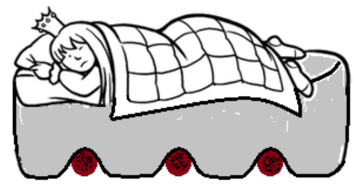
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 7. клас

Задача 1. *Трите части на задачата са независими!*

Част 1. Принцесата и граховото зърно

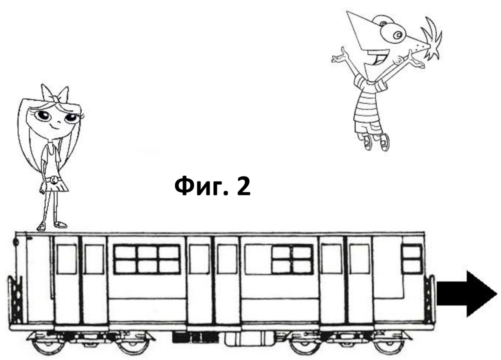
Ако принцеса легне непосредствено върху грахови зърна, тя ще ги усети заради натиска, който те оказват, поради силно изпъкналата си повърхност. Нека принцесата лежи върху водно легло, под което се намират остри грахови зърна – **Фиг. 1**. Ще усети ли принцесата граховите зърна? Обяснете накратко защо. Водното легло представлява голям балон, изцяло напълнен с вода. **(3 точки)**



Фиг. 1

Част 2. Скок върху влака

Финиъс и Изабела се намират в двата края на движещ се вагон – **Фиг. 2**. Финиъс решил да скочи вертикално нагоре. Той преценил, че докато е във въздуха, вагонът ще измине известно разстояние и така той ще се приземи по-близо до Изабела. Прав ли е Финиъс? Обяснете защо. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва. **(3 точки)**



Фиг. 2

Част 3. Магдебургската полусфера

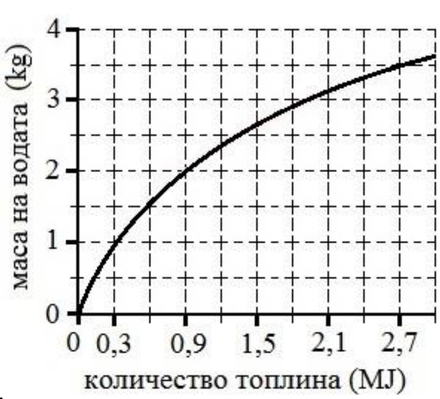
На Фиг. 3 е показана играчка - висящо слонче, което се закрепва за гладък таван с помощта на вакуумна закачалка-смукало. Обяснете накратко как работи вакуумната закачалка-смукало. Каква трябва да е площта на смукало създаващо идеален вакуум, така че да издържи тежестта на истинско слонче? Атмосферното налягане е p = 100 kPa, а теглото на слончето е G = 1200 N. **(4 точки)**

Фиг. 3

Задача 2. Ламята Спаска вари компот от златни ябълки. *Двете части на задачата са независими!*

Част 1. Да измериш маса с часовник

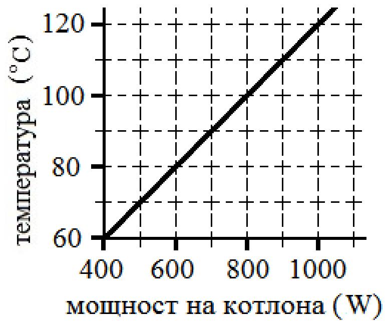
Ламята Спаска трябва да определи колко вода се събира в тенджерата ѝ. Тя знае, че на електрическата ѝ печка 1 kg вода завира след 2 минути. Спаска измерила, че една тенджера вода завира след 18 минути. Като използвате връзката между масата на водата и количеството топлина, което е необходимо за завирането ѝ– **Фиг. 4**, определете колко вода ще се събере в тенджерата на ламята. Печката има постоянна мощност и цялото отделено от нея количество топлина отива за нагряване на водата. **(5 точки)**



Фиг. 4

Част 2. Компот от златни ябълки

За да стане компотът хубав, температурата му не трябва да е по-ниска от 80 °C и по-висока от 120 °C (която той може да достигне заради разтворената в него захар). Спаска трябва сама да сглоби електрическия котлон, на който да свари компота. Тя разполага с един нагревател със съпротивление R_1 = 80 Ω и един с R_2 = 50 Ω. Нагревателите може да се свържат заедно или да се използват поотделно. Намерете при кои свързвания ще се получи хубав компот. Връзката между мощността на котлона и крайната температура, която компотът достига (вследствие на топлообмена с околната среда), е показана на **Фиг. 5**. Използва се източник на напрежение от 220 V. **(5 точки)**

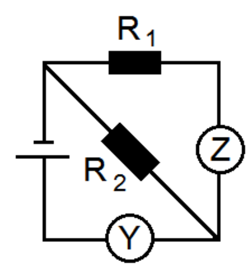


Фиг. 5

Задача 3. Съпротивление на квадрат

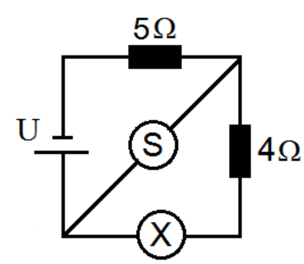
Във всяка от показаните електрически вериги са включени неизвестни измервателни уреди X, Y, Z и S. Всеки един от тях е или амперметър, или волтметър. Всички уреди са идеални и са включени правилно. *Двете части на задачата са независими!*

Част 1. Един от резисторите от веригата на **Фиг. 6** има съпротивление R_2 = 2 Ω. Показанието на уреда Y е 4 пъти по-голямо от показанието на уреда Z. Определете вида на неизвестните уреди и намерете съпротивлението R_1 на другия резистор. Колко пъти показанието на уреда Y ще е по-голямо от показанието на Z, ако разменим местата на резисторите R_1 и R_2? **(5 точки)**



Фиг. 6

Част 2. Показанието на уредите от **Фиг. 7** е 500 за X и 0,002 за S. Източникът на напрежение е U = 4,5 V. Определете вида на неизвестните уреди X и S, както и в какви мерни единици са показанията им. Какво ще бъде показанието на уреда X, ако разменим местата на X и S ? **(5 точки)**



Фиг. 7

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Варна, 7 март 2015 г. Решения на темата за 7. клас

Задача 1.

Част 1. ***Принцесата и граховото зърно*** *– следното или еквивалентно обяснение*

Принцесата няма да усети граховите зърна (само твърдението). **1 т**

Налягането, което те създават, натискайки дюшека от долната страна, се предава равномерно във всички посоки в течността на дюшека. **1,5 т**

Следователно, налягането върху горната повърхност на дюшека ще бъде еднакво навсякъде. **0,5 т**

Част 2.*Скок върху влака* *– следното или еквивалентно обяснение*

Финиъс греши (само твърдението). **1 т**

Финиъс, Изабела и влакът се движат с една и съща скорост. Когато Финиъс подскочи нагоре, той не губи тази скорост. Следователно, ще се приземи на същото място, откъдето е скочил. **2 т**

Част 3. ***Магдебургската полусфера***

При закрепването на вакуумната закачалка за стена/таван, въздух има само от едната страна на смукалото. **1 т**

Само върху тази страна атмосферното налягане оказва натиск и закачалката остава прикрепена към стената/тавана. **1,5 т**

Натискът върху закачалката трябва да е по-голям или равен на теглото на слончето, т.е. $p_{\text{атм}} S = G_{\text{слон}}$. **1 т**

От тук намираме $S = \dfrac{G_{\text{слон}}}{p_{\text{атм}}} = 0{,}012\ \text{m}^2$ или $120\ \text{cm}^2$. **0,5 т**

Задача 2.

Част 1. ***Да измериш маса с часовник***

От графиката намираме, че за завирането на 1 kg вода е необходимо количество топлина $Q_1 = 0{,}3$ MJ. **0,5 т**

$Q_1 = Pt_1$, където P е мощността на печката, а $t_1 = 2$ min. **1 т**

За завирането на цялата тенджера са необходими $t_2 = 18$ min и количество топлина $Q_2 = Pt_2$. Разделяме почленно $\Rightarrow$ $Q_2 = Q_1 \dfrac{t_2}{t_1} = 2{,}7$ MJ. **2,5 т**

От графиката намираме, че на това количество топлина съответства 3,5 kg вода, т.е. тенджерата на Спаска събира 3,5 kg вода. **0,5 т**

Забележка: за намиране на мощността P = 2500 kW се дава ***1 т.,*** *но общият брой точки не трябва да надвишава 5 т.*

Част 2. ***Компот от златни ябълки***

От графиката определяме, че за хубав компот мощността на котлона трябва да е между 600 W и 1000 W. **0,5 т**

Възможни са четири свързвания: само R_1, само R_2, двете последователно, двете успоредно. **1 т**

Необходимо е да се пресметнат мощностите при всички свързвания:

$P_{R1} = \dfrac{U^2}{R_1} = \dfrac{220^2}{80} = 605$ W **0,5 т**

$$P_{R2} = \frac{U^2}{R_2} = \frac{220^2}{50} = 968 \text{ W}$$ **0,5 т**

$$P_{\text{посл}} = \frac{U^2}{\left(R_1 + R_2\right)} = \frac{220^2}{80+50} = 372 \text{ W}$$ **1 т**

$$P_{\text{усп}} = U^2 \frac{\left(R_1 + R_2\right)}{R_1 R_2} = 220^2 \frac{80+50}{80 \cdot 50} = 1573 \text{ W}$$ **1 т**

Единствените мощности, които попадат в интервала за хубав компот са P_{R1} и P_{R2}, т.е. търсените свързвания са само R_1 и R_2. **0,5 т**

Задача 3. *Съпротивление на квадрат*

Част 1.

Уредите са амперметри. **1 т**

Резисторите са свързани успоредно. **0,5 т**

Нека означим напрежението на източника с *U*. Амперметърът Z измерва тока I_1 през резистора R_1, т.е. $I_1 = \frac{U}{R_1}$. **0,5 т**

Токът I_2 през резистора R_2 е $I_2 = \frac{U}{R_2}$. **0,5 т**

Амперметърът Y измерва тока на цялата верига, т.е. $I = I_1 + I_2 = U\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)$. **0,5 т**

По условие $I = 4I_1$, т.е. $U\left(\frac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) = 4\frac{U}{R_1}$, откъдето $R_1 = 6\ \Omega$. **0,5 т**

Ако разменим местата на резисторите, ще се промени само показанието на амперметъра Z. **0,5 т**

Той ще показва $I_Z = \frac{U}{R_2}$. **0,5 т**

Отношението между показанията ще бъде $\frac{I}{I_Z} = \frac{R_2}{R_1 R_2}\left(R_1 + R_2\right) = \frac{4}{3}$. **0,5 т**

Част 2.

Тъй като и двата уреда имат ненулево показание и са включени правилно, то уредът X е амперметър, а уредът Z е волтметър. **1 т**

Двата резистора са свързани последователно. **0,5 т**

Токът във веригата, измерван от амперметъра, е $I = \frac{U}{R_1 + R_2} = 0{,}5 \text{ A}$. **0,5 т**

Напрежението на резистора със съпротивление *R* = 4 Ω, което се измерва от волтметъра, е $U_{4\Omega} = IR_{4\Omega} = 0{,}5 \text{ A} \cdot 4\ \Omega = 2 \text{ V}$. **0,5 т**

Тъй като $2 \text{ V} = 0{,}002 \text{ kV}$, то показанията на Y са в kV, а понеже $0{,}5 \text{ A} = 500 \text{ mA}$, то показанията на X са в mA. **0,5 т**

Ако разменим местата на измервателните уреди, токът ще протича само по резистора със съпротивление *R* = 5 Ω и през амперметъра. Тогава уредът Y ще има нулево показание. **2 т**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика
Варна, 7 март 2015 г.
Решения на темата за 7. клас

No.	**Задача 1**	**Точки**
Част 1	Принцесата няма да усети граховите зърна (само твърдението). **1 т** Налягането, което те създават, натискайки дюшека от долната страна, се предава равномерно във всички посоки в течността на дюшека. **1,5 т** Следователно, налягането върху горната повърхност на дюшека ще бъде еднакво навсякъде. **0,5 т**	**3 т**
Част 2	Финиъс греши (само твърдението). **1 т** Финиъс, Изабела и влакът се движат с една и съща скорост. Когато Финиъс подскочи нагоре, той не губи тази скорост. Следователно, ще се приземи на същото място, откъдето е скочил. **2 т**	**3 т**
Част 3	При закрепването на вакуумната закачалка за стена/таван, въздух има само от едната страна на смукалото. **1 т** Само върху тази страна атмосферното налягане оказва натиск и смукалото остава прикрепено към стената/тавана. **1,5 т** Натискът върху смукалото трябва да е по-голям или равен на теглото на слончето, т.е. $p_{\text{атм}}S = G_{\text{слон}}$. **1 т** От тук намираме $S = \dfrac{G_{\text{слон}}}{p_{\text{атм}}} = 0,012\ \text{m}^2$ или $120\ \text{cm}^2$. **0,5 т**	**4 т**

No.	Задача 2.	Точки
Част 1	От графиката намираме, че за завирането на 1 kg вода е необходимо количество топлина $Q_1 = 0,3$ MJ. **0,5 т** $Q_1 = Pt_1$, където P е мощността на печката, а $t_1 = 2$ min. **1 т** За завирането на цялата тенджера са необходими $t_2 = 18$ min и количество топлина $Q_2 = Pt_2$. Разделяме почленно $\Rightarrow$ $Q_2 = Q_1 \dfrac{t_2}{t_1} = 2,7$ MJ. **2,5 т** От графиката намираме, че на това количество топлина съответства 3,5 kg вода, т.е. тенджерата на Спаска събира 3,5 kg вода. **0,5 т** *Забележка: за намиране на мощността P = 2500 kW се дава* ***0,5 т.,*** *но общият брой точки не трябва да надвишава 5 т.*	**5 т**
Част 2	От графиката определяме, че за да има хубав компот, мощността на котлона трябва да е между 600 W и 1000 W. **0,5 т** Възможни са четири свързвания: само R_1, само R_2, двете последователно, двете успоредно. **1 т** Необходимо е да се пресметнат мощностите при всички свързвания: $P_{R1} = \dfrac{U^2}{R_1} = \dfrac{220^2}{80} = 605$ W **0,5 т** $P_{R2} = \dfrac{U^2}{R_2} = \dfrac{220^2}{50} = 968$ W **0,5 т** $P_{\text{посл}} = \dfrac{U^2}{(R_1 + R_2)} = \dfrac{220^2}{80+50} \approx 372$ W **1 т** $P_{\text{усп}} = U^2 \dfrac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = 220^2 \dfrac{80+50}{80 \cdot 50} = 1573$ W **1 т** Единствените мощности, които попадат в интервала за хубав компот, са P_{R1} и P_{R2}. Тогава търсените свързвания са само R_1 и R_2. **0,5 т**	**5 т**

No.	Задача 3.	Точки
Част 1	Уредите са амперметри. **1 т** Резисторите са свързани успоредно. **0,5 т** Нека означим напрежението на източника с *U*. Амперметърът Z измерва тока I_1 през резистора R_1, т.е. $I_1 = \dfrac{U}{R_1}$. **0,5 т** Токът I_2 през резистора R_2 е $I_2 = \dfrac{U}{R_2}$. **0,5 т** Амперметърът Y измерва тока на цялата верига, т.е. $I = I_1 + I_2 = U\left(\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right)$. **0,5 т** По условие $I = 4I_1$, т.е. $U\left(\dfrac{R_1 + R_2}{R_1 R_2}\right) = 4\dfrac{U}{R_1}$, откъдето $R_1 = 6\ \Omega$. **0,5 т** Ако разменим местата на резисторите, ще се промени само показанието на амперметъра Z. **0,5 т** Той ще показва $I_Z = \dfrac{U}{R_2}$. **0,5 т** Отношението между показанията ще бъде $\dfrac{I}{I_Z} = R_2\dfrac{(R_1 + R_2)}{R_1 R_2} = \dfrac{4}{3}$. **0,5 т**	**5 т**
Част 2	Тъй като и двата уреда имат ненулево показание и са включени правилно, то уредът X е амперметър, а уредът S е волтметър. **1 т** Двата резистора са свързани последователно. **0,5 т** Токът във веригата, измерван от амперметъра, е $I = \dfrac{U}{R_1 + R_2} = 0,5\ \text{A}$. **0,5 т** Напрежението на резистора със съпротивление *R* = 4 Ω, което се измерва от волтметъра, е $U_{4\Omega} = IR_{4\Omega} = 0,5\ \text{A} \cdot 4\ \Omega = 2\ \text{V}$. **0,5 т** Тъй като $2\ \text{V} = 0,002\ \text{kV}$, то показанията на S са в kV. Понеже $0,5\ \text{A} = 500\ \text{mA}$, то показанията на X са в mA. **0,5 т** Ако разменим местата на измервателните уреди, токът ще протича само по резистора със съпротивление *R* = 5 Ω и през амперметъра. Тогава уредът X ще показва $I_\text{X} = \dfrac{U}{R_{5\Omega}} = 0,9\ \text{A} = 900\ \text{mA}$. **2 т**	**5 т**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 8. клас

Задача 1. Скок от Космоса

На 14 октомври 2012 г. австрийският екстремен спортист Феликс Баумгартнер се издигна с балон на височина 39 000 m, която дотогава никой друг човек не е достигал с балон. Оттам той скочи и по време на падането си достигна скорост, по-голяма от скоростта на звука. Наближавайки земята, той отвори парашута си и се приземи безопасно след общо 540 s падане. На фиг. 1 е показана графика на скоростта на спортиста по време на падането в зависимост от времето след скачането, която можете да използвате при отговор на следващите въпроси.

Земното ускорение е $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, а масата на спортиста заедно с предпазния скафандър е $m = 110\ \mathrm{kg}$.

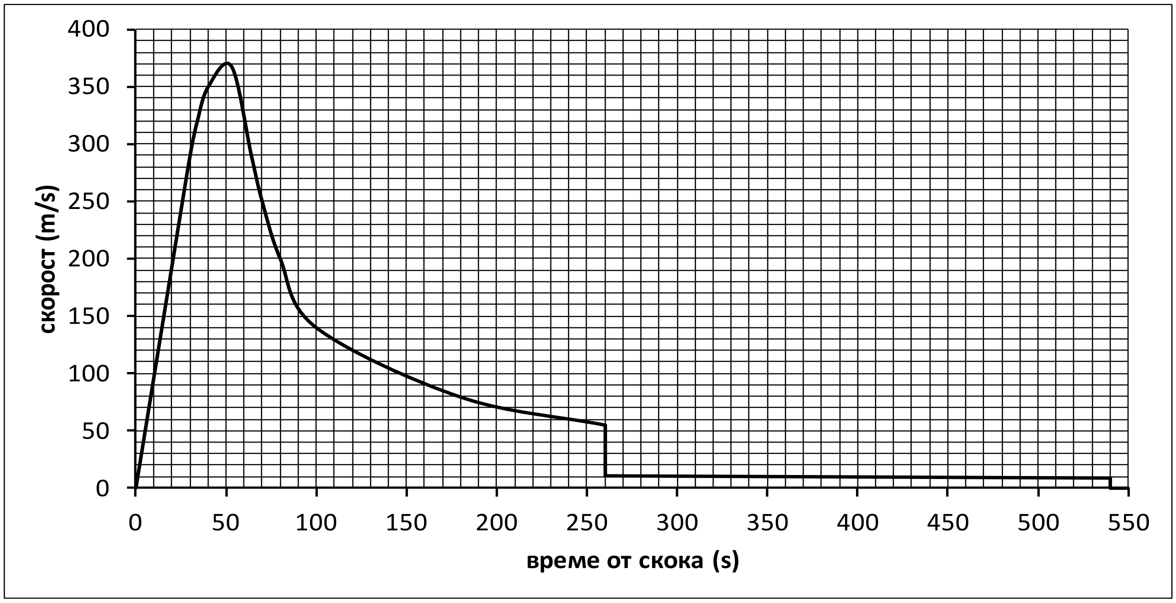
А) Колко е средната скорост $v_{\text{ср}}$ на спортиста по време на цялото падане? **(1,5 т)**

Б) На голяма височина, поради ниската температура на въздуха, скоростта на звука е $u = 290\ \mathrm{m/s}$. Ако приемете, че спортистът се движи равноускорително, докато достигне тази скорост, намерете на каква височина h_1 той е преминал звуковата бариера. **(2,5 т)**

В) Сравнете ускорението a, с което се движи спортистът, докато достигне скоростта на звука, със земното ускорение g и посочете поне една причина за разликата между тях. **(1,5 т)**

Г) На каква височина h_2 над земята се е отворил парашутът на спортиста. **(2,5 т)**

Д) Намерете силите F_1 и F_2 на съпротивление на въздуха, които действат на спортиста съответно в момента, когато достига максималната си скорост и по време на падането с парашута? **(2,0 т)**



Фиг. 1. Графика на скоростта на Феликс Баумгартнер по време на неговото падане.

Задача 2. Настигането невъзможно

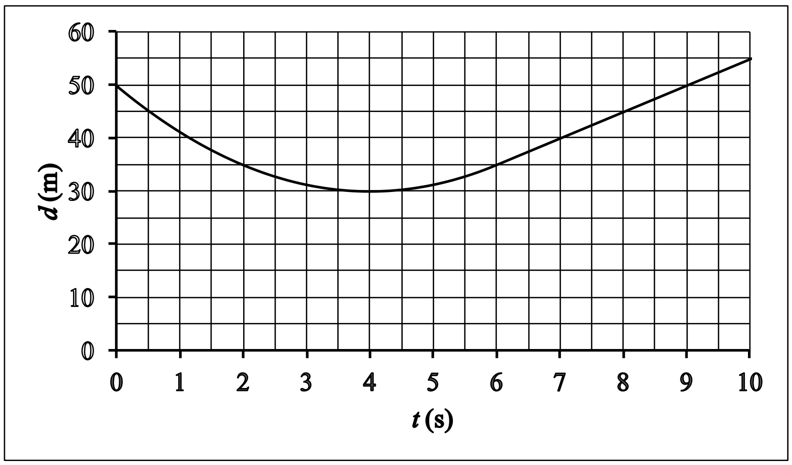
Автомобил се движи с постоянна скорост v_1. На определено разстояние пред него от състояние на покой потегля мотоциклет. Първоначално мотоциклетът се движи равноускорително, докато достигне определена скорост v_2, след което продължава да се движи равномерно с тази скорост. Графиката на фиг. 2 показва зависимостта на разстоянието d между автомобила и мотоциклета от времето t. Моментът, в който потегля мотоциклетът, съответства на време $t = 0$.

Като използвате данните от графиката определете:

А) минималното разстояние d_1, на което автомобилът се доближава до мотоциклета и съответният момент t_1, в който става това; **(1,0 т)**

Б) скоростта v_1 на автомобила и ускорението a, с което потегля мотоциклетът; **(7,0 т)**

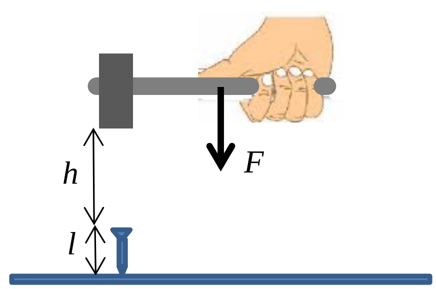
В) крайната скорост v_2, която достига мотоциклетът. **(2,0 т)**



Фиг. 2. Зависимост на разстоянието d между автомобила и мотоциклета от времето t.

Задача 3. Забиване на пирон

Дърводелец забива изцяло пирон в дъска само с един удар. За целта издига чука на височина h = 25 cm над главата на пирона и, докато чукът пада, му действа със сила F = 40 N, насочена надолу. По време на удара между чука и пирона, дърводелецът не упражнява сила върху чука. Масата на чука е m = 1 kg, а дължината на пирона l = 5 cm. Пиронът е вертикален по време на целия удар. Приемете, че земното ускорение е $g = 10$ m/s^2.



А) Намерете скоростта v_0 на чука непосредствено преди да удари пирона. **(3,0 т)**

Б) Определете силата P, с която чукът действа на пирона по време на удара. Приемете, че силата е постоянна по време на удара. **(4,0 т)**

В) Пресметнете работата A, която извършва дърводелецът за един работен ден, ако през това време забива N = 1000 пирона по описания начин. **(3,0 т)**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Решения на темата за 8. клас

Задача 1. Скок от Космоса

А) Общият път, изминат от спортиста, е равен на височината H, от която той скача:

$$s = 39000 \text{ m},$$

а общото време на падането е $t = 540$ s. Следователно средната скорост е:

$$v_{\text{ср}} = \frac{s}{t} \approx 72 \text{ m/s}.$$

Б) От графиката отчитаме, че спортистът достига скоростта на звука $u = 290 \text{ m/s}$ след време $t_1 = 30$ s. Следователно ускорението през този интервал е:

$$a = \frac{u}{t_1} \approx 9{,}67 \text{ m/s}^2,$$

а изминатият път:

$$s_1 = \frac{1}{2}at_1^2 = \frac{1}{2}ut_1 = 4350 \text{ m}.$$

Височината, на която той достига тази скорост, е:

$$h_1 = H - s_1 = 34650 \text{ m}.$$

В) Ускорението е по-малко от земното. За това има две причини:

1) На спортиста действа сила на съпротивление.

2) С отдалечаване от центъра на Земята ускорението на свободно падане намалява.

Г) Парашутът се отваря в момента, когато скоростта на спортиста рязко намалява, т.е. 260 s след началото на падането. Общото време на движение с отворен парашут е:

$$t_2 = 540 \text{ s} - 260 \text{ s} = 280 \text{ s}.$$

От графиката се вижда, че по време на спускането с парашута спортистът се движи равномерно със скорост:

$$v_2 = 10 \text{ m/s}.$$

Височината, на която се отваря парашутът, е равна на изминатия път от момента на отваряне на парашута до приземяването на спортиста, т.е.

$$h_2 = v_2 t_2 = 2800 \text{ m}$$

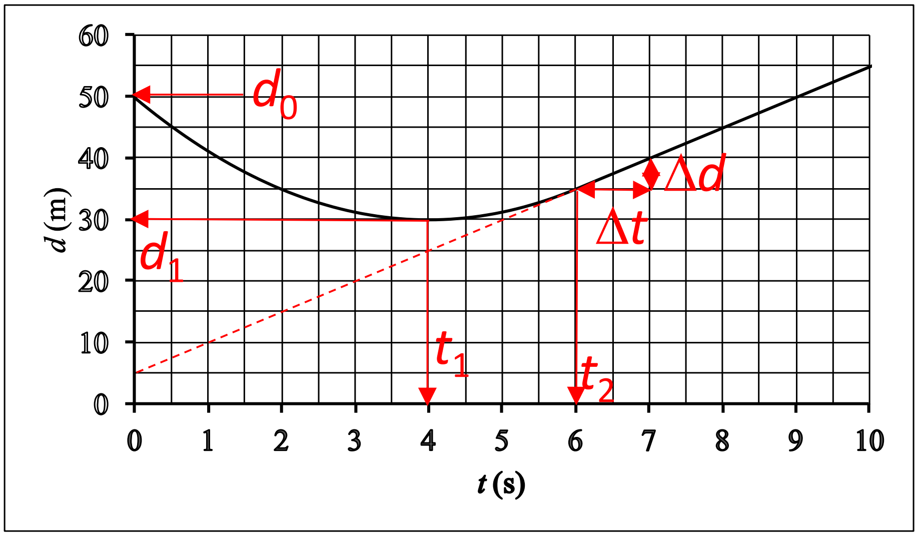
Д) Скоростта на спортиста се увеличава, докато силата на тежестта е по-голяма от силата на съпротивление на въздуха. Спортистът достига максимална скорост 370 m/s (50 s след скока), когато двете сили се изравняват по големина. Следователно:

$$F_1 = mg = 1078 \text{ N}.$$

След отварянето на парашута движението е равномерно, т.е. с нулево ускорение. От II принцип на Нютон следва, че през това време силата на тежестта и силата на съпротивление също се уравновесяват:

$$F_2 = mg = 1078 \text{ N}.$$

Задача 2. Настигането невъзможно



А) От графиката непосредствено се вижда, че най-малкото разстояние между автомобила и мотоциклета е:

$$d_1 = 30 \text{ m}$$

в момента:

$$t_1 = 4 \text{ s}$$

Б) През периода, когато мотоциклетът се ускорява, скоростта му нараства по закона:

$$v_M = at$$

Докато скоростта на автомобила е по-голяма от тази на мотоциклета, разстоянието между тях намалява. То става най-малко в момента, когато скоростите на мотоциклета и автомобила се изравнят. Следователно:

$$v_1 = at_1$$

Ако означим началното разстояние между автомобила и мотоциклета с d_0, разстоянието между тях в по-късен момент се дава със съотношението:

$$d = d_0 - s_A + s_M$$

където s_A и s_M са съответно пътищата, изминати от автомобила и мотоциклета. Пътят, изминат от автомобила, се дава с формулата:

$$s_A = v_1 t$$

а на мотоциклета, докато се движи равноускорително, с израза:

$$s_M = \frac{at^2}{2}$$

Следователно за най-малко разстояние между мотоциклета и автомобила получаваме:

$$d_1 = d_0 - v_1 t_1 + \frac{at_1^2}{2}$$

Като вземем предвид, че d_0 = 50 m, и като заместим стойностите на t_1 и d_1, получаваме следната система уравнения:

$$v_1 = (4 \text{ s}) \cdot a$$

$$(4\ \mathrm{s}) \cdot v_1 - (8\ \mathrm{s}^2) \cdot a = 20\ \mathrm{m}$$

Оттук намираме търсените величини:

$$v_1 = 10\ \mathrm{m/s}$$
$$a = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

Алтернативно решение

От графиката определяме, че d_0 = 50 m, след което отчитаме разстоянието между мотоциклета и автомобила в два по-късни момента, например, както е дадено в таблицата.

t (s)	d (m)
2	35
4	30

Като вземем предвид, че разстоянието се мени по закона:

$$d = d_0 - v_1 t + \frac{at^2}{2}$$

и заместим двете стойности за времето и съответните им разстояния, получаваме следната система:

$$(2\ \mathrm{s}) \cdot v_1 - (2\ \mathrm{s}^2) \cdot a = 15\ \mathrm{m}$$
$$(4\ \mathrm{s}) \cdot v_1 - (8\ \mathrm{s}^2) \cdot a = 20\ \mathrm{m}$$

от които намираме скоростта на автомобила и ускорението на мотоциклета:

$$v_1 = 10\ \mathrm{m/s}$$
$$a = 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$$

В) След като мотоциклетът започне да се движи с постоянна скорост v_2, за даден интервал от време Δt, той изминава път $\Delta s_M = v_2 \Delta t$. За същото време автомобилът изминава път $\Delta s_A = v_1 \Delta t$. Следователно, след момента t_2, за равни интелвали време Δt, разстоянието между автомобила и мотоциклета нараства с една и съща стойност:

$$\Delta d = (v_2 - v_1)\Delta t$$

До този извод може да се стигне и, ако ученикът съобрази, че относителната скорост на мотоциклета спрямо автомобила е постоянна и равна на $v_O = v_2 - v_1$. От графиката се вижда, че търсеният момент е:

$$t_2 = 6\ \mathrm{s}$$

защото след него за всеки интермал от $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ разстоянието нараства с една и съща стойност $\Delta d = 5\ \mathrm{m}$. До този извод можем да стигнем и от факта, че след този момент графиката на разстоянието от времето е права линия. Оттук следва, че:

$$v_2 - v_1 = 5\ \mathrm{m/s}$$

и така намираме крайната скорост на мотоциклета:

$$v_2 = 15\ \mathrm{m/s}$$

Скоростта на мотоциклета може да бъде намерена и от закона за скоростта през първите 6 секунди от движението:

$$v_2 = at_2 = 15\ \mathrm{m/s}$$

Задача 3. Забиване на пирон

А) Преди чукът да удари пирона, му действат две сили с еднакви посоки – силата на тежестта G и силата F. От втория принцип на Нютон:

$$ma_1 = mg + F$$

изразяваме ускорението, с което пада чукът:

$$a = g + \frac{F}{m} = 50\ \mathrm{m/s^2}$$

Времето, за което пада чукът е:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

а скоростта, която достига:

$$v_0 = at = \sqrt{2ah} = 5\ \mathrm{m/s}$$

Б) От III принцип на Нютон следва, че по време на удара пиронът действа на чука със сила на реакция, която е равна по големина на силата P, но е насочена вертикално нагоре. Следователно на чука действат две сили – силата на тежестта и силата на реакция, които са насочени противоположно една на друга. Под тяхно действие чукът извършва равнозакъснително движение с ускорение a_1, което удоволетворява II принцип на Нютон:

$$ma_1 = P - mg$$

Ако означим с t_1 времето на удара, от законите за равнозакъснително движение имаме:

$$0 = v_0 - a_1 t_1;$$

$$l = v_0 t_1 - \frac{a_1 t_1^2}{2}.$$

Оттук намираме:

$$a_1 = \frac{v_0^2}{2l} = 250\ \mathrm{m/s^2}.$$

Следователно:

$$P = ma_1 + mg = 260\ \mathrm{N}$$

В) Преди чукът да удари пирона, дърводелецът извършва работа за ускоряване на чука:

$$A_1 = Fh = 10\ \mathrm{J}$$

За да забие следващ пирон обаче, дърводелецът трябва да издигне чука на височина

$$H = h + l$$

над нивото на дъската. При това той повдига чука със сила, равна по големина на силата на тежестта:

$$G = mg$$

и извършва работа:

$$A_2 = mgH = 3\ \mathrm{J}$$

Следователно общата работа, която извърщва дърводелецът, за да забие N пирона, е:

$$A = N(A_1 + A_2) = 13\ 000\ \mathrm{J} = 13\ \mathrm{kJ}$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 9. клас

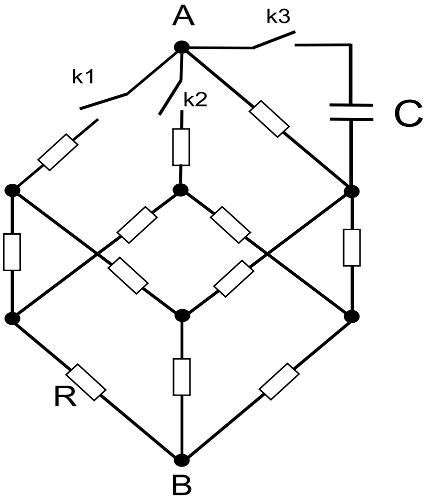
Задача 1. *Електрическа схема*

Дванадесет съпротивления с големина *R*, един кондензатор с капацитет *C* и три ключа, k1, k2, k3, са свързани с проводници в куб, както е показано на фигурата. Точките на свързване на проводниците са отбелязани с черни кръгчета, като електрически контакт има единствено в тези точки. Между точките A и B е приложено постоянно напрежение с големина *U*. Намерете:

а) съпротивлението между точки A и B при затворени k1 и k2 и отворен k3 **[3т]**;

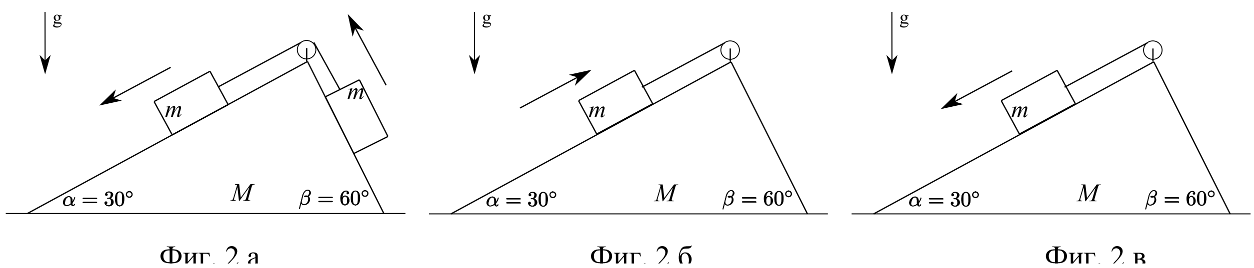
б) заряда, до който се зарежда кондензаторът, след затваряне на ключовете k1, k2, k3 **[3т]**;

в) съпротивлението между точки A и B при отворени k1, k2 и k3 **[4т]**.



Фиг. 1

Задача 2. *Механика*



Две малки тела с маса *m* са поставени върху голямо тяло с маса *M*, което е с форма на правоъгълен триъгълник с ъгъл $\alpha = 30^\circ$. Телата са свързани с неразтеглива нишка, която е захваната за макара, задвижвана от електродвигател. Приемете, че повърхностите са идеално гладки (липсва сила на триене) и че голямото тяло е фиксирано за долната повърхност.

а) Нека приложената сила от страна на двигателя да е такава, че телата се движат с постоянна скорост *v* в посока, указана на фиг. 2 а. Намерете мощността на двигателя. Намерете тока, който консумира двигателят, работещ под напрежение *U*. **[4т]**

б) Премахваме едното тяло (фиг. 2 б). Намерете мощността на двигателя, такава че малкото тяло се изкачва по голямото с ускорение *g*. В началния момент тялото е в покой. (виж упътването) **[4т]**

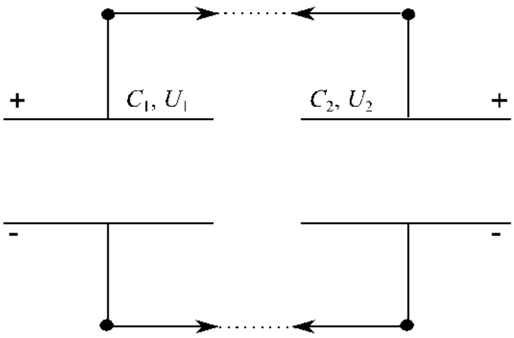
в) Отново имаме едно тяло (фиг. 2 в). Сега вместо електродвигател, към макарата е прикрепено динамо, което зарежда кондензатор с капацитет *C*. В началния момент тялото е в покой, след което то започва да се спуска по наклонената повърхност. След известно време тялото се е спуснало с височина *H* и е придобило скорост *v*. Намерете заряда на кондензатора. Приемете, че няма загуба на енергия в системата. **[2т]**

Забележка: а) и б): Приемете, че цялата електрическа енергия се трансформира в механична работа, т.е. КПД на двигателя е 1.
в): Динамото е уред, който превръща механичното въртене в постоянен електричен ток.

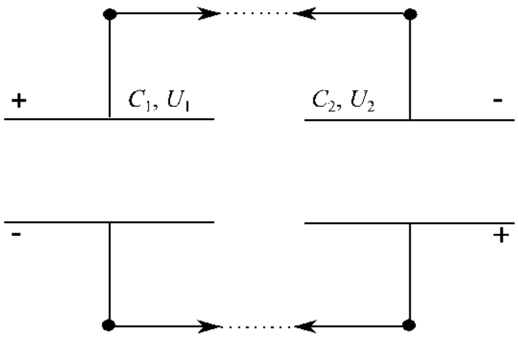
Упътване: а) и б): Мощността *P* може да се дефинира като разликата в енергиите в два безкрайно близки момента от време t_1 и t_2, разделена на времевия интервал, $P = (E(t_2) - E(t_1))/(t_2 - t_1)$.

в): Енергията на зареден кондензатор е $W = CU^2/2$, където *C* е капацитетът, а *U* е напрежението.

Задача 3. *Кондензатори*



Фиг. 3 а



Фиг. 3 б

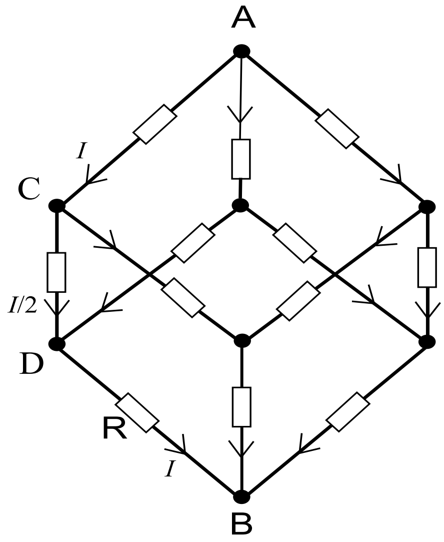
а) Плосък кондензатор се състои от две пластини с площи S, поставени на разстояние d една от друга. Пластините се зареждат с еднакви по големина, но разноименни заряди, така че в пространството между тях се създава електрично поле E. Намерете електричната енергия на кондензатора. Намерете плътността на енергията (енергията за единица обем), като имате предвид, че енергията е поместена изцяло в обема на кондензатора. **[2.5т]**

б) Нека разгледаме два кондензатора с капацитети $C_1 = 1\,\mu\text{F}$ и $C_2 = 2\,\mu\text{F}$, които зареждаме съответно до напрежения $U_1 = 1$ V и $U_2 = 0.25$ V. В даден момент кондензаторите се свързват, както е показано на фиг. 3 а и на фиг. 3 б. Намерете заряда и напрежението на всеки един кондензатор след свързването им за всеки един от двата случая. **[4т]**

в) Намерете енергията, която ще се загуби в процеса на свързване за двата случая, изобразени на фиг. 3 а и на фиг. 3 б. При какво условие свързването на кондензаторите няма да промени енергията на системата за случая от фиг. 3 а? **[3.5т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 9. клас - решения

Задача 1. *Електрическа схема*

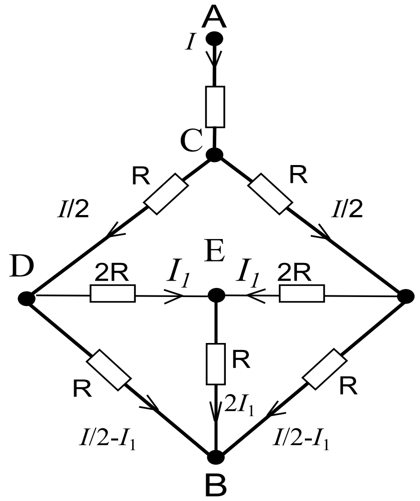


а) Схемата е показана вдясно **[0.5т]**. Нека в т. A влиза ток $3I$. Поради симетрията, токът се разделя на три равни части, така че по клона A-C тече ток с големина I. Във възел C, отново от съображения за симетрия, токът се дели на две равни части и по клона C-D тече ток $I/2$. По клона D-B тече ток I **[1т]**.

Нека да сумираме потенциалните разлики по контура A-C-D-B. Имаме $U = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} = R_{AB} 3I$ **[0.5т]**, където U е напрежението между т. A и т. B. Така получаваме $R_{AB} 3I = RI + RI/2 + RI$, т.е. $R_{AB} = 5R/6$ **[1т]**.

(Друг подход е да се разгледа еквивалентна схема от последователно свързани резистори с големина R/3, R/6 и R/3.)

б) Кондензаторът се зарежда до напрежение U_{AC}, което е равно на RI **[1т]**. За заряда намираме $q = CU = CRI$ **[0.5т]**. Изразяваме I чрез U и R: $U = R_{AB} 3I \Rightarrow I = 2U/5R$ **[0.5т]**. Така получаваме $q = \frac{2}{5}CU$ **[1т]**.



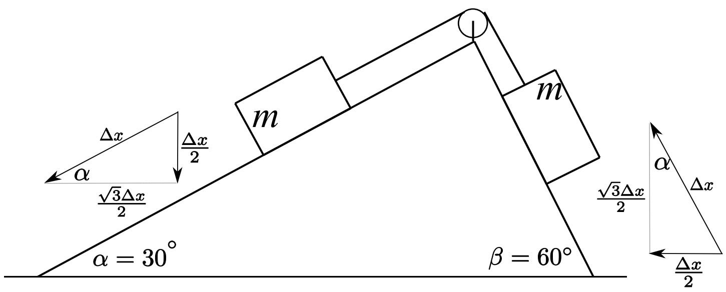
в) Еквивалентната схема е показана вдясно **[1т]**.

Отново сумираме напреженията на отделните участъци. Получаваме $U = U_{AC} + U_{CD} + U_{DB} = RI + RI/2 + R(I/2 - I_1)$ **[1т]**. Токът I_1 намираме от равенството: $U_{DB} = U_{DE} + U_{EB}$ **[0.5т]**. Така намираме $R(I/2 - I_1) = 2RI_1 + R2I_1$, т.е. $I_1 = I/10$ и $U = \frac{19}{10}RI$ **[0.5т]**. Следователно $R_{AB} = \frac{U}{I} = \frac{19}{10}R$ **[1т]**.

Задача 2. *Механика*

Ще използваме изцяло енергетичен подход. Друг възможен метод е чрез използване на сили.

а)



Фиг. 2

Тъй като телата се движат с постоянна скорост v, за време Δt те изминават разстояние $\Delta x = v\Delta t$ по наклонените повърхности. Така лявото тяло се спуска с $H_1 = \Delta x/2$ **[0.5т]** (срещулежащият катет на ъгъл от 30° е наполовина по-къс от хипотенузата, виж фиг. 2), а дясното тяло се изкачва с $H_2 = \Delta x\sqrt{3}/2$ **[0.5т]** (използваме Питагоровата теорема). Промяната в енергията на системата за време Δt е $\Delta E = -mg\Delta H_1 + mg\Delta H_2 = \frac{\sqrt{3}-1}{2} mg\Delta x$ **[1т]**. Така за мощността получаваме

$$P = \frac{\Delta E}{\Delta t} = \frac{\sqrt{3}-1}{2} mgv \text{. } \mathbf{[1т]}$$

За тока получаваме

$$I = \frac{P}{U} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\frac{mgv}{U} \text{. } \mathbf{[1т]}$$

б) След време t тялото е изминало разстояние $x = gt^2/2$, съответстващо на относителна височина $H = \frac{x}{2} = \frac{gt^2}{4}$ **[0.5т]**, и се движи със скорост $v = gt$ **[0.5т]**. Енергията на тялото се дава с израза

$$E = mgH + \frac{mv^2}{2}, \mathbf{[1т]}$$

което е равно на

$$E(t) = \frac{3}{4} mg^2 t^2. \mathbf{[1т]}$$

За мощността имаме $P = \frac{E(t+\Delta t) - E(t)}{\Delta t}$, където Δt е пренебрежимо малък интервал от време. Получаваме $P = \frac{3}{4} mg^2 \frac{(t+\Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \frac{3}{4} mg^2 \frac{\Delta t(2t+\Delta t)}{\Delta t} \approx \frac{3}{2} mg^2 t.$ **[1т]**

в) При спускане с височина H тялото губи потенциална енергия, част от която се превръща в кинетична енергия, а останалата част се превръща в енергия на кондензатора **[1т]**. Имаме $mgH = \frac{mv^2}{2} + \frac{q^2}{2C}$, откъдето получаваме

$$q = \sqrt{C(2mgH - mv^2)} \mathbf{[1т]}.$$

__Задача 3. *Кондензатори*__

а) Енергията на кондензатор с капацитет C и напрежение U се дава с израза

$$W = \frac{CU^2}{2}. \mathbf{[0.5т]}$$

Капацитетът на кондензатора е

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}, \mathbf{[0.25т]}$$

а напрежението му е

$$U = Ed. \mathbf{[0.25т]}$$

За енергията получаваме

$$W = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2} Sd. \mathbf{[1т]}$$

За плътността на енергията имаме $w = \frac{W}{V}$, където V е обемът, заграден от плочите на кондензатора, $V = Sd$. Получаваме

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \mathbf{[0.5т]}$$

б) Зарядите на кондензаторите са $q_1 = C_1 U_1$ и $q_2 = C_2 U_2$ **[0.5т]**, като по условие имаме $q_1 > q_2$. Зарядът в електродите на получения кондензатор е q и $-q$, като $q = q_1 + q_2$ **[0.5т]** за случая от фиг. 3а и $q = q_1 - q_2$ за случая от фиг. 3б **[0.5т]**. При свързването q се разпределя между кондензаторите, като $q = q_1^{'} + q_2^{'}$, където $q_1^{'}$ и $q_2^{'}$ са зарядите на кондензаторите след свързването. Зарядът се разпределя така, че напрежението $U^{'}$ на кондензаторите да е равно. Това налага условието

$$U^{'} = \frac{q_1^{'}}{C_1} = \frac{q_2^{'}}{C_2}.$$ **[0.5т]**

Така получаваме

$$q_1^{'} = C_1 \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 0.5\ \mu C,\quad q_2^{'} = C_2 \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 1\ \mu C$$ за фиг. 3а; **[0.5т]**

$$q_1^{'} = C_1 \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.17\ \mu C,\quad q_2^{'} = C_2 \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.33\ \mu C$$ за фиг. 3б. **[0.5т]**

За напрежението получаваме

$$U^{'} = \frac{C_1 U_1 + C_2 U_2}{C_1 + C_2} = 0.5\ \text{V}$$ за фиг. 3а; **[0.5т]**

$$U^{'} = \frac{C_1 U_1 - C_2 U_2}{C_1 + C_2} \approx 0.17\ \text{V}$$ за фиг. 3б. **[0.5т]**

в) Енергията, която се губи при свързване, е $\Delta W = W_1 - W_2$, където W_1 е началната енергия на системата от двата кондензатора, а W_2 е крайната. Имаме

$$W_1 = \frac{C_1 U_1^2}{2} + \frac{C_2 U_2^2}{2}$$ **[0.25т]**

и $W_2 = \frac{1}{2}(C_1 + C_2) U^{'2}$, т.е.

$$W_2 = \frac{(C_1 U_1 + C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$ за фиг. 3а; **[0.5т]**

$$W_2 = \frac{(C_1 U_1 - C_2 U_2)^2}{2(C_1 + C_2)}$$ за фиг. 3б. **[0.5т]**

Така получаваме

$$\Delta W = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 - U_2)^2 \approx 0.19\ \mu J$$ за фиг. 3а; **[1т]**

$$\Delta W = \frac{C_1 C_2}{2(C_1 + C_2)} (U_1 + U_2)^2 \approx 0.52\ \mu J$$ за фиг. 3б. **[1т]**

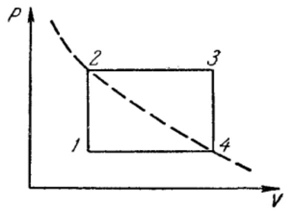
Условието, при което енергията на системата от фиг. 3а няма да се промени при свързване, е

$$U_1 = U_2.$$ **[0.25т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 10. клас

Задача 1. Топлинен двигател

На p,V - диаграмата е показан работният цикъл на топлинен двигател с работно вещество определена маса въздух, която се разглежда като идеален газ. Той включва два изохорни (1-2 и 3-4) и два изобарни (2-3 и 4-1) процеса. Минималната температура на газа е T_1, а максималната – T_2. Състоянията 2 и 4 лежат на една изотерма.



а) Намерете температурата T на изотермата 2-4.

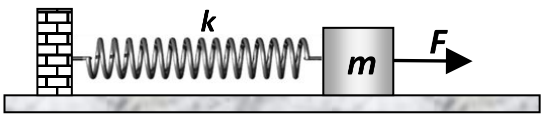
б) Определете извършената от газа работа A за един работен цикъл. Резултатът изразете чрез минималната T_1 и максималната T_2 температура на газа и газовата константа B.

в) Пресметнете КПД η на работния цикъл, ако е известно че вътрешната енергия на газа в дадено състояние се дава с израза $U = (5/2)BT$.

г) Определете допустимите стойности на η за произволни T_1 и T_2.

Задача 2. Трептящи системи

Част А: Тяло с маса $m = 4$ kg, което е прикачено към пружина с коефициент на

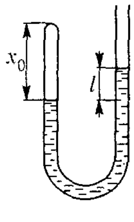


еластичност $k = 25$ N/m, се намира в покой върху гладка хоризонтална равнина. В даден момент върху тялото започва да действа хоризонтална постоянна сила $F = 5$ N.

а) Намерете изминатото от тялото разстояние s до първото му спиране след началото на движението.

б) Определете времето t за изминаване на разстоянието s.

Част Б: Живак с маса $m = 16$ g е налят в тръбичка със сечение $S = 0{,}05\ \text{cm}^2$, която е



запоена от едната страна. Разликата на нивата на живака в двете колена е $l = 2$ cm, а височината на въздушния стълб в запоения край е $x_0 = 4$ cm. Намерете периода T на хармоничните трептения на живака в тръбичката, като приемете че процесите на свиване и разширение на газа са изотермни. Плътността на живака е $\rho = 13{,}6\ \text{g/cm}^3$, земното ускорение $g = 9{,}8\ \text{m/s}^2$, а атмосферното налягане – $p_0 = 1\ \text{atm} \approx 1{,}0.10^5$ Pa.

Задача 3. Фотоефект. Топлинно лъчение

Част А: При последователно осветяване на повърхността на метал със светлина с дължина на вълната $\lambda_1 = 0{,}35\ \mu\text{m}$ и $\lambda_2 = 0{,}54\ \mu\text{m}$ е установено, че съответните максимални скорости на фотоелектроните се различават една от друга $\eta = 2$ пъти.

а) Намерете отделителната работа A на метала в единици eV.

б) Определете възможните стойности на дължината на вълната λ на светлината, при облъчване с която ще се наблюдава фотоефект за дадения метал.

Полезни константи: константа на Планк $h = 6{,}63.10^{-34}$ J.s, скорост на светлината във вакуум $c = 3.10^{8}$ m/s, елементарен заряд $e = 1{,}6.10^{-19}$ C.

Част Б: Слънцето излъчва като абсолютно черно тяло с температура $T = 5700$ K. Слънчевата светлина попада върху медна сфера, намираща се на Земята, като сферата се разглежда също като черно тяло. Диаметърът на Слънцето се вижда от Земята под ъгъл $\alpha = 0{,}5^{\circ}$. Каква ще бъде равновесната температура на медната сфера, достигната като резултат само на поглъщането на слънчева светлина и излъчването на топлинно лъчение (влиянието на Земята върху сферата се пренебрегва).

*Всяка задача се оценява максимално с **10 точки**.*

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Решения на темата за 10. клас

Задача 1. а) Идеалният газ има минимална температура T_1 в състояние 1 и максимална температура T_2 – в състояние 3 **[0,5 т.]**. За определяне на температурата T може да се използва една от двойките еднотипни изопроцеси. Например, ако означим с p_1 налягането в състояние 1, а с p_2 – налягането в състояние 2, при изохорния процес 1-2 имаме

$$\frac{p_1}{T_1} = \frac{p_2}{T},$$ **[0,5 т.]**

докато при изохорния процес 3-4 е в сила равенството

$$\frac{p_2}{T_2} = \frac{p_1}{T}.$$ **[0,5 т.]**

От двете равенства следва

$$T = \sqrt{T_1 T_2}\ .$$ **[0,5 т.]**

б) Нека означим с V_1 обема на газа при изохорния процес 1-2, а с V_2 – обема на газа при изохорния процес 3-4. Идеалният газ върши работа само при изобарните процеси. Тогава имаме

$$A = A_{2-3} + A_{4-1} = p_2(V_2 - V_1) + p_1(V_1 - V_2) = (p_2 - p_1)(V_2 - V_1).$$ **[1 т.]**

От уравнението на състояние за определена маса идеален газ, приложено за състоянията 1, 2, 3 и 4, следва

$$p_1V_1 = BT_1, \quad p_2V_1 = BT, \quad p_2V_2 = BT_2, \quad p_1V_2 = BT,$$ **[1 т.]**

откъдето намираме

$$A = B(T_2 + T_1 - 2T) = B(\sqrt{T_2} - \sqrt{T_1})^2.$$ **[1 т.]**

в) По определение КПД се дава с израза

$$\eta = \frac{A}{Q},$$ **[0,5 т.]**

където Q е количеството топлина, което получава работното вещество за един работен цикъл. Това става при изохорното нагряване 1-2, последвано от изобарното разширение 2-3. Тогава от първия принцип на термодинамиката следва

$$Q = U_3 - U_1 + A_{2-3} = \frac{5}{2}B(T_2 - T_1) + p_2(V_2 - V_1)$$ **[1 т.]**

$$= \frac{5}{2} B(T_2 - T_1) + B(T_2 - \sqrt{T_1 T_2}) \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

$$= \frac{1}{2} B T_2 \left(1 - \sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) \times \left(7 + 5 \left(\sqrt{\frac{T_1}{T_2}} \right) \right). \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Като използваме израза за A от пункт б), за КПД получаваме

$$\eta = \frac{2(1 - \sqrt{T_1 / T_2})}{7 + 5\sqrt{T_1 / T_2}}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

г) КПД на топлинния двигател зависи само от възможните стойности на $x = \sqrt{T_1 / T_2}$, които удовлетворяват неравенствата $0 < x < 1$ **[0,5 т.]**. Тогава стойностите на КПД удовлетворяват неравенствата

$$0 < \eta < \frac{2}{7} \approx 0{,}29. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Задача 2. Част А: а) Преди прилагането на силата F пружинното махало е в равновесие **[0,5 т.]**. Под действие на тази сила се променя равновесното му положение, което се премества надясно на разстояние

$$A = \frac{F}{k}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Така, движението на тялото представлява хармонично трептене около ново положение на равновесие с амплитуда, равна на A (при наличие на силата F движението започва от състояние на покой). Първото спиране на тялото ще стане, след като то задмине равновесното положение и се отдалечи от него на разстояние, равно на амплитудата на трептене, т.е. A **[0,5 т.]**. Следователно търсеното разстояние е

$$s = 2A = \frac{2F}{k} = 0{,}4\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) Изминаването на разстоянието s означава движение на махалото от крайно ляво до крайно дясно положение. Времето за изминаване на това разстояние е половин период, т.е.

$$t = \frac{T}{2} = \pi \sqrt{\frac{m}{k}} \approx 1{,}3\ \mathrm{s}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б: В равновесие налягането p на въздуха в тръбичката е

$$p = p_0 + \rho g l. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Ще покажем, че при отклонение x на нивото на живака в лявото коляно надолу, когато се наблюдава и отклонение x на нивото на живака в дясното коляно нагоре, възниква резултантна връщаща сила $F = kx$, действаща върху живака. Резултантната сила, която действа на живака, е $F = F_1 - F_2$, където силата

$$F_1 = p_0 S + \rho g(l + 2x)S = (p + 2\rho g x)S$$ **[0,5 т.]**

се дължи на атмосферното налягане и разликата в нивата на живака в двете колена, а

$$F_2 = (p - \Delta p)S$$ **[0,5 т.]**

е силата, с която въздухът в запоената част на тръбичката действа на живака.

Тогава имаме

$$F = F_1 - F_2 = (\Delta p + 2\rho g x)S\,.$$ **[0,5 т.]**

За да определим Δp ще използваме уравнението на изотермния процес, който се извършва с въздуха в запоената част на тръбичката. От уравнението

$$p(x_0 S) = (p - \Delta p)(x_0 + x)S$$ **[1 т.]**

получаваме

$$\Delta p = \frac{p\dfrac{x}{x_0}}{1 + \dfrac{x}{x_0}} \approx p\frac{x}{x_0}, \quad \text{при } \frac{x}{x_0} << 1\,.$$ **[0,5 т.]**

Тогава имаме

$$F \approx S\left[\frac{p}{x_0} + 2\rho g\right]x = kx, \quad k = S\left[\frac{p}{x_0} + 2\rho g\right],$$ **[1 т.]**

откъдето следва

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{S[p/x_0 + 2\rho g]}} \approx 0{,}2\,\text{s}\,.$$ **[1 т.]**

Задача 3. Част А: а) Максималната скорост участва в уравнението на Айнщайн за фотоефекта. Тогава в първия случай имаме

$$h\nu_1 = A + \frac{m\text{v}_1^2}{2},$$ **[0,5 т.]**

а във втория случай –

$$h\nu_2 = A + \frac{m\text{v}_2^2}{2}.$$ **[0,5 т.]**

Тъй като $\lambda_1 < \lambda_2$, имаме $\nu_1 > \nu_2$, при което $\nu_1 / \nu_2 = \eta$ **[0,5 т.]**. От уравненията следва

$$\eta^2 = \frac{h\nu_1 - A}{h\nu_2 - A}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

От това съотношение с отчитане на равенството $\nu = c/\lambda$ **[0,5 т.]** получаваме

$$A = \frac{hc}{\lambda_2}\frac{\eta^2 - \lambda_2/\lambda_1}{\eta^2 - 1} \approx 3{,}0.10^{-19}\ \mathrm{J} \approx 1{,}9\ \mathrm{eV}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

б) От уравнението на Айнщайн следва $h\nu \geq A$ **[0,5 т.]**, откъдето получаваме

$$\lambda \leq \frac{hc}{A} \approx 663\ \mathrm{nm}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Част Б: Нека означим с R_C радиуса на Слънцето. Мощността на лъчението, излъчвано от него, се определя по закона на Стефан–Болцман и се дава с израза

$$E_0 = 4\pi R_\mathrm{C}^2 \sigma T^4. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Ако l е разстоянието между Земята и Слънцето и r е радиусът на медното кълбо, върху него ще попада лъчение с мощност

$$E_1 = \frac{\pi r^2}{4\pi l^2} 4\pi R_\mathrm{C}^2 \sigma T^4 = \frac{\pi r^2}{l^2} R_\mathrm{C}^2 \sigma T^4. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

От друга страна имаме

$$R_\mathrm{C} = \frac{1}{2} l\alpha, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

при което е изпълнено равенството

$$E_1 = \frac{\pi r^2 \alpha^2}{4} \sigma T^4. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Мощността на лъчението, което излъчва медното кълбо, е

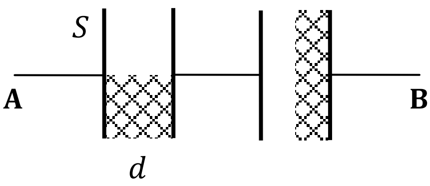
$$E_1' = 4\pi r^2 \sigma T_1^4. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

При достигане на равновесие $E_1 = E_1'$, което дава

$$T_1 = \frac{\sqrt{\alpha}}{2} T \approx 266\ \mathrm{K}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.
Тема за 11.- 12. клас

Задача 1. Кондензатори



Фиг. 1

Два плоски кондензатора с еднакви размери са свързани, както е показано на фиг. 1. Лицата на клемите на кондензаторите са $S = 0{,}5\,\mathrm{m}^2$, а разстоянията между плочите им са $d = 2\,\mathrm{mm}$. Кондензаторите са запълнени наполовина с диелектрик с диелектрична проницаемост $\varepsilon > 1$ по два различни начина, както е показано на фигурата. Може да използвате, че електричната константа има стойност $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{C}^2/(\mathrm{N.m}^2)$.

а) Кой от двата кондензатора е с по-голям капацитет – левият или десният? Обосновете отговора си. **[3 т]**

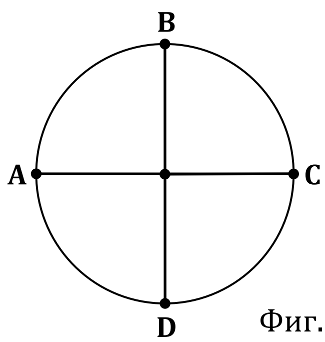
В следващите подточки използвайте, че капацитетът на единия от кондензаторите е двойно по-голям от капацитета на другия кондензатор.

б) Намерете на колко е равно ε. Определете капацитета C на системата от двата кондензатора. **[4 т]**

в) Между краищата **A** и **B** е подадено напрежение $U = 30\,\mathrm{V}$. Намерете зарядите на двата кондензатора. Каква е общата енергия W, натрупана в кондензаторите? **[2 т]**

г) Между краищата **A** и **B** е свързана бобина с индуктивност $L = 10\,\mathrm{mH}$. Намерете честотата ν на свободните електромагнитни трептения в електрическата верига. **[1 т]**

Задача 2. Проводящо колело



Фиг. 2

С помощта на проводник, чието съпротивление на единица дължина е равно на λ, е построена електрическата верига, показана на фиг. 2. Приемете, че радиусът на окръжността е r.

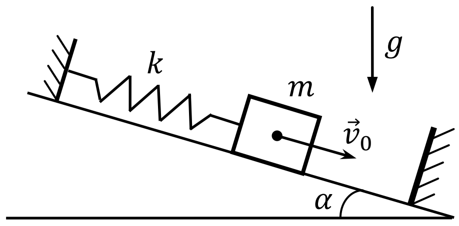
а) На колко е равно съпротивлението $R_{\mathbf{AB}}$ между точките **A** и **B**? Начертайте еквивалентната схема, от която сте определили съпротивлението. **[4 т]**

б) Ако между точките **A** и **B** е подадено напрежение $\mathcal{E}$, намерете напрежението $U_{\mathbf{CD}}$ между точките **C** и **D**. **[1 т]**

в) На колко е равно съпротивлението $R_{\mathbf{AC}}$, което ще се измери между точките **A** и **C**? Начертайте еквивалентната схема, от която сте определили съпротивлението. **[3 т]**

г) Приемете, че точките **A** и **B** са свързани накъсо. Какво съпротивление ще се измери между точките **C** и **D** в този случай? **[2 т]**

<u>Задача 3</u>. Трупче на пружина



Фиг. 3

Малко трупче с маса $m = 200\,\mathrm{g}$ е поставено върху гладка наклонена равнина с ъгъл спрямо хоризонта $\alpha = 30°$ и е закачено за пружина с коефициент на еластичност $k = 10\ \mathrm{N/m}$, както е показано на фиг. 3. В началния момент пружината не е деформирана, а трупчето има скорост с големина $v_0 = 0{,}5\ \mathrm{m/s}$, насочена успоредно на склона, както е показано на фигурата. Надолу по склона и перпендикулярно на него е закрепена неподвижно стена, която се намира в положението, където трупчето достига максимална скорост при своето движение. Като използвате, че земното ускорение е $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$:

а) Намерете големината на скоростта v_1 на трупчето в момента, когато то се удря в стената. **[3 т]**

б) Приемете, че ударът в стената е идеално еластичен. Какво е максималното разстояние от стената $l_{\max}$, на което би се отдалечило трупчето? **[2 т]**

в) Определете средната скорост на движение $\bar{v}$ на трупчето в този случай. **[2 т]**

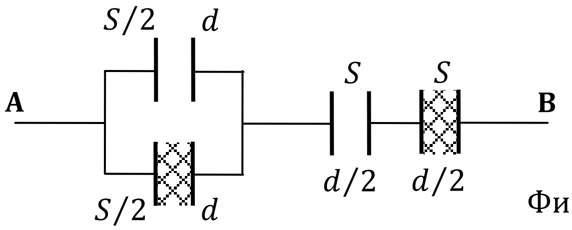
г) Реалният удар между две тела никога не е идеално еластичен, тъй като част от началната им механична енергия се трансформира в топлина. В такъв случай е прието ударът да се характеризира с така наречения *коефициент на възстановяване* $\eta = v_1'/v_1$, където v_1' е големината на скоростта на трупчето непосредствено след първия удар в стената. Дадено е, че между първия и втория удар в стената, в момента когато трупчето е максимално отдалечено от нея, пружината не е деформирана. Намерете на колко е равно η. **[3 т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика – Варна, 7 март 2015 г.

Решения на темата за 11.-12. клас

<u>Задача 1</u>. Кондензатори



Фиг. 1

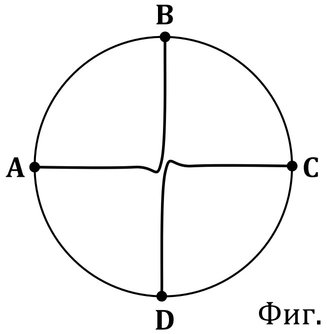
а) Еквивалентната схема на свързване е показана на фиг. 1. Левият кондензатор от условието е еквивалентен на системата от успоредно свързани кондензатори, а десният отговаря на двата последователно свързани кондензатори. Капацитетът на левия кондензатор е равен на $C_L = \frac{\varepsilon_0 S}{2d} + \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{2d} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon+1)S}{2d}$ **[0,5 т]**, а капацитетът на десния е $C_R = \frac{2\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(\varepsilon+1)}$. **[1 т]** Да разгледаме израза $C_L - C_R = \frac{\varepsilon_0 S}{2(\varepsilon+1)d}[(\varepsilon+1)^2 - 4\varepsilon] = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon-1)^2 S}{2(\varepsilon+1)d} > 0$. **[1 т]** Оттук следва, че левият кондензатор е с по-голям капацитет от десния. **[0,5 т]**

б) Дадено е, че капацитетът на единия от кондензаторите е двойно по-голям от капацитета на другия кондензатор, т.е. $C_L = 2C_R$. Получаваме, че $\frac{\varepsilon_0(\varepsilon+1)S}{2d} = \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon S}{d(\varepsilon+1)}$. **[0,5 т]** Оттук следва квадратично уравнение за ε от вида $\varepsilon^2 - 6\varepsilon + 1 = 0$. **[0,5 т]** Т.е. $\varepsilon = 3 + 2\sqrt{2} \approx 5{,}8$. **[1 т]** Така за капацитета на цялата система се получава $C = \frac{C_L C_R}{C_L + C_R} = \frac{2C_R}{3} = \frac{4\varepsilon_0 \varepsilon S}{3d(\varepsilon+1)} \approx 2{,}5$ nF. **[2 т]**

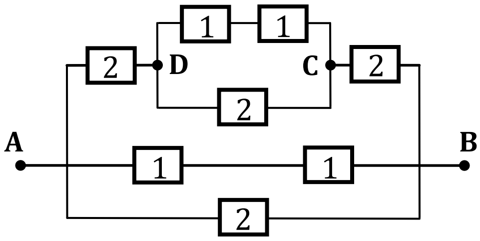
в) Двата кондензатора са свързани последователно, от което следва, че имат еднакви заряди $q = CU \approx 76$ nC. **[1 т]** Общата енергия, натрупана в кондензаторите, е $W = \frac{CU^2}{2} \approx 1{,}1$ μJ. **[1 т]**

г) Честотата на свободните електромагнитни трептения в електрическата верига се дава от формулата $\nu = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \approx 32$ kHz. **[1 т]**

<u>Задача 2</u>. Проводяща окръжност



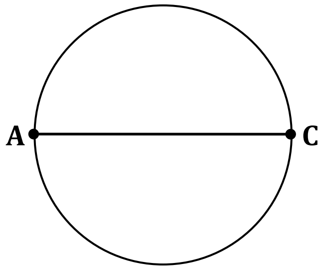
Фиг. 2а



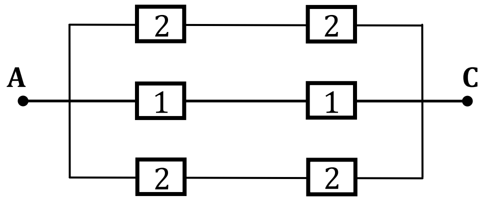
Фиг. 2б

а) В този случай конфигурацията от токове в електрическата верига е симетрична спрямо равнината, перпендикулярна на правата, свързваща точките **A** и **B**, и минаваща през центъра на правата. Това позволява да разкачим централния контакт по начина, показан на фиг. 2а. **[1 т]** При това положение имаме система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, показана на фиг. 2б. **[1 т]** Резисторите, означени с „1“, имат съпротивление $R_1 = \lambda r$, а резисторите, означени с „2“, имат съпротивление $R_2 = \pi\lambda r/2$. **[0,5 т]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **B**, е равно на $R_{\mathbf{AB}} = \frac{2R_1R_2(R_{\mathbf{CD}}+2R_2)}{2R_1R_2+2R_1(R_{\mathbf{CD}}+2R_2)+R_2(R_{\mathbf{CD}}+2R_2)}$ **[1 т]**, където $R_{\mathbf{CD}} = \frac{2R_1R_2}{2R_1+R_2}$. След опростяване се получава, че $R_{\mathbf{AB}} = \frac{2\pi(\pi+6)\lambda r}{(\pi+4)(\pi+8)}$. **[0,5 т]**

б) Напрежението между точките **C** и **D** е $U_{\mathbf{CD}} = \frac{R_{\mathbf{CD}}\mathcal{E}}{R_{\mathbf{CD}}+2R_2} = \frac{R_1\mathcal{E}}{3R_1+R_2} = \frac{2\mathcal{E}}{\pi+6}$. **[1 т]**

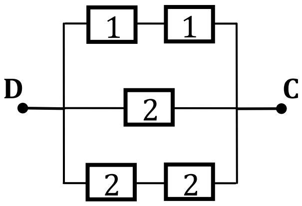


Фиг. 3а



Фиг. 3б

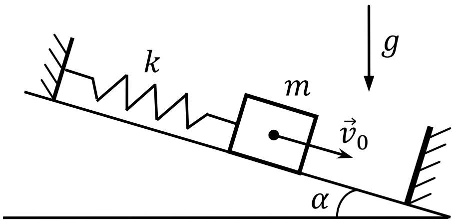
в) В този случай имаме симетрия спрямо равнината, перпендикулярна на правата, свързваща точките **A** и **C**, и минаваща през центъра на правата. **[0,5 т]** Получава се ефективната верига на фиг. 3а. **[0,5 т]** Тя отговаря на система от последователно и успоредно свързани резистори с еквивалентна схема, показана на фиг. 3б. **[0,5 т]** Отново резисторите, означени с „1“, имат съпротивление $R_1 = \lambda r$, а резисторите, означени с „2“, имат съпротивление $R_2 = \pi\lambda r/2$. Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **C**, е равно на $R_{\mathbf{AC}} = \frac{2R_1R_2}{2R_1+R_2}$. **[1 т]** След опростяване се получава, че $R_{\mathbf{AC}} = \frac{2\pi\lambda r}{\pi+4}$. **[0,5 т]**



Фиг. 4

г) Ако точките **A** и **B** са свързани накъсо, от схемата на фиг. 2б се получава схемата на фиг. 4. **[0,5 т]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **C** и **D**, е равно на $R'_{\mathbf{CD}} = \frac{2R_1R_2}{3R_1+R_2}$. **[1 т]** След опростяване се получава, че $R'_{\mathbf{CD}} = \frac{2\pi\lambda r}{\pi+6}$. **[0,5 т]**

<u>Задача 3</u>. Трупче на пружина



Фиг. 5

а) От закона за запазване на механичната енергия следва, че $\frac{mv_0^2}{2} + mgl\sin\alpha = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{kl^2}{2}$ **[1 т]**, където l е разстоянието между началното положение на трупчето и стената. Разстоянието l се намира от условието, че стената се намира там, където скоростта на трупчето е максимална, т.е. трупчето е с нулево ускорение и резултантната сила е нула, откъдето $mg\sin\alpha - kl = 0$ **[0,5 т]** и $l = mg\sin\alpha/k$. **[0,5 т]** Оттук следва, че големината на скоростта на трупчето в момента, когато то се удря в стената, е $v_1 = \sqrt{v_0^2 + mg^2\sin^2\alpha/k} \approx 0{,}85\ \mathrm{m/s}$. **[1 т]** б) При идеално еластичен удар трупчето не губи кинетична енергия. Като използваме отново закона за запазване на механичната енергия, ще получим, че $\frac{mv_0^2}{2} + mgl\sin\alpha = \frac{k(l_{\max}-l)^2}{2} + mgl_{\max}\sin\alpha$ **[1 т]**, където $l_{\max}$ е максималното разстояние от стената, на което ще се отдалечи трупчето. След решаване на полученото квадратно уравнение имаме, че $l_{\max} = \frac{mg\sin\alpha}{k}\sqrt{1+\frac{kv_0^2}{mg^2\sin^2\alpha}} \approx 12$ cm. **[1 т]**

в) За да намерим средната скорост на движение на трупчето, ни трябва времето за достигане до горно крайно положение. Използваме, че трупчето извършва хармонично трептене, като равновесното положение е при удара в стената, т.е. от стената до горно крайно положение трупчето изминава четвърт период **[0,5 т]** и съответното време е $t = \frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$. **[0,5 т]** Средната скорост е $\bar{v} = l_{\max}/t = \frac{2g\sin\alpha}{\pi}\sqrt{\frac{m}{k}+\frac{v_0^2}{g^2\sin^2\alpha}} \approx 0{,}54\ \mathrm{m/s}$. **[1 т]**

г) При нееластичния удар кинетичната енергия на трупчето намалява $1/\eta^2$ пъти **[0,5 т]** и от закона за запазване на механичната енергия получаваме връзката: $\frac{m\eta^2 v_1^2}{2} + \frac{kl^2}{2} = \frac{k(l'-l)^2}{2} + mgl'\sin\alpha$ **[1 т]**, където l' е разстоянието на максимално отдалечаване на трупчето от стената между първия и втория удар в нея, като $l' = l$ по условие, т.е. $\frac{m\eta^2}{2}(v_0^2 + mg^2\sin^2\alpha/k) + \frac{kl^2}{2} = mgl\sin\alpha$. **[0,5 т]** Оттук следва, че $\eta = \left(1+\frac{kv_0^2}{mg^2\sin^2\alpha}\right)^{-1/2} \approx 0{,}81$. **[1 т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, 7 март 2015 г.
Специална тема

<u>Задача 1.</u> Падаща стълба.

Еднородна стълба с маса m и дължина $2l$ е подпряна на хоризонтален под и вертикална стена. Триене няма. Земното ускорение е g. Първоначално стълбата е в покой и сключва начален ъгъл β с пода. След като се освобождава, тя започва да пада.

а) Каква е траекторията на движение на центъра на масата на стълбата, докато двата й края опират съответно в пода и стената? **[1 т.]**

б) Намерете зависимостта на ъгловата скорост ω на стълбата от ъгъла α, който сключва стълбата с пода по време на падането й (докато двата й края опират съответно в пода и стената). **[3 т.]**

в) Намерете зависимостта на ъгловото ускорение ε на стълбата от ъгъла α, който сключва стълбата с пода по време на падането й (докато двата й края опират съответно в пода и стената). **[1 т.]**

г) Изчислете ъгъла γ между стълбата и пода, при който горният край на стълбата ще се отлепи от стената. **[3 т.]**

д) Изчислете силата на реакция на опората R_1, действаща на стълбата от страна на пода, в момента когато горният край на стълбата ще се отлепи от стената. **[2 т.]**

Упътване: Инерчният момент на еднородна пръчка с маса m и дължина l около ос на въртене, перпендикулярна на пръчката и минаваща през центъра на масата й, е $I = \frac{1}{12}ml^2$.

<u>Задача 2.</u> Две независими подзадачи.

А. Цикъл на Джаул.

Топлинна машина работи по цикъла на Джаул (наричан също така цикъл на Брайтън), състоящ се от две изобари [при налягане p_1 и p_2 ($p_2 > p_1$)] и две адиабати. Работният газ е въздух (съставен само от нетрептящи двуатомни молекули кислород и азот).

а) Нарисувайте цикъла на p-V диаграма и въведете необходимите означения (за наляганията, обемите и температурите в четирите специални точки от цикъла). **[0.5 т.]**

б) Изразете коефициента на полезно действие η на тази топлинна машина чрез p_1, p_2 и показателя на адиабатата $\gamma = \frac{C_p}{C_V}$, където C_p и C_V са съответно топлинните капацитети на газа при постоянно налягане и постоянен обем. **[4 т.]**

в) Изчислете стойността на η при $\frac{p_2}{P_1} = 15$. **[0.5 т.]**

Б. Атмосферно налягане в шахта.

Хипотетична еднородна твърда планета има радиус r_0. Ускорението на свободно падане на повърхността й е g_0. Тя има атмосфера, съставена от молекули на идеален газ с молекулна маса μ. Атмосферното налягане на повърхността на планетата е p_0. Планетата и атмосферата имат температура T. В планетата е изкопана вертикална шахта до нейния център.

а) Получете формула за ускорението на свободно падане $g(r)$ в шахтата на разстояние r от центъра на планетата ($r < r_0$). **[0.5 т.]**

б) Получете формула за атмосферното налягане $p(r)$ в шахтата на разстояние r от центъра на планетата ($r < r_0$). **[4 т.]**

в) Изчислете атмосферното налягане в шахтата на дълбочина h = 10 km от повърхността на планетата и в нейния център ($h = r_0$) при следните стойности на величините: r_0 = 6400 km, g_0 = 9,8 m/s^2, μ = 29 g/mol, p_0 = 1,0.10^5 Pa, T = 300 K. Универсалната газова константа е R = 8,3 J/mol.K . **[0.5 т.]**

<u>Задача 3.</u> Две независими подзадачи.

А. Плазмена честота.

В среди, съдържащи свободни електрони (например газова плазма, метали), се наблюдават свободни трептения на тези електрони при честота ν_{pl}, наречена електронна плазмена честота. Тя е важна характеристика на такива среди, защото те напълно отразяват електромагнитните вълни с честота $\nu < \nu_{\text{pl}}$ и са прозрачни за (могат да се разпространяват в тях) електромагнитни вълни с честота $\nu > \nu_{\text{pl}}$.

а) Разгледайте следния модел: електронеутрален слой със сечение квадрат с ръб L и дебелина l ($l << L$) е запълнен с равномерно разпределени неподвижни положителни заряди и свободни електрони с концентрация n. Зарядът на електрона е e, а масата му е m_e. Намерете плазмената честота ν_{pl} като честотата на хармонични трептения на облакът-слой от свободни електрони, отклонен леко в посока на размера l спрямо неподвижния положително зареден слой. **[3 т.]**

б) Изчислете критичната дължина на вълната $\lambda_{\text{кр}}$, за която електромагнитни вълни с дължина на вълната $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ се отразяват от йоносферата на Земята (с такива вълни са се осъществили първите междуконтинентални радиовръзки). Максималната концентрация на свободни електрони в йоносферата е n = 10^6 cm^{-3}. Зарядът на електрона е e = $1{,}60.10^{-19}$ C, а масата му е $m_e = 9{,}11.10^{-31}$ kg. Диелектричната проницаемост на вакуума е $\varepsilon_0 = 8{,}85.10^{-12}$ F/m. Скоростта на светлината във вакуум е c = $3{,}00.10^{8}$ m/s. **[1 т.]**

в) Изчислете минималната енергия E_{min} (в eV) на фотони, за които металът алуминий е прозрачен. Плътността на алуминия е $\rho = 2{,}70.10^{3}$ kg/m^3, а атомната му маса е A = 27,0. Приемете, че йоните алуминий в кристалната решетка имат заряд $q_{\text{Al}} = +3e$. Константата на Планк е h = $6{,}63.10^{-34}$ J.s, а единицата за атомна маса е u = $1{,}66.10^{-27}$ kg. **[1 т.]**

Б. Нютонови пръстени.

а) Плоскоизпъкнала стъклена сферична леща (с радиус на кривината на сферичната повърхност R = 20 m) е допряна с изпъкналата си стена до плоскопаралелна стъклена пластинка (плоската стена на лещата е успоредна на пластинката). Показателят на пречупване на стъклото е $n_{\text{ст}}$ = 1,500, а на въздуха $n_{\text{в}}$ = 1,000. Диаметърът на лещата е D = 10,0 cm. Лещата е осветена с успореден сноп квазимонохроматична светлина, падащ вертикално, перпендикулярно на плоската ѝ стена. Източникът на светлина е газоразрядна лампа, чийто стъклен балон е пълен с натриеви пари при ниско налягане. Може да се приеме, че спектърът на излъчената от лампата светлина съдържа две еднакви по интензивност и много близки по дължина на вълната спектрални линии с дължини на вълната съответно $\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}$ и $\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}$ ($\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$). В обратно (вертикално) отразената светлина се наблюдават концентрични светли и тъмни пръстени (Нютонови пръстени), резултат от двулъчевата интерференция на отразените от долната стена на лещата и от горната стена на пластинката лъчи. Получете формула за радиуса r_k на k-тия светъл пръстен. **[2 т.]**

б) С помощта на прецизен механизъм лещата започва да се премества бавно вертикално, отдалечавайки се от лещата. Наблюдава се „придвижване“ на Нютоновите пръстени към центъра на лещата и „изчезването“ им там. Измерено е, че „изчезват“ N = 300 светли пръстена при преместването на лещата на разстояние d = 88,4 μm. Изчислете $\lambda_{\text{ср}}$. **[1 т.]**

в) Също така се забелязва, че при отдалечаването на лещата контрастът на интерференчната картина първоначално намалява, после отново се усилва, отново намалява, отново се усилва и т.н. Измерено е, че преместването на лещата между две съседни положения с минимален контраст е L = 289,4 μm. Изчислете $\Delta\lambda$. **[2 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика, 7 март 2015 г.
Решения на задачите от Специалната тема

<u>Задача 1.</u> Падаща стълба.

а) Центърът на масата на стълбата ще се намира на разстояние l от точката, където се пресичат пода и стената (свойство на медианата към хипотенузата в правоъгълен триъгълник). **[0.5 т.]** Следователно, докато двата края на стълбата опират съответно в пода и стената, траекторията на движение на центъра на масата й ще бъде окръжност с радиус l. **[0.5 т.]**

б) Тъй като няма триене, механичната енергия на стълбата се запазва. **[0.5 т.]** Отчитайки промяната на потенциалната енергия, кинетичната енергия на въртеливото движение на стълбата и на постъпателното движение на центъра С на масата й, се получава: $mgl\sin\beta = mgl\sin\alpha + \frac{1}{2}\frac{1}{12}m(2l)^2\omega^2 + \frac{1}{2}mv_C{}^2$. **[1 т.]** Тъй като центърът на масата на стълбата се движи по окръжност, $v_C = l\omega$. **[0.5 т.]** Тогава $\omega = \sqrt{\frac{3g}{2l}(\sin\beta - \sin\alpha)}$. (1.1) **[1 т.]**

в) Пренаписваме (1.1) във вида $g\sin\beta = g\sin\alpha + \frac{2}{3}l\omega^2$. Диференцирайки по времето, се получава $0 = g\cos\alpha\,\omega + \frac{2}{3}l2\omega\varepsilon$, **[0.5 т.]** откъдето $\varepsilon = -\frac{3g}{4l}\cos\alpha$. (1.2) **[0.5 т.]**

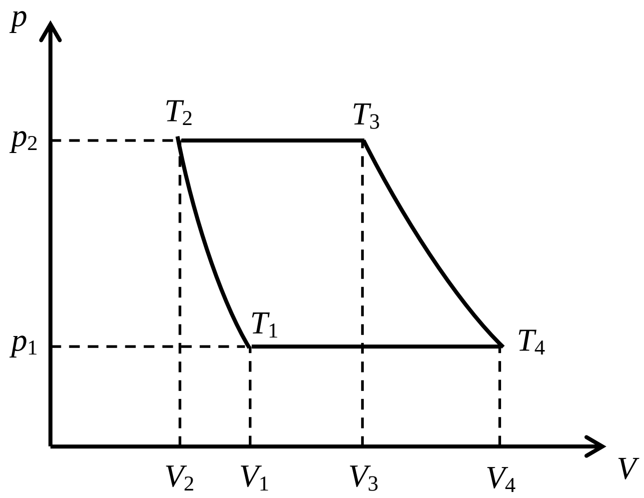
г) На стълбата действат три сили – две вертикални (силата на тежестта mg и реакцията на опората R_1 от пода) и една хоризонтална (реакцията на опората R_2 от стената). **[0.25 т.]** Следователно $R_2 = ma_x$, където a_x е хоризонталната компонента на ускорението на центъра на масата на стълбата. От друга страна центростремителното ускорение на центъра на масата при движението му по окръжността е $a_n = l\omega^2$, (1.3) **[0.25 т.]** тангенциалното ускорение на центъра на масата при движението му по окръжността е $a_t = l|\varepsilon|$ (1.4). **[0.25 т.]** Тогава $a_x = a_t\sin\alpha - a_n\cos\alpha$. **[0.25 т.]** В момента на отлепването на горния край на стълбата от стената $R_2 = 0$ и $\alpha = \gamma$. Следователно $0 = l|\varepsilon|\sin\gamma - l\omega^2\cos\gamma$. **[1 т.]** Замествайки с (1.1) и (1.2), след преобразования $\sin\gamma = \frac{2}{3}\sin\beta$. (1.5) **[1 т.]**

д) В момента на отлепването на горния край на стълбата от стената $R_1 - mg = ma_y$, **[0.25 т.]** където $a_y = -a_t\cos\gamma - a_n\sin\gamma$. **[0.25 т.]** След заместване на ускоренията от (1.3) и (1.4) се получава $R_1 = mg - ma_t\cos\gamma - ma_n\sin\gamma =$ **[0.25 т.]** $= m\left[g - l\frac{3g}{4l}(\cos\gamma)^2 - l\frac{3g}{2l}(\sin\beta - \sin\gamma)\sin\gamma\right]$. **[0.25 т.]** Използвайки (1.5), се получава $R_1 = \frac{mg}{4}$. **[1 т.]**

<u>Задача 2.</u> Две независими подзадачи.
А. Цикъл на Джаул.

а) Цикълът на p-V диаграма изглежда така (виж фигурата) **[0.5 т.]**

б) Коефициентът на полезно действие η на тази топлинна машина е $\eta = A/Q$, **[0.25 т.]** където A е извършената механична работа от топлинната машина за един цикъл, а Q е полученото количество топлина за него. Работата A е сума на работите, извършени по време на четирите процеса: $A = A_{12} + A_{23} + A_{34} + A_{41}$. За двата изобарни процеса



$A_{23} = p_2(V_3 - V_2)$, $A_{41} = p_1(V_1 - V_4)$. **[0.25 т.]** За двата адиабатни процеса от първия принцип на термодинамиката следва, че $A_{34} = -\Delta U_{34} = -C_V(T_4 - T_3)$, $A_{12} = -\Delta U_{12} = -C_V(T_2 - T_1)$. **[0.25 т.]** Нека предположим, че работният газ е един мол (η не зависи от количеството вещество на работния газ). Тогава използвайки уравнението на идеалния газ, получаваме $A_{23} = R(T_3 - T_2)$, $A_{41} = R(T_1 - T_4)$. **[0.25 т.]** Така за работата A се получава $A = -C_V(T_2 - T_1) + R(T_3 - T_2) - C_V(T_4 - T_3) + R(T_1 - T_4) =$
$= (C_V + R)(T_1 - T_2 + T_3 - T_4) = C_p(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)$. **[0.5 т.]**
Полученото количество топлина за един цикъл $Q = Q_{23} = \Delta U_{23} + A_{23} = C_p(T_3 - T_2)$. **[0.5 т.]** Следователно $\eta = \frac{C_p(T_1 - T_2 + T_3 - T_4)}{C_p(T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$. **[0.25 т.]** Използвайки закона за адиабатния процес $pV^\gamma = const.$ и преобразувайки го до $Tp^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = const.$ **[0.25 т.]**, за двата адиабатни процеса получаваме съответно $T_1 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_2 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, $T_4 p_1^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_3 p_2^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$, откъдето следва, че $\frac{T_4}{T_1} = \frac{T_3}{T_2}$. **[0.5 т.]** След заместване, $\eta = 1 - \frac{T_4\left(1 - \frac{T_1}{T_4}\right)}{T_3\left(1 - \frac{T_2}{T_3}\right)} = 1 - \frac{T_4}{T_3} = 1 - \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = 1 - \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$. **[1 т.]**

в) Двуатомните нетрептящи молекули имат $i = 5$ степени на свобода и показателят на адиабатата е $\gamma = \frac{5+2}{5} = 1{,}4$. **[0.25 т.]** Така за коефициента на полезно действие се получава $\eta = 1 - 15^{\frac{1-1.4}{1.4}} \approx 0{,}54$. **[0.25 т.]**

Б. Атмосферно налягане в шахта.

а) Ускорението на свободно падане $g(r)$ в шахтата на разстояние r от центъра на планетата ($r < r_0$) може да се намери от закона за всеобщото привличане, приравнявайки силата на тежестта, която всъщност е гравитационна сила. Отчитайки факта, че само масата, намираща се на разстояние r от центъра на планетата, по-малко от r_0, привлича малко тяло с маса m, поставено там (резултантната сила на привличане от „външния“ слой от планетата е нула): $mg(r) = \frac{GM(r)m}{r^2} = \frac{G\rho 4\pi r^3 m}{3r^2}$, откъдето $g(r) = \frac{G4\pi\rho r}{3}$ **[0.25 т.]**. Съответно за повърхността на планетата $g_0 = g(r_0) = \frac{G4\pi\rho r_0}{3}$. Разделяйки двете равенства, се получава $g(r) = g_0 \frac{r}{r_0}$. (2.1) **[0.25 т.]**

б) Разглеждаме тънък слой газ с дебелина dr и площ S на разстояние r от центъра на планетата. Нека налягането на газа там е $p(r)$, а плътността му е $\rho(r)$. Тъй като този слой газ е в равновесие, действащите му сили трябва да се уравновесяват: $\rho(r)Sdrg(r) = -dpS$. Или $dp = -\rho(r)g(r)dr$. (2.2) **[0.5 т.]** Използвайки (2.1) и изразявайки $\rho(r)$ от уравнението на идеалния газ $\rho(r) = \frac{p(r)\mu}{RT}$, (2.2) се преобразува до $dp = -\frac{p(r)\mu}{RT} g_0 \frac{r}{r_0} dr$, **[0.5 т.]** откъдето $\frac{dp}{p(r)} = -\frac{\mu g_0}{RTr_0} r dr$. Интегрирайки двете страни, $\ln p(r) = -\frac{\mu g_0}{2RTr_0} r^2 + C$. **[1 т.]** За повърхността същото равенство е $\ln p(r_0) = -\frac{\mu g_0}{2RTr_0} {r_0}^2 + C$. **[1 т.]** Изваждайки двете равенства и антилогаритмувайки, се получава $p(r) = p_0 e^{-\frac{\mu g_0}{2RTr_0}(r^2 - r_0^2)} = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RTr_0}({r_0}^2 - r^2)}$. **[1 т.]**

в) Използвайки дадените стойности, атмосферното налягане в шахтата на дълбочина h = 10 km от повърхността на планетата е $p(r) = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RTr_0}({r_0}^2 - r^2)} = p_0 e^{\frac{\mu g_0}{2RTr_0}(r_0 - r)(r_0 + r)} \approx p_0 e^{\frac{\mu g_0 h}{RT}} \approx 3{,}13 p_0 \approx 3{,}13.10^5$ Pa. **[0.25 т.]** За атмосферното налягане в центъра на планетата се получава $p(r) = p_0 e^{\frac{\mu g_0 r_0}{2RT}} \approx$ $4{,}2.10^{158} p_0$!!! ☺ **[0.25 т.]** Последният резултат естествено няма физически смисъл (следствие от предположението за идеалност на газа).

<u>Задача 3.</u> Две независими подзадачи.

А. Плазмена честота.

а) Нека облакът-слой свободни електрони е отклонен спрямо неподвижния положително зареден слой на разстояние x в посока на размера l. Тогава на двете срещуположни квадратни стени на слоя се образуват положително и отрицателно заредени слоеве с дебелина x, докато останала му част остава електронеутрална. Следователно този слой ще се държи като зареден кондензатор с капацитет $C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} = \frac{\varepsilon_0 L^2}{l}$ **[0.5 т.]** и заряд $Q_{\text{пл}} = nV_x e = nL^2 xe$. **[0.5 т.]** Напрежението между „плочите“ му ще бъде $U = \frac{Q_{\text{пл}}}{C} = \frac{nlxe}{\varepsilon_0}$, а интензитетът на електричното поле в „кондензатора“ е $E = \frac{U}{l} = \frac{nxe}{\varepsilon_0}$. **[0.5 т.]** Квазиеластичната сила, която действа на подвижните електрони от „вътрешността“ на кондензатора, е $F = Q_{\text{вътр}} E = nL^2 le \frac{nxe}{\varepsilon_0} = \frac{n^2 L^2 lxe^2}{\varepsilon_0}$. **[0.5 т.]** От втория закон на Нютон, следва $F = ma$; $\frac{n^2 L^2 lxe^2}{\varepsilon_0} = -nL^2 l m_e \ddot{x}$, откъдето $\ddot{x} + \frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0} x = 0$. **[0.5 т.]** Това уравнение описва хармонично трептене с честота $\nu_{\text{pl}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{ne^2}{m_e \varepsilon_0}}$. **[0.5 т.]**

б) Критичната дължина на вълната $\lambda_{\text{кр}}$, за която електромагнитни вълни с дължина на вълната $\lambda > \lambda_{\text{кр}}$ се отразяват от йоносферата на Земята, е $\lambda_{\text{кр}} = \frac{c}{\nu_{\text{pl}}} = 2\pi c \sqrt{\frac{m_e \varepsilon_0}{ne^2}} = \frac{2\pi c}{e}\sqrt{\frac{m_e \varepsilon_0}{n}} = \frac{2\pi.3{,}00.10^8 \text{m/s}}{1{,}60.10^{-19}\text{C}} \sqrt{\frac{9{,}11.10^{-31}\text{kg}.8{,}85.10^{-12}\text{F/m}}{10^{12}\text{m}^{-3}}} \approx 33{,}5$ m. **[1 т.]**

в) Минималната енергия $E_{\min}$ (в eV) на фотони, за които металът алуминий е прозрачен, е $E_{\min} = h\nu_{\text{pl}} = h\frac{e}{2\pi}\sqrt{\frac{n}{m_e \varepsilon_0}} = \frac{he}{2\pi}\sqrt{\frac{3\rho}{m_e \varepsilon_0 A u}} = \frac{6{,}63.10^{-34}\text{J.s}1{,}60.10^{-19}\text{C}}{2\pi} \sqrt{\frac{3.2{,}70.10^3 \text{kg}/m^3}{9{,}11.10^{-31}\text{kg}.8{,}85.10^{-12}\frac{\text{F}}{\text{m}}.27{,}0.1{,}66.10^{-27}\text{ kg}}} \approx 15{,}8$ eV. **[1 т.]**

Б. Нютонови пръстени.

а) Нека на разстояние r от центъра на лещата въздушната междина между лещата и пластинката е h. От Питагоровата теорема $R^2 = (R-h)^2 + r^2$, откъдето при $R \gg r$ следва, че и $r \gg h$ и тогава $r = \sqrt{2Rh}$. **[0.5 т.]** Там разликата в оптичните ходове на двата лъча е $\Delta = 2n_{\text{в}}h + \lambda/2$ **[0.5 т.]** (последното събираемо се дължи на факта, че единият лъч се отразява от оптично по-плътна среда, а другият – от оптично по-рядка среда). k-тият светъл пръстен ще се наблюдава при радиус r_{k}, за който $\Delta = k\lambda$. **[0.5 т.]** Тогава $h_k = \frac{1}{n_{\text{в}}}\left(\frac{\Delta}{2} - \frac{\lambda}{4}\right)$ и $r_k = \sqrt{\left(k - \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda R}{n_{\text{в}}}}$. **[0.5 т.]**

б) При преместване на призмата на разстояние d разликата в оптичните пътища ще се увеличи с $2n_{\text{в}}d$. Когато „изчезват“ N светли пръстена, също така и се преместват N светли пръстена. Затова, ако на едно място се е наблюдавал m-тия максимум, след преместването на лещата на същото място ще се наблюдава m + N-тия максимум. Затова $2n_{\text{в}}d = N\lambda_{\text{ср}}$, откъдето $\lambda_{\text{ср}} = \frac{2n_{\text{в}}d}{N} =$ **[0.5 т.]** $\frac{2.88{,}4\ \mu\text{m}}{300} = 589{,}3$ nm. **[0.5 т.]**

в) Тъй като оптичната система се осветява с две монохроматични светлини, всъщност се наблюдават две интерференчни картини с практически еднакъв (неразличим) цвят. Контрастът на резултантната интерференчна картина зависи от това колко са отместени максимумите на едната картина спрямо тези на другата. Тъй като при двулъчева интерференция интензитетът на интерференчната картина се променя с координатата (в случая радиуса) приблизително като синусоида, при две отместени интерференчни картини, когато минимумите на едната съвпадат с максимумите на другата, резултантната интензивност ще е на практика константа, т.е. ще се наблюдава силно отслабване на контраста на резултантната интерференчна картина. **[0.5 т.]** При движение на лещата нагоре, по-бързо ще се движат и „изчезват“ максимумите на картината, дължаща се на светлината с по-малката дължина на вълната. Нека на някакво място (където въздушната междина е h) първоначално се наблюдава k_1-ти минимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}$ и k_2-ти максимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}$ (ситуация на минимален контраст). От условието за максимум и минимум следва, че $2n_{\text{в}}h + \frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \left(k_1 + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.1) и $2n_{\text{в}}h + \frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = k_2\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.2). След преместване на лещата на разстояние L, на същото място ще се наблюдават κ_1+m+1-ти минимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}$ и κ_2+m-ти максимум на светлината с дължина на вълната $\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}$ (отново ситуация на минимален контраст). Тогава $2n_{\text{в}}(h+L) + \frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = \left(k_1 + m + 1 + \frac{1}{2}\right)\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.3) и $2n_{\text{в}}(h+L) + \frac{1}{2}\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = (k_2 + m)\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.4). **[0.5 т.]** Изваждайки (3.2) от (3.4) се получава $2n_{\text{в}}L = m\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.5). Изваждайки (3.3) от (3.1) се получава $2n_{\text{в}}L = (m+1)\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.6). Сравнявайки десните страни на (3.5) и (3.6) се получава $m\left(\lambda_{\text{ср}} + \frac{\Delta\lambda}{2}\right) = (m+1)\left(\lambda_{\text{ср}} - \frac{\Delta\lambda}{2}\right)$ (3.7). Използвайки (3.7) и (3.5), както и че $\Delta\lambda \ll \lambda_{\text{ср}}$ (откъдето следва, че и $m \gg 1$), се получава $\Delta\lambda \approx \frac{{\lambda_{\text{ср}}}^2}{2n_{\text{в}}L}$. **[0.5 т.]** Използвайки дадената стойност за L и получената стойност за $\lambda_{\text{ср}}$, изчислената стойност за $\Delta\lambda$ е $\Delta\lambda \approx 0{,}60$ nm. **[0.5 т.]**