<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2017 г. - Вариант 2

МОДУЛ 1

Време за работа – 90 минути

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

Задача 1. **Кое от числата принадлежи на интервала** $(-1,5;1,5)$ **?**

А) $\log_{\frac{1}{5}} 5$ **Б)** $\frac{3}{2}$ **В)** $\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}}$ **Г)** $(-32)^{\frac{1}{5}}$

Задача 2. Стойността на израза $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{3}{4}}-\sqrt{\frac{8}{9}-\frac{1}{3}}$ **е:**

А) $\frac{\sqrt{5}}{6}$ **Б)** $\frac{5}{6}$ **В)** $\sqrt{\frac{5}{6}}$ **Г)** $\frac{5\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6}$

Задача 3. Кое от числата НЕ е от допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{3x-2}}{x\left(x^2-1\right)}$ **?**

А) 1 **Б)** $\frac{2}{3}$ **В)** $\frac{5}{3}$ **Г)** $\frac{8}{3}$

Задача 4. Множеството от решенията на уравнението $\frac{x+7}{3-6x}.\sqrt{2x-1}=0$ **е:**

А) $\left\{-7;\frac{1}{2}\right\}$ **Б)** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$ **В)** $\{-7\}$ **Г)** $\varnothing$

Задача 5. Стойността на израза $\left(-\log_2 \sqrt{2}\right)^2$ **е:**

А) $-\frac{1}{2}$ **Б)** $\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 1

Задача 6. Решенията на неравенството $4x^2 - 12x > -9$ **са:**

А) $x \in (-\infty; +\infty)$ **Б)** $x \in (-\infty; 1,5) \cup (1,5; +\infty)$ **В)** $x \in (1,5; +\infty)$ **Г)** $x \in (-\infty; 1,5)$

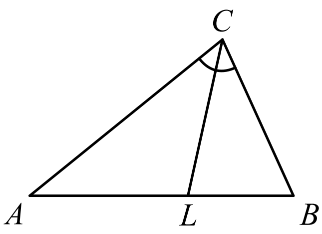
Задача 7. Кое от дадените уравнения има два реални корена с различни знаци?

А) $3x^2 + x - 7 = 0$ **Б)** $-2x^2 - 3x - 4 = 0$ **В)** $x^2 - 10x + 25 = 0$ **Г)** $3x^2 + 16x + 21 = 0$

Задача 8. Стойността на израза $\frac{\cos 780° + \operatorname{tg} 405°}{\sin(-930°)}$ **е равна на:**

А) 3 **Б)** $\frac{3+\sqrt{3}}{3}$ **В)** $\frac{3}{4}$ **Г)** -3

Задача 9. Намерете дължината на страната BC **на** $\triangle ABC$, **ако** $CL\,(L \in AB)$ **е ъглополовящата на** $\sphericalangle ACB$, $AL = 5\ cm$, $AB = 9\,cm$ **и** $AC = 15\,cm$.



А) $\frac{4}{3}cm$ **Б)** $3cm$ **В)** $12cm$ **Г)** $45cm$

Задача 10. В $\triangle ABC\,(\sphericalangle C = 90°)$ **е построена височината** $CH\,(H \in AB)$**. Ако** $AH = 3cm$, $BH = 9cm$**, то дължината на** AC **е:**

А) $3\sqrt{3}\,cm$ **Б)** $6cm$ **В)** $6\sqrt{3}\,cm$ **Г)** $9cm$

Задача 11. Коя от квадратните функции има най-голяма стойност 9**?**

А) $y = -2x^2 - 9$ **Б)** $y = 2x^2 + 9$ **В)** $y = 2x^2 - 9$ **Г)** $y = -2x^2 + 9$

Задача 12. Коя от посочените числови редици е зададена с равенствата $a_1=-1$, $a_n=a_{n-1}\left(a_{n-1}-1\right)$, $n\ge 2,\ n\in\mathbb{N}$**?**

А) $-1,\ 2,\ 2,\ 2,\ \ldots$ **Б)** $-1,\ 0,\ 0,\ 0,\ \ldots$ **В)** $-1,\ 2,\ -1,\ 2,\ \ldots$ **Г)** $-1,\ -2,\ 6,\ 30,\ \ldots$

Задача 13. Намерете броя на членовете на крайна аритметична прогресия, ако $a_1=13$, $a_4=1$ **и сумата на всичките ѝ членове е** 18**.**

А) 6 **Б)** 9 **В)** 12 **Г)** 24

Задача 14. Ако $A(1;1)$ **и** $B(-1;1)$ **са точки в правоъгълна координатна система** ***xOy*****, то** $\sin\sphericalangle AOB$ **е равен на:**

А) – 1 **Б)** 0 **В)** $\frac{\sqrt{2}}{2}$ **Г)** 1

Задача 15. Майка, баща и трите им деца отиват на кино, като билетите им са на един ред и са седнали един до друг. Намерете броя на начините, по които могат да седнат те, ако майката и бащата са седнали един до друг.

А) 12 **Б)** 24 **В)** 48 **Г)** 120

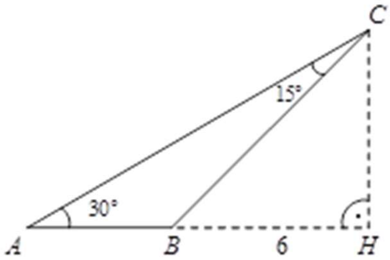
Задача 16. На диаграмата са показани годишните оценки по математика на учениците от четири класа. Средният успех по математика на всички ученици е:

А) 4,00 **Б)** 4,33 **В)** 4,43 **Г)** 4,50

Задача 17. За подобните $\triangle ABC$ **и** $\triangle A_1B_1C_1$ **е дадено, че** $AB=\sqrt{3}+1,\ A_1B_1=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{2}$ **и** $P_{\triangle ABC}+P_{\triangle A_1B_1C_1}=12,5$. **Намерете** $P_{\triangle A_1B_1C_1}$.

А) 8 **Б)** 7,5 **В)** 5 **Г)** 4,5

Задача 18. В $\triangle ABC$ $\sphericalangle A=30^\circ$, $\sphericalangle C=15^\circ$**, а проекцията на страната** BC **върху правата** AB **е равна на** 6 *cm*. **Дължината на радиуса на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност е равен на:**

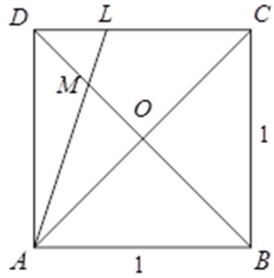


А) $12cm$ **Б)** $6\sqrt{6}\ cm$ **В)** $6\sqrt{3}\ cm$ **Г)** $6\sqrt{2}\ cm$

Задача 19. Диагоналите AC **и** BD **на трапеца** $ABCD\left(AB \parallel CD\right)$ **са ъглополовящи на ъглите при голямата основа** AB **и** $\sphericalangle ACB=90^\circ$. **Ако** $AD=4\ cm$**, намерете разстоянието между средите на диагоналите на** $ABCD$**.**

А) 2 *cm* **Б)** 4 *cm* **В)** 6 *cm* **Г)** 8 *cm*

Задача 20. Квадратът $ABCD$ **е със страна** 1 *cm*. **Диагоналите му се пресичат в точка** O**, а точката** M **е средата на** DO**. Ако** $AM \cap DC = L$**, то** $S_{\triangle ALD}$ **е равно на:**



А) $\dfrac{1}{6}cm^2$ **Б)** $\dfrac{1}{3}cm^2$ **В)** $\dfrac{1}{2}cm^2$ **Г)** $\dfrac{2}{3}cm^2$

<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2017 г. - Вариант 2

МОДУЛ 2

Време за работа – 150 минути

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори</u>!

Задача 21. Пресметнете $\log_{49} x$, **ако** $x = \left(\log_5 2^{\log_2 125}\right)^{\log_3 7}$.

Задача 22. **Пресметнете израза** $\left[\left(\frac{3}{2}\right)^{-2} + 3^{-2}\right]^{-2} . \left[\left(-\frac{3}{2}\right)^{-2} + 3.2^{-1}\right]^{2}$.

Задача 23. За аритметичната прогресия $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ **е известно, че разликата от сбора на членовете с четни номера и сбора на членовете с нечетни номера е равна на** -15. **Ако** $a_6 = 1$, **намерете сбора от членовете на прогресията.**

Задача 24. С цифрите 1, 2, 3, 5 **и** 7 **компютър генерира всички трицифрени числа с различни цифри. Определете каква е вероятността при случаен избор на едно от тези числа, то да се дели на 6.**

Задача 25. **Точките** M **и** N **лежат съответно на страните** AC **и** BC **на** $\triangle ABC$, **като** $AM = 3\ cm$, $MC = 9\ cm$, $BN = 12\ cm$ **и** $NC = 6\ cm$. **Намерете дължината на страната** AB, **ако в четириъгълника** $ABNM$ **може да се впише окръжност.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

Задача 26. Решете системата $\left| \begin{array}{l} (2x-y)(x+y)=0 \\ (x+y)(x-1)=(x-y)(y+1)+24. \end{array} \right.$**.**

Задача 27. Даден е четириъгълник $ABCD$ **със страни** $AB=BC$**,** $CD=4$**,** $AD=3$ **и ъгли** $\sphericalangle ABC=60^\circ$ **и** $\sphericalangle ADC=90^\circ$**. Намерете стойността на разликата** BD^2-AC^2**.**

Задача 28. Лицето на ромб е $24\ cm^2$**, а периметърът му е с** $6\ cm$ **по-голям от сбора на диагоналите му. Намерете страната на ромба и стойността на израза** $\dfrac{\sin\alpha-\sin\dfrac{\alpha}{2}}{1-\cos\dfrac{\alpha}{2}+\cos\alpha}$, **ако** $\sphericalangle BAD=\alpha$ **и** $\alpha<90^\circ$**.**

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО МАТЕМАТИКА

22.05.2017 г. - Вариант 2

№ на задача	Верен отговор	Брой точки
1	**А**	2
2	**А**	2
3	**А**	2
4	**Г**	3
5	**Б**	2
6	**Б**	2
7	**А**	2
8	**А**	2
9	**В**	2
10	**Б**	2
11	**Г**	2
12	**А**	3
13	**А**	3
14	**Г**	3
15	**В**	3
16	**В**	3
17	**Б**	3
18	**Г**	3
19	**А**	3
20	**А**	3
21	$\frac{1}{2}$	4
22	$\frac{7^2}{2^2}=\left(\frac{7}{2}\right)^2=\frac{49}{4}=12,25=\left(3,5\right)^2$	4
23	81	4
24	$P=\frac{4}{60}=\frac{1}{15}$	4
25	$AB=10\ cm$	4
26		10
27		10
28		10

Задача 26

Решение: $\left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\(x+y)(x-1)=(x-y)(y+1)+24\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\x^2-x+\cancel{xy}-\cancel{y}=\cancel{xy}+x-y^2-\cancel{y}+24\end{array}\right. \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}(2x-y)(x+y)=0\\x^2-2x+y^2-24=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}y=2x\\x^2-2x+y^2-24=0\end{array}\right. \cup \left|\begin{array}{l}y=-x\\x^2-2x+y^2-24=0.\end{array}\right.$$

Решаваме първата система. Заместваме $y=2x$ в уравнението $x^2-2x+y^2-24=0$ и получаваме $x^2-2x+4x^2-24=0 \Leftrightarrow 5x^2-2x-24=0 \Leftrightarrow x_1=-2,\ x_2=\frac{12}{5}$.

Тогава $y_1=2x_1=-4$, $y_2=2x_2=\frac{24}{5}$.

При решаване на втората система заместваме $y=-x$ в уравнението $x^2-2x+y^2-24=0$ и получаваме $x^2-2x+x^2-24=0 \Leftrightarrow 2x^2-2x-24=0 \Leftrightarrow x^2-x-12=0 \Leftrightarrow x_3=4,\ x_4=-3$.

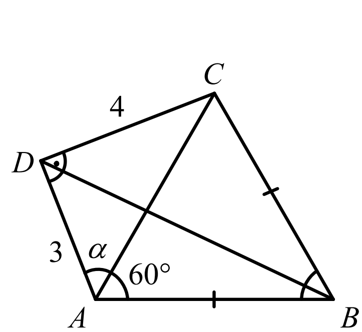
Съответните стойности на *y* са $y_3=-4$ и $y_4=3$.

Следователно системата има четири решения: $(-2;-4)$, $\left(\frac{12}{5};\frac{24}{5}\right)$, $(4;-4)$, $(-3;3)$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Направен извод, че $y=2x$	**1 точка**
Направен извод, че $y=-x$	**1 точка**
За всяка вярно решена система от двете системи	**по 4 точки**

Задача 27



Решение: Означаваме $\sphericalangle CAD=\alpha$. В правоъгълния $\triangle ACD$ от $AC^2=AD^2+CD^2=9+16=25$ намираме $AC=5$ и $\sin\alpha=\frac{CD}{AC}=\frac{4}{5}$, $\cos\alpha=\frac{AD}{AC}=\frac{3}{5}$. От $AB=BC$ и $\sphericalangle ABC=60^\circ$ следва, че $\triangle ABC$ е равностранен, $AB=5$ и $\sphericalangle BAC=60^\circ$. От косинусовата теорема в $\triangle ABD$ пресмятаме $BD^2=AB^2+AD^2-2AB.AD.\cos(\alpha+60^\circ)$

$= 25 + 9 - 2.5.3.\left(\cos\alpha.\cos 60° - \sin\alpha.\sin 60°\right) =$

$= 34 - 30\left(\frac{3}{5}.\frac{1}{2} - \frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 34 - 9 + 12\sqrt{3} = 25 + 12\sqrt{3}$.

Следователно $BD^2 - AC^2 = 25 + 12\sqrt{3} - 25 = 12\sqrt{3}$.

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

Доказване, че $\triangle ABC$ е равностранен	**1 точка**
Намиране на $AC = AB = 5$	**1 точка**
Намиране на $\sin\alpha = \frac{4}{5}$	**1 точка**
Намиране на $\cos\alpha = \frac{3}{5}$	**1 точка**
Пресмятане на $\cos\left(\alpha + 60°\right)$	**3 точки**
Пресмятане на $BD^2 = 25 + 12\sqrt{3}$	**2 точки**
Пресмятане на $BD^2 - AC^2 = 12\sqrt{3}$.	**1 точка**

Задача 28

Критерии за оценяване и точки по критериите, съпътстващи решението:

С x означаваме страната на ромба. Тогава $4x - 6 = d_1 + d_2$.	**1 точка**
От формулата за лице на ромб $S_{ABCD} = \frac{d_1 d_2}{2} = 24$.	**1 точка**
От формулата за връзката между страните и диагоналите на успоредника получаваме $d_1{}^2 + d_2{}^2 = 2\left(x^2 + x^2\right) \Leftrightarrow d_1{}^2 + d_2{}^2 = 4x^2$.	**1 точка**
$\left\lvert\begin{array}{l} 4x - 6 = d_1 + d_2 \\ \frac{d_1.d_2}{2} = 24 \\ d_1{}^2 + d_2{}^2 = 4x^2 \end{array}\right.$, $\left(d_1 + d_2\right)^2 = 4x^2 + 96 \Leftrightarrow \left(4x - 6\right)^2 = 4x^2 + 96$ $\Leftrightarrow x^2 - 4x - 5 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -1,\ x_2 = 5$	**2 точки**
От $S_{ABCD} = x^2 \sin\alpha \;\Leftrightarrow\; 24 = 25\sin\alpha \;\Rightarrow \sin\alpha = \frac{24}{25}$	**1 точка**

От $\sin\alpha=\frac{24}{25}$ и $\alpha<90^\circ$ следва, че $\cos\alpha=\frac{7}{25}$.	**1 точка**
За преобразуване на $\frac{\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}=\frac{\sin\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}{\cos\frac{\alpha}{2}\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)}=\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$ и намиране на $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{3}{4}$.	**2 точки** **1 точка**
<u>**Забележка**</u>: Намирането на стойността на израза $\frac{\sin\alpha-\sin\frac{\alpha}{2}}{1-\cos\frac{\alpha}{2}+\cos\alpha}$, независимо от начина (например намиране на $\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\cos\frac{\alpha}{2}$ и заместване) се оценява също с 3 точки.	