text{cm}$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 28 август 2015 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	**Верен отговор**	**Брой точки**
1	**В**	2
2	**В**	2
3	**В**	2
4	**Б**	2
5	**Г**	2
6	**А**	2
7	**А**	2
8	**А**	2
9	**Г**	2
10	**Б**	2
11	**Б**	3
12	**Б**	3
13	**Б**	3
14	**В**	3
15	**А**	3
16	**А**	3
17	**В**	3
18	**Б**	3
19	**Г**	3
20	**Б**	3
21	5	4
22	$-\frac{3}{2}$ или $-1,5$	4
23	2%	4
24	$S_{\vartriangle DLP} : S_{ABLD} = 4:45$	4
25	$P = 18$	4
26	$4; 3$ и $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$	10
27	$P = \frac{78}{7.7.6} = \frac{13}{49}$	10
28	$P_{\vartriangle ABC} = 32\,\text{cm}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване

1. За допустимите стойности $x \neq 0$ и $y \neq 0$ (1 т.)
2. За полагане на $\frac{x}{y} = t$ и получаване на уравнението $3t + \frac{8}{t} = 10$. (1 т.)
3. За свеждане до уравнението $3t^2 - 10t + 8 = 0$ и намиране

   на корените му $t_1 = \frac{4}{3}$ и $t_2 = 2$. (1 т.)
4. За свеждане на системата до обединение от двете системи:

   $$\left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{4}{3} \\ -2x^2 + 2y + 3y^2 = 1 \end{array} \right. \quad \text{или} \quad \left| \begin{array}{l} \frac{x}{y} = 2 \\ -2x^2 + 2y + 3y^2 = 1 \end{array} \right. .$$ (2 т.)
5. За решаване на първата система:

   4.1 За свеждане на системата до вида:

   $$\left| \begin{array}{l} x = \frac{4}{3}y \\ 5y^2 - 18y + 9 = 0 \end{array} \right. .$$ (1 т.)

   4.2 За получаване решенията на първата система $4; 3$ и $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. (1 т.)
6. За решаване на втората система:

   5.1 За свеждане на системата до вида:

   $$\left| \begin{array}{l} x = 2y \\ 5y^2 - 2y + 1 = 0 \end{array} \right.$$ (1т.)

   5.2 За извода, че втората система няма решение поради отрицателна дискриминанта на квадратното уравнение. (1т.)
7. За окончателен отговор за решения на дадената система $4; 3$ и $\left(\frac{4}{5}; \frac{3}{5}\right)$. (1т.)

27. Критерии за оценяване

1. За намиране на всички възможни последователности от 3 цифри $V_8^3 = 8.7.6$. (1 т.)

2. За намиране на всички последователности от 3 цифри, в които 0 е на първо

място $V_7^2 = 7.6$. (1 т.)

3. За намиране на всички възможности – $V_8^3 - V_7^2 = 7.7.6$. (2 т.)

4. За намиране на броя на трицифрените числа с последна цифра 0 – $V_7^2 = 7.6 = 42$. (1 т.)

5. За намиране на броя на трицифрените числа с последна цифра 5 – $V_7^2 - 6 = 7.6 - 6 = 36$

или направо изчисление на възможностите 6.6 (6 възможности за цифрата на стотиците (без 0 и 5) и 6 възможности за цифрата на десетиците). (2 т.)

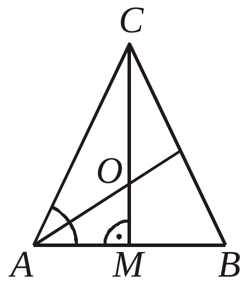
6. За намиране на броя на трицифрените числа кратни на 5– $2V_7^2 - 6 = 78$

(или 36+42=78). (1т.)

7. За пресмятане на търсената вероятност $P = \frac{78}{7.7.6} = \frac{13}{49}$. (2 т.)

Забележка*: Стъпките 1, 2 и 3 може да се заменят от изчислението на произведението 7.7.6 с обосновка, че на първа позиция в числото са възможни 7 цифри (0 не може да е цифра на стотиците) , остават 7 различни възможности за цифрата на десетиците и 6 възможности за цифра на единиците. Общият брой точки за тези разсъждение е 4.

28. Критерии за оценяване



Първи начин

1.За приемане на $\sphericalangle BAC = \alpha$. (1 т.)

2. За намиране на $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. (2 т.)

Първо възможно продължение

3. За намиране на $\cos\alpha = \frac{1}{3}$. (4 т.)

4. За намиране на $AC = \frac{AM}{\cos\alpha} = 12$. (2 т.)

5. За намиране на $P_{ABC} = 32$ cm. (1т.)

Второ възможно продължение

3. Изразяване на $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{2}$. (3 т.)

4. 1. Изразяване на $CM = AM.\mathrm{tg}\,\alpha = 4.2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$. (2 т.)

4.2. Намиране на $AC = \sqrt{CM^2 + AM^2} = 12$. (1 т.)

5. За намиране на $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$. (1т.)

Втори начин

1.За приемане на $CO = x$. (1 т.)

2. За изразяване на $AC = x\sqrt{2}$. (3 т.)

3. За прилагане на Питагорова теорема в $\triangle ACM$. (1т.)

4. За намиране на $CO = x = 6\sqrt{2}\,\mathrm{cm}$. (3т.)

5. Намиране на $AC = 12\,\mathrm{cm}$. (1 т.)

6. За намиране на $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$. (1т.)

Трети начин

.За приемане на $CP = x$ и $CO = h - 2\sqrt{2}$. (1 т.)

2. За изразяване на $h = \dfrac{x\sqrt{2} + 8\sqrt{2}}{2}$. (3 т.)

3. За прилагане на Питагорова теорема в $\triangle ACM$. (1т.)

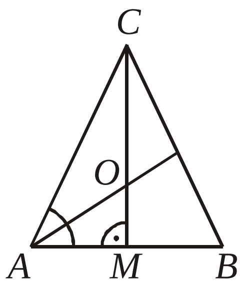
4. За намиране на $CP = x = 8\,\mathrm{cm}$. (3т.)

5. Намиране на $AC = 12\,\mathrm{cm}$. (1 т.)

6. За намиране на $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$. (1т.)

Решение

Първи начин



Нека $AC = BC$, CM е височината, AO е ъглополовящата и $\sphericalangle BAC = \alpha$.

От правоъгълния триъгълник $\triangle AOM$ имаме $r = AM.\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}$, откъдето $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

Първо възможно продължение

От формулата $\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$ намираме $\cos\alpha = \dfrac{1}{3}$. От правоъгълния триъгълник $\triangle AMC$ получаваме $AC = \dfrac{AM}{\cos\alpha} = 12$. Следователно $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$.

Второ възможно продължение

От $\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ следва $\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}} = 2\sqrt{2}$. От $\triangle AMC$ намираме $CM = AM.\mathrm{tg}\,\alpha = 8\sqrt{2}$.

От Питагоровата теорема или от свойството на ъглополовящата $AC = \sqrt{CM^2 + AM^2} = 12$ и $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$.

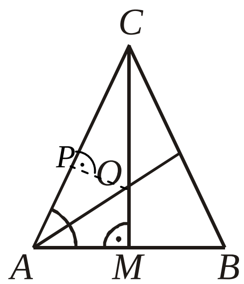
Втори начин

Нека $CO = x$. От свойството на ъглополовящата имаме $\frac{OC}{AC} = \frac{OM}{AM}$, откъдето $AC = x\sqrt{2}$.

От правоъгълния $\triangle AMC$ имаме $AC^2 = AM^2 + CM^2$, или $2x^2 = 4^2 + \left(x + 2\sqrt{2}\right)^2$, откъдето $x^2 - 4\sqrt{2}x - 24 = 0$ и $x_1 = -2\sqrt{2}$, $x_2 = 6\sqrt{2}$. Понеже $x > 0$, то $x = 6\sqrt{2}$ и $AC = 12$ cm.

Следователно $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$.

Трети начин



Нека $CP = x$. $AP = AM = 4$ (свойство на допирателната). Ако $CM = h$, то $CO = h - 2\sqrt{2}$. От свойството на ъглополовящата имаме

$\dfrac{AC}{AM} = \dfrac{CO}{AM}$, $\dfrac{x+4}{4} = \dfrac{h-2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}}$ откъдето $h = \dfrac{x\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}$.

От правоъгълния $\triangle AMC$ имаме $AC^2 = AM^2 + CM^2$,

$\left(x+4\right)^2 = 16 + \left(\dfrac{x\sqrt{2}+8\sqrt{2}}{2}\right)^2$. Получаваме уравнението $x^2 = 64 \Rightarrow x_{1,2} = \pm 8$, но $x = -8 < 0$ не е решение . Остава $CP = x = 8\,\mathrm{cm}$, откъдето $AC = 12\,\mathrm{cm}$ и $P_{\triangle ABC} = 32\mathrm{cm}$.