

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

30.08.2016 г. – Вариант 2

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Стойността на израза $\frac{\sqrt{9}+1}{\sqrt{3}-1} - \frac{\sqrt{9}-1}{\sqrt{3}+1}$ е:

- А) $\sqrt{3}+1$ Б) $\sqrt{3}+3$ В) $3\sqrt{3}+3$ Г) 4

2. Кое от числата е положително?

- А) $\sqrt{5}-5$ Б) $5^{-1}-5^0$ В) $5^{-1}+1$ Г) $\frac{1}{\sqrt{5}}-1$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{2x-3}}{(x-3)(x+2016)}$ са:

- А) $x \in (-2016; 3) \cup (3; +\infty)$ Б) $x \in \left[\frac{3}{2}; +\infty \right)$

- В) $x \in \left[\frac{3}{2}; 3 \right) \cup (3; +\infty)$ Г) $x \in (3; +\infty)$

4. Множеството от решенията на неравенството $3 \geq 2\sqrt{3}x - x^2$ е:

- А) $x \in (\sqrt{3}; +\infty)$ Б) $x \in (-\infty; \sqrt{3})$

- В) $x \in (-\infty; \sqrt{3}) \cup (\sqrt{3}; +\infty)$ Г) $x \in (-\infty; +\infty)$

5. Изразът $(a^2)^{\frac{1}{2}}(b^3)^{\frac{5}{3}}$ е тъждествено равен на:

- А) ab^5 Б) $|a|b^5$ В) $|a||b|^5$ Г) $a^{\frac{1}{4}}b^{\frac{5}{9}}$

6. Броят на различните двойки $(x; y)$, които са решения на системата $\begin{cases} x - y = 1 \\ xy = 2 \end{cases}$, е:

- А) 0 Б) 1 В) 2 Г) 3

7. Произведението от реципрочните стойности на корените на уравнението $2x^2 - 4x - 5 = 0$ е:

- А) $-\frac{5}{2}$ Б) $-\frac{2}{5}$ В) $\frac{1}{2}$ Г) 2

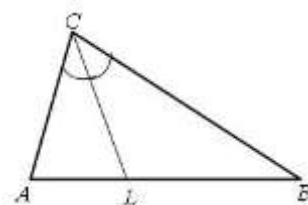
8. За кое от уравненията сборът от реалните корени е 3:

- А) $x^2 - 3x + 5 = 0$ Б) $x^2 - 3x + 4 = 0$
 В) $x^2 - 3x + 3 = 0$ Г) $x^2 - 3x + 2 = 0$

9. Отсечката CL е ъглополовяща в $\triangle ABC$. Ако

$AC = \frac{3}{4}BC$ и $BL - AL = 1$ cm, то дължината на AB е:

- А) 6 cm Б) 7 cm В) 7,5 cm Г) 8 cm



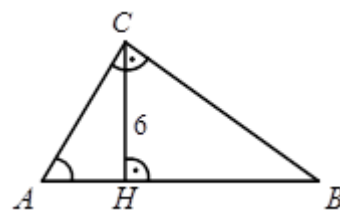
10. В $\triangle ABC$ е дадено, че $AC = \sqrt{2}$ и $AB = 1$. Дължината на медианата към страната AB е равна на $\frac{\sqrt{5}}{2}$. Дължината на страната BC е:

- А) $\frac{1}{2}$ Б) 1 В) $\frac{5}{4}$ Г) $\sqrt{2}$

11. В правоъгълния $\triangle ABC$ височината към хипотенузата AB е $CH = 6$ cm и $\operatorname{tg} \sphericalangle BAC = \frac{5}{3}$.

Дължината на HB е:

- А) $\frac{18}{5}$ cm Б) 8 cm В) 10 cm Г) 18 cm



12. Най-голямата стойност, която приема функцията $y = -\frac{1}{2}x^2 + 4x - 1$, е:

- А) 7 Б) 6,5 В) 4 Г) -5,5

13. Числовата редица, за която $a_1 = 1$ и $a_n = 2a_{n-1} + 1$ за $n \geq 2, n \in \mathbb{N}$, е:

- А) 1, 3, 9, 15, ... Б) 1, 3, 7, 15, ... В) 1, 3, 7, 22, ... Г) 1, -1, -5, -13, ...

14. Дадена е аритметична прогресия с първи член $a_1 = 1$ и разлика $d = 3$. Сумата на първите 10 члена с четни номера е:

- А) 340 Б) 330 В) 310 Г) 300

15. НЕВЯРНОТО равенство е:

А) $\operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\alpha + \frac{5\pi}{4}\right)$ Б) $\cos 65^\circ = \sin 25^\circ$

В) $\sin(2\pi - \alpha) = \sin \alpha$ Г) $\sin 57^\circ = \sin 123^\circ$

16. Броят на нечетните четирицифрени числа с различни цифри, записани само с цифрите 3, 4, 5 и 7, е:

- А) 24 Б) 18 В) 12 Г) 6

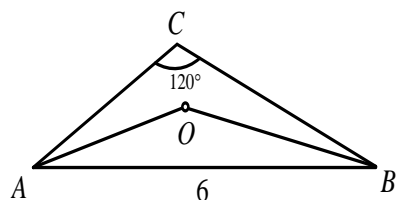
17. През последните 10 години измерената температура (в градуси) на 8 март е била $-3; -5; 4; 0; -3; 2; 2; 1; -3; 4$. Ако M е модата, P е медианата, а S е средната стойност на статистическия ред, то стойността на израза $6P + M + S$ е:

- А) $-0,1$ Б) $1,1$ В) $2,9$ Г) $6,9$

18. Точката O е център на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Ако $AB = 6$ cm и $\sphericalangle ACB = 120^\circ$, дължината на радиуса на описаната около $\triangle AOB$ окръжност е равна на:

- А) 3 cm Б) $3\sqrt{2}$ cm В) 6 cm Г) $6\sqrt{2}$ cm

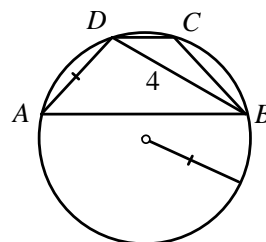


19. В $\triangle ABC$ са дадени $\sphericalangle ABC = 45^\circ$, $AB = \sqrt{6}$ cm и $AC = 2$ cm. Ако $BC > 2$ cm, то дължината ѝ е:

- А) 3 cm Б) $\sqrt{3} - 1$ cm В) $\sqrt{3} + 1$ cm Г) $\sqrt{6}$ cm

20. Трапецът $ABCD$ от чертежа е вписан в окръжност, диагоналят му BD е с дължина 4 cm, а бедрото AD е равно на радиуса на окръжността. Лицето на трапеца е:

- А) 8 cm² Б) $4\sqrt{3}$ cm² В) 4 cm² Г) $2\sqrt{3}$ cm²



Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Ако $a = \log_3 81$ и $\log_2 b = 6$, пресметнете стойността на израза $\log_4 (b)^a$.

22. Решете уравнението $\sqrt{x+7} - \sqrt{x-8} = \sqrt{3}$.

23. Четирима служители в една фирма получават заплата по 630 лв., петима получават по 810 лв., един служител получава 459 лв., а собственикът получава 4 400 лв. Колко лева е разликата между средната заплата на служителите на фирмата (без собственика) и средната заплата във фирмата?

24. Катинар е заключен с парола, която се състои от 5 различни символа, измежду цифрите 0, 1, 2 и 3 и буквите А, В, С и D. Ако знаете, че в паролата участват 3 различни букви на първо, трето и пето място, колко най-много опита трябва да направите, за да отключите катинара?

25. Намерете разстоянието от върха C до страната AB на $\triangle ABC$, ако $AC = 5$, $BC = 8$ и $\sphericalangle ACB = 60^\circ$.

Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

Задача 26. Докажете тъждеството $\frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x$

Задача 27. Три числа образуват растяща геометрична прогресия. Ако второто число увеличим с 6, новата тройка числа в същия ред образуват аритметична прогресия. Ако третият член на новата прогресия увеличим с 48, то получените числа образуват геометрична прогресия. Кои са първоначалните числа?

Задача 28. В окръжност с радиус $R = \sqrt{\frac{76}{3}}$ е вписан трапец с височина $5\sqrt{3}$ и диагонал, чиято дължина е равна на сбора на двете основи. Намерете страните на трапеца.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 30.08.2016 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с избран отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	В	2
3	В	2
4	Г	2
5	Б	2
6	В	2
7	Б	2
8	Г	2
9	Б	2
10	Б	2
11	В	3
12	А	3
13	Б	3
14	В	3
15	В	3
16	Б	3
17	А	3
18	В	3
19	В	3
20	Б	3
21	12	4
22	$x = 20$	4
23	336,10 лева	4
24	288	4

25	$\frac{20\sqrt{3}}{7}$	4
26		10
27	3, 9, 27	10
28	$AD = BC = 2\sqrt{19}, AB = 6, CD = 4$	10

Въпроси с решения

26. Решение и критерии за оценяване.

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} = \frac{2 \sin^2 \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \quad (3 \text{ точки}).$$

$$\frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} = \frac{2 \sin x \cdot \cos x}{2 \cos^2 x} = \operatorname{tg} x \quad (3 \text{ точки}).$$

$$\frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}} = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \operatorname{tg} 2x \quad (3 \text{ точки}).$$

$$\frac{1 - \cos x}{\sin x} \cdot \frac{\sin 2x}{1 + \cos 2x} \cdot \frac{\sin 3x + \sin x}{\cos 3x + \cos x} = \operatorname{tg} \frac{x}{2} \cdot \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{tg} 2x \quad (1 \text{ точка}).$$

27. Решение и критерии за оценяване

За означение на членовете на геометричната прогресия a_1, a_1q, a_1q^2 **1 точка**

За прилагане на свойството на аритметичната прогресия от членовете на геометричната прогресия $2(a_1q + 6) = a_1 + a_1q^2$ и получаване на уравнението

$$a_1 + a_1q^2 - 2a_1q = 12 \quad (2 \text{ точки})$$

За прилагане на свойството на новата геометрична прогресия $(a_1q + 6)^2 = a_1(a_1q^2 + 48)$

$$\text{и получаване на уравнението } 4a_1 - a_1q = 3 \quad (2 \text{ точки})$$

За съставяне на системата:
$$\begin{cases} a_1 + a_1q^2 - 2a_1q = 12 \\ 4a_1 - a_1q = 3 \end{cases} \quad (1 \text{ точка})$$

За решаване на системата, определяне на $q_1 = 3$ и $a_1 = 3$, получаване на търсените числа 3, 9, 27 **3 точки**

За установяване, че при $q_2 = -5$, прогресията не е растяща \Rightarrow не е решение. **1 точка**

28. Решение и критерии за оценяване.

Нека трапецът $ABCD$ с основи $AB = a$, $CD = b$ ($a > b$) е с височина $CH = 5\sqrt{3}$ и диагонал $AC = a + b$.

Трапецът е равнобедрен, тъй като е вписан в окръжност, и

$AH = \frac{a+b}{2}$, $BH = \frac{a-b}{2}$. От правоъгълния $\triangle AHC$ намираме

$\cos \sphericalangle HAC = \frac{AH}{AC} = \frac{1}{2}$ и $\sphericalangle HAC = 60^\circ$. Тогава $\sphericalangle ACH = 30^\circ$ и

$\frac{CH}{AC} = \cos 30^\circ$ и $\frac{5\sqrt{3}}{a+b} = \frac{\sqrt{3}}{2}$, т.е. $a+b=10$.

От синусовата теорема за $\triangle ABC$ пресмятаме $BC = 2R \cdot \sin 60^\circ = 2 \cdot \sqrt{\frac{76}{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$
 $= \sqrt{76} = 2\sqrt{19}$.

В правоъгълния $\triangle BHC$ $BH^2 = BC^2 - CH^2 = 76 - 75 = 1$, $BH = \frac{a-b}{2} = 1$ и $a-b=2$.

От $a-b=2$ и $a+b=10$ намираме $a=6$, $b=4$.

Страните на трапеца са $AB=6$, $CD=4$, $AD=BC=2\sqrt{19}$.

Критерии за оценяване:

1. Обосновка, че трапецът е равнобедрен (1 точка).
2. Изразяване на $AH = \frac{a+b}{2}$ и $BH = \frac{a-b}{2}$ (1 точка).
3. Направен извод, че $\sphericalangle HAC = 60^\circ$ (1 точка).
4. Намиране на зависимостта $a+b=10$ (2 точки).
5. Намиране на бедрото $BC = 2\sqrt{19}$ (2 точки).
6. Намиране на зависимостите $a-b=2$ (1 точка).
7. Пресмятане на $a=6$ и $b=4$ (2 точки).

