

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

29.05.2017 г. - Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за
отговори!

Задача 1. Кое от посочените числа НЕ е рационално?

- А) $\frac{22}{7}$ Б) $\sqrt{8}$ В) $\sqrt[3]{\frac{27}{8}}$ Г) 2017^2

Задача 2. Стойността на израза $\frac{a^3 \cdot (-a^2)^4 \cdot a^{-10}}{(-a)^5}$ при $a = \sqrt{5}$ е равна на:

- А) -25 Б) $-\frac{1}{25}$ В) $\frac{1}{25}$ Г) 25

Задача 3. Решение на уравнението $2 - \sqrt{3x-1} = 5$ е:

- А) \emptyset Б) $\frac{10}{3}$ В) $\frac{1}{3}$ Г) -1

Задача 4. Стойността на израза $\log_5(5\sqrt[3]{5})$ е:

- А) $\frac{4}{3}$ Б) $\frac{5}{3}$ В) $1 + \sqrt[3]{5}$ Г) $\sqrt[3]{5}$

Задача 5. Двойката числа $(-1; 1)$ е решение на системата:

- А) $\begin{cases} (x+1)y = 1 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ Б) $\begin{cases} (x+1)y = 0 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ В) $\begin{cases} (x+1)y = 1 \\ x^2 - y^2 = 2 \end{cases}$ Г) $\begin{cases} (x+1)y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$

Задача 6. Кое от уравненията има два положителни реални корена?

А) $-3x^2 + 5x - 1 = 0$ Б) $-3x^2 + 5x + 1 = 0$ В) $3x^2 + 5x - 1 = 0$ Г) $3x^2 + 5x + 1 = 0$

Задача 7. Пресметнете стойността на израза $A = \frac{\sin^2(90^\circ - \alpha)}{\cos(180^\circ + \alpha)}$ за $\alpha = 390^\circ$.

А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ Б) $-\frac{1}{2}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $\frac{\sqrt{3}}{2}$

Задача 8. Страните на $\triangle ABC$ са $AB = 12 \text{ cm}$, $AC = 10 \text{ cm}$ и $BC = 5 \text{ cm}$. Намерете дължината на ъглополовящата $CL (L \in AB)$ на триъгълника.

А) $3\sqrt{2} \text{ cm}$ Б) $\sqrt{28} \text{ cm}$ В) 18 cm Г) $\sqrt{82} \text{ cm}$

Задача 9. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle A = 30^\circ$, $\sphericalangle B = 135^\circ$ и $AC = 12 \text{ cm}$. Ако CH е височината от C към AB ($H \in AB$), то дължината на BH е:

А) $6\sqrt{6} \text{ cm}$ Б) $6\sqrt{2} \text{ cm}$ В) 6 cm Г) 4 cm

Задача 10. Най-малката стойност, която приема функцията $y = 5x^2 - 5x + 2$, е:

А) $\frac{23}{4}$ Б) $\frac{3}{4}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) $-\frac{3}{4}$

Задача 11. Множеството от допустимите стойности на израза $A = \sqrt{\frac{-x+1}{x+3}} + \sqrt[3]{\frac{1}{x}}$ е:

А) $x \in (0; 1]$ Б) $x \in [1; +\infty)$ В) $x \in (-3; 0) \cup (0; 1]$ Г) $x \in (-3; 1]$

Задача 12. Коя от зададените с формула за общия n -и член числова редица $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, $\forall n \in \mathbb{N}$, е строго растяща?

А) $a_n = n^2 + 2n + 1$ Б) $a_n = n^2 - 4n + 4$ В) $a_n = n^2 - 18n + 81$ Г) $a_n = n^2 - 6n + 9$

Задача 13. На колко е равна сумата на първите 20 члена на аритметичната прогресия

$\frac{1}{2}; 2; 3\frac{1}{2}; 5; \dots$?

А) 275 Б) 295 В) 570 Г) 590

Задача 14. Ако $A(1;0)$ и $B(-1;1)$ са точки в правоъгълна координатна система xOy , то $\cot \sphericalangle AOB$ е равен на:

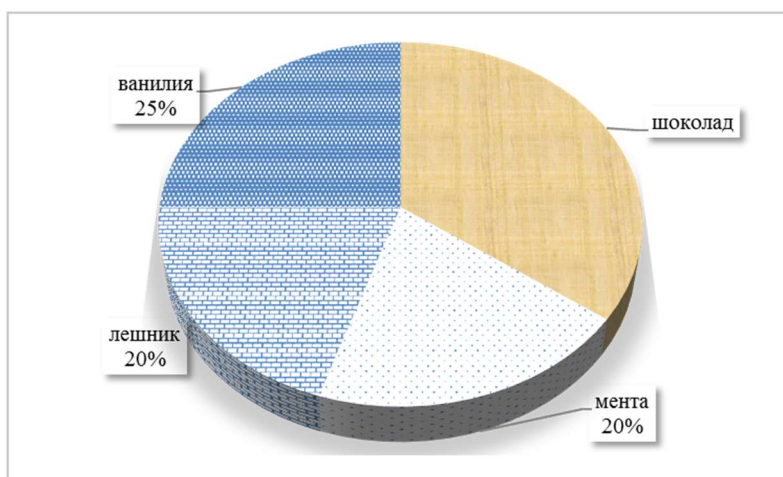
- А) -1 Б) $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ В) 0 Г) 1

Задача 15. В сладкарница предлагат 8 вида торти, 5 вида кафе и 6 вида чай. По колко начина може да се избере меню, състоящо се от торта и кафе или от торта и чай?

- А) 19 Б) 88 В) 240 Г) 1920

Задача 16. При направено проучване за предпочитанията на потребителите на 4 вида сладолед – ванилия, мента, шоколад и лешник, 60 човека са избрали мента. Като използвате данните от диаграмата, определете колко човека предпочитат шоколадов сладолед?

- А) 300 Б) 105 В) 27 Г) 21



Задача 17. За подобните $\triangle ABC$ и $\triangle A_1B_1C_1$ е дадено, че $S_{\triangle ABC} + S_{\triangle A_1B_1C_1} = 507$. Намерете

$S_{\triangle A_1B_1C_1}$, ако $AB = \sqrt{2} + 1$, $A_1B_1 = \frac{2\sqrt{2} + 2}{3}$.

- А) 156 Б) 202,8 В) 304,2 Г) 351

Задача 18. В равнобедрения $\triangle ABC$ ($AC = BC$) бедрото $AC = 26$ cm и $\sin \sphericalangle CAB = \frac{12}{13}$.

Намерете лицето на триъгълника.

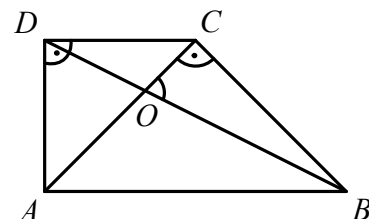
- А) 30 cm² Б) 60 cm² В) 120 cm² Г) 240 cm²

Задача 19. Дължината на най-малката медиана в триъгълник със страни $a = 2 \text{ cm}$, $b = \sqrt{5} \text{ cm}$, $c = 3 \text{ cm}$ е:

- А) 1 cm Б) $1,5 \text{ cm}$ В) $\frac{1}{2}\sqrt{21} \text{ cm}$ Г) $\sqrt{6} \text{ cm}$

Задача 20. На фигурата $\triangle ADC$ и $\triangle ACB$ са равнобедрени правоъгълни триъгълници, а O е пресечната точка на диагоналите на четириъгълника $ABCD$. Синусът на $\sphericalangle BOC$ е равен на:

- А) $\frac{1}{\sqrt{10}}$ Б) $\frac{1}{3}$ В) $\frac{2}{\sqrt{10}}$ Г) $\frac{3}{\sqrt{10}}$



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО
МАТЕМАТИКА

29.05.2017 г. - Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

*Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните
отговори!*

Задача 21. Пресметнете стойността на $\operatorname{tg} 2\alpha$, ако $\sin \alpha = \frac{3}{5}$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$.

Задача 22. При $x = 2 + \sqrt{2}$ пресметнете стойността на израза

$$\frac{x+1}{x^2-x-2} + \frac{x-3}{x^2-5x+6}, x \neq -1, x \neq 2, x \neq 3.$$

Задача 23. Мъж и жена внесли в различни банки една и съща сума за период от 2 години, като мъжът направил това при сложна лихва от 2 %, а жената – при проста лихва. Оказало се, че в края на лихвения период натрупаните суми на двамата били равни. Намерете лихвения процент, при който жената е направила своя депозит.

Задача 24. Каква е вероятността произволно число от редицата $-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5$ да е решение на неравенството $x^2 - 16 \leq 0$?

Задача 25. Квадрат със страна $5\sqrt{2}$ cm е вписан в окръжност. Определете дължината на окръжността.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

Задача 26. Решете неравенството $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} \leq 0$ и проверете кои от числата $a = 8^{\log_2 5}$,

$b = -\frac{16\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$, $c = \log_2 \frac{2 - \sqrt{12}}{1 - \sqrt{3}}$ са негови решения.

Задача 27. Решете уравнението $\left(2 \cdot \frac{x^2 - 3}{x - 1} + 1\right) \left(2 \cdot \frac{x^2 - 3}{x - 1} - 1\right) = \left(\frac{x^2 - 3}{x - 1} + 1\right)^2 - 1$.

Задача 28. В правоъгълния $\triangle ABC$ отсечките AL и BO са ъглополовящите съответно на $\sphericalangle BAC$ и $\sphericalangle ABC$ ($L \in BC$, $O \in AL$). От точката O към AL е издигнат перпендикуляр, който пресича хипотенузата AB в средата ѝ точка M . Намерете страните на $\triangle ABC$, ако $MO = \sqrt{5}$.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0, \quad a \neq 0 \quad D = b^2 - 4ac \quad x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a} \quad \text{при } D \geq 0$$
$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2) \quad \text{Формули на Виет: } x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \quad x_1 x_2 = \frac{c}{a}$$

Квадратна функция

Графиката на $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\frac{b}{2a}; -\frac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$$\sqrt[2k]{a^{2k}} = |a| \quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}} = a \quad \text{при } k \in \mathbb{N}$$
$$\frac{1}{a^m} = a^{-m}, \quad a \neq 0 \quad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} \quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a} \quad \sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad \text{при } a \geq 0, k \geq 2, n \geq 2 \text{ и } m, n, k \in \mathbb{N}$$
$$a^x = b \Leftrightarrow \log_a b = x \quad a^{\log_a b} = b \quad \log_a a^x = x \quad \text{при } a > 0, b > 0 \text{ и } a \neq 1$$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n = n \cdot (n-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$

Брой на вариациите на n елемента k -ти клас: $V_n^k = n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k -ти клас: $C_n^k = \frac{V_n^k}{P_k} = \frac{n \cdot (n-1) \dots (n-k+1)}{k \cdot (k-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}$

Вероятност за настъпване на събитието A :

$$p(A) = \frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}}, \quad 0 \leq p(A) \leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n = a_1 + (n-1)d$ $S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2} \cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$ $S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}, \quad q \neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n = K \cdot q^n = K \cdot \left(1 + \frac{P}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1c$ $b^2 = b_1c$

$h_c^2 = a_1b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin \alpha = \frac{a}{c}$ $\cos \alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg} \alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos \beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos \gamma \quad \frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta} = \frac{c}{\sin \gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^2 = \frac{1}{4}(2b^2 + 2c^2 - a^2) \quad m_b^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2c^2 - b^2) \quad m_c^2 = \frac{1}{4}(2a^2 + 2b^2 - c^2)$$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab \sin \gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$$S = pr \quad S = \frac{abc}{4R}$$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab \sin \alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1d_2 \sin \varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
$\alpha \text{ rad}$	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg} \alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ - \alpha$	$90^\circ + \alpha$	$180^\circ - \alpha$
sin	$-\sin \alpha$	$\cos \alpha$	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$
cos	$\cos \alpha$	$\sin \alpha$	$-\sin \alpha$	$-\cos \alpha$
tg	$-\operatorname{tg} \alpha$	$\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg} \alpha$	$\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{tg} \alpha$	$-\operatorname{cotg} \alpha$

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha \pm \operatorname{tg} \beta}{1 \mp \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha \pm \beta) = \frac{\operatorname{cotg} \alpha \operatorname{cotg} \beta \mp 1}{\operatorname{cotg} \beta \pm \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha = 2 \cos^2 \alpha - 1 = 1 - 2 \sin^2 \alpha$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} 2\alpha = \frac{\operatorname{cotg}^2 \alpha - 1}{2 \operatorname{cotg} \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha)$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha)$$

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$1 - \cos \alpha = 2 \sin^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2}$$

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta))$$

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

29.05.2017 г. - Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	Б	2
3	А	2
4	А	2
5	Г	2
6	А	2
7	А	2
8	А	2
9	В	2
10	Б	2
11	В	3
12	А	3
13	Б	3
14	А	3
15	Б	3
16	Б	3
17	А	3
18	Г	3
19	Б	3
20	Г	3
21	$\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{24}{7}$	4
22	$\sqrt{2}$	4
23	2,02%.	4
24	$\frac{9}{11}$	4
25	$10\pi = 31,4 = \frac{220}{7}$	4
26		10
27		10
28		10

Задача 26

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

За определяне на $a = 8^{\log_2 5} = (2^3)^{\log_2 5} = 125$	1 точка
За определяне на $b = -\frac{16\sqrt{7}}{\sqrt{28}} = -8$	1 точка
За определяне на $c = \log_2 \frac{2-\sqrt{12}}{1-\sqrt{3}} = \log_2 \frac{2(1-\sqrt{3})}{1-\sqrt{3}} = \log_2 2 = 1$	1 точка
За решаване на неравенството $\frac{x^4 - 2x^2 - 8}{x^2 + 2x + 1} \leq 0, x \neq -1 \Leftrightarrow$ $\frac{(x-2)(x+2)(x^2+2)}{(x+1)^2} \leq 0, x \neq -1$ $\Leftrightarrow (x-2)(x+2)\underbrace{(x^2+2)}_{+}(x+1)^2 \leq 0, x \neq -1 \Leftrightarrow x \in [-2; -1) \cup (-1; 2]$	4 точки
За проверка на числото $-8 \notin [-2; -1) \cup (-1; 2]$, числото $125 \notin [-2; -1) \cup (-1; 2]$, а числото $1 \in [-2; -1) \cup (-1; 2]$.	3 точки

Задача 27

Решение: Полагаме $\frac{x^2-3}{x-1} = u$ и получаваме уравнението

$$(2u+1)(2u-1) = (u+1)^2 - 1 \Leftrightarrow 4u^2 - 1 = u^2 + 2u + 1 - 1 \Leftrightarrow 3u^2 - 2u - 1 = 0 \Leftrightarrow u_1 = 1, u_2 = -\frac{1}{3}.$$

При DM : $x \neq 1$ решаваме $\frac{x^2-3}{x-1} = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1, x_2 = 2$ ($x_1, x_2 \in DM$) и

$$\frac{x^2-3}{x-1} = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow 3x^2 + x - 10 = 0 \Leftrightarrow x_3 = -2, x_4 = \frac{5}{3} \quad (x_3, x_4 \in DM).$$

Следователно уравнението има 4 решения: $x_1 = -1, x_{2,3} = \pm 2, x_4 = \frac{5}{3}$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Полагане на $\frac{x^2-3}{x-1} = u$	1 точка
-------------------------------------	----------------

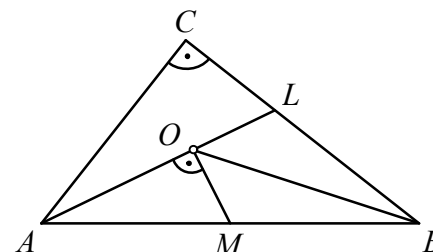
Получаване на уравнението $3u^2 - 2u - 1 = 0$	1 точка
Намиране на корените $u_1 = 1, u_2 = -\frac{1}{3}$	2 точки
Получаване на уравнението $\frac{x^2 - 3}{x - 1} = 1$	1 точка
Намиране на корените $x_1 = -1, x_2 = 2$ (1 точка) и проверка, че са от DM (1 точка)	2 точки
Получаване на уравнението $\frac{x^2 - 3}{x - 1} = -\frac{1}{3}$	1 точка
Намиране на корените $x_3 = -2, x_4 = \frac{5}{3}$ (1 точка) и проверка, че са от DM (1 точка)	2 точки

Задача 28

Решение: От $\sphericalangle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\sphericalangle ACB = 90^\circ + 45^\circ = 135^\circ$

следва, че $\sphericalangle MOB = \sphericalangle BOL = 45^\circ$

($\sphericalangle MOB = \sphericalangle AOB - \sphericalangle AOM = 135^\circ - 90^\circ$ и $\sphericalangle BOL = 180^\circ - \sphericalangle AOB = 45^\circ$ - съседни ъгли).



Тогава $\triangle BOM \cong \triangle BOL$ (BO е обща страна, $\sphericalangle MOB = \sphericalangle BOL = 45^\circ$ и $\sphericalangle MBO = \sphericalangle LBO$), $MB = BL$ и $MO = LO = \sqrt{5}$.

В $\triangle ABL$ BO е ъглополовяща и от $AO : LO = AB : BL = 2$ следва, че $AO = 2LO = 2\sqrt{5}$ и $AL = 3\sqrt{5}$.

От свойството на ъглополовящата AL в $\triangle ABC$ следва, че $AC : CL = AB : BL = 2$ и $AC = 2CL$

В $\triangle ALC$ от $AC^2 + CL^2 = AL^2 \Leftrightarrow 5CL^2 = 45 \Leftrightarrow CL^2 = 9$ намираме $CL = 3$ и $AC = 6$, а от $\triangle AOM$ получаваме $AM^2 = AO^2 + OM^2 = 20 + 5 = 25$, $AM = 5 = MB = BL$.

Следователно $AB = 10$, $BC = BL + AL = 8$ и $AC = 6$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване на $\triangle BOM \cong \triangle BOL$	1 точка
Доказване, че $MB = BL$	1 точка
Доказване, че $MO = LO = \sqrt{5}$	1 точка
Доказване, че $AO = 2LO$	1 точка
Доказване, че $AC = 2CL$	1 точка

Намиране на $CL = 3$	1 точка
Намиране на $AM = 5$	1 точка
Намиране на $AB = 10$	1 точка
Намиране на $BC = 8$	1 точка
Намиране на $AC = 6$	1 точка