МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

22.05.2015 г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кое е най-голямото от посочените числа?

А) $\sqrt{(-2)^2}$ **Б)** $\sqrt[4]{8}$ **В)** $\sqrt[3]{-4}$ **Г)** 16^0

2. Ако $a = 2^{\frac{2}{3}}$**, а** $b = 2^{-\frac{3}{2}}$**, то** ab **е равно на:**

А) 2^{-1} **Б)** $2^{-\frac{4}{9}}$ **В)** $2^{-\frac{5}{6}}$ **Г)** 2^{-5}

3. Множеството от допустимите стойности на израза $A = \dfrac{1}{|x| + \sqrt{2}}$ **е:**

А) $x \in (-\infty; +\infty)$ **Б)** $x \in \left(-\infty; -\sqrt{2}\right) \cup \left(\sqrt{2}; +\infty\right)$

В) $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$ **Г)** $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

4. Решенията на неравенството $\dfrac{(x-2)^2(x+1)}{x-3} < 0$ **са:**

А) $x \in (-1; 3]$ **Б)** $x \in (-\infty; -1) \cup (3; +\infty)$

В) $x \in (-1; 2) \cup (3; +\infty)$ **Г)** $x \in (-1; 2) \cup (2; 3)$

5. Стойността на израза $\lg\dfrac{1}{100} + \log_2 64 - \log_{\frac{1}{3}} 27 + \log_5 1$ **е равна на:**

А) 1 **Б)** 2 **В)** 5 **Г)** 7

6. НЕВЯРНОТО твърдение за функцията $f(x)=x^2-2x$ е:

А) Стойността на функцията $f(x)$ при $x=0$ е равна на 0.

Б) Графиката на функцията $f(x)$ е парабола.

В) Функцията $f(x)$ е дефинирана за всяко x.

Г) Графиката на функцията $f(x)$ е симетрична спрямо ординатната ос Oy.

7. Кое от уравненията има два отрицателни реални корена?

А) $-3x^2+7x+2=0$ **Б)** $3x^2+7x+2=0$

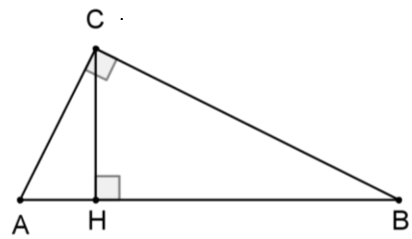
В) $-3x^2+7x-2=0$ **Г)** $3x^2+7x-2=0$

8. Изразът $\cos\alpha.\cos(90°+\alpha)$ е тъждествено равен на:

А) $\sin 2\alpha$ **Б)** $-\frac{1}{2}\sin 2\alpha$

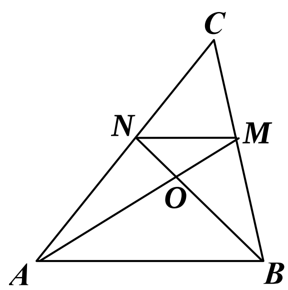
В) $-\cos^2\alpha$ **Г)** $\cos^2\alpha$

9. В правоъгълния $\triangle ABC\ (\sphericalangle ACB=90°)$ височината CH дели хипотенузата AB на отсечки $AH=2\,\text{cm}$ и $BH=8\,\text{cm}$. Тангенсът на $\sphericalangle CBA$ е равен на:



А) $\frac{2\sqrt{5}}{5}$ **Б)** $\frac{\sqrt{5}}{5}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 2

10. На чертежа $MN \parallel AB$. Ако $MO:OA=3:5$, то отношението $CN:NA$ е равно на:



А) 3 : 5 **Б)** 5 : 3 **В)** 2 : 3 **Г)** 3 : 2

11. Ако x_1 и x_2 са реалните корени на уравнението $3x^2-14x+6=0$, то сумата от реципрочните им стойности е равна на:

А) $-\frac{14}{3}$ **Б)** $-\frac{7}{6}$ **В)** $\frac{3}{14}$ **Г)** $\frac{7}{3}$

12. Ако n е естествено число, то първите четири члена на числова редица с общ член $a_n = \frac{(-1)^{1-n}.n}{n+1}$ са:

А) $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5}$

Б) $\frac{1}{2};-\frac{2}{3};\frac{3}{4};-\frac{4}{5}$

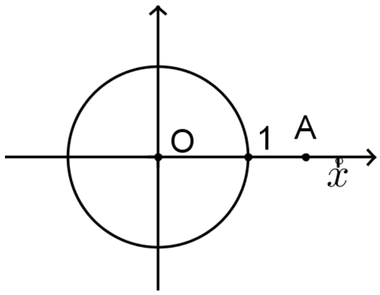
В) $\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};-\frac{4}{5}$

Г) $\frac{1}{2};-\frac{2}{3};-\frac{3}{4};\frac{4}{5}$

13. Намерете първия член на аритметична прогресия, ако $a_4 = 1$ и $a_7 = -11$.

А) –11 **Б)** –4 **В)** 13 **Г)** 17

14. Ако за $\sphericalangle AOB$ е дадено, че върхът му е точката O на чертежа, лъчът $\overrightarrow{OA}$ съвпада с положителната посока на оста Ox и $tg\sphericalangle AOB = \sqrt{3}$, то лъчът $\overrightarrow{OB}$ лежи:



А) само в I квадрант **Б)** в I или в III квадрант

В) във II или в IV квадрант **Г)** само в III квадрант

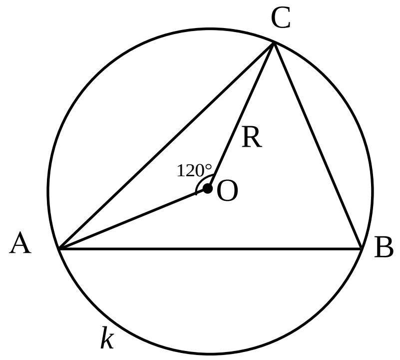
15. В купа има 5 сини и 12 бели жетона. Каква е вероятността при едновременно изтегляне на два жетона точно един от тях да е бял?

А) $\frac{C_5^2.C_{12}^2}{C_{17}^2}$ **Б)** $\frac{C_{17}^2}{C_5^1.C_{12}^1}$ **В)** $\frac{C_5^1+C_{12}^1}{C_{17}^2}$ **Г)** $\frac{C_5^1.C_{12}^1}{C_{17}^2}$

16. В школа по танци участват 6 души на възраст 15 г., 9 г., 36 г., 17 г., 28 г. и 21 г. На каква възраст е новодошъл участник в школата, ако медианата на статистическия ред от първоначалните 6 данни съвпада с медианата на статистическия ред от новополучените 7 данни за възрастта на участниците в школата?

А) 18 **Б)** 19 **В)** 20 **Г)** 26,5

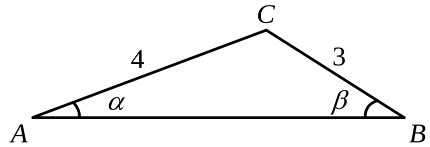
17. Около $\triangle ABC$ **е описана окръжност** $k(O;R)$**. Ако** $\sphericalangle AOC = 120°$ **и** $\sphericalangle CAB = \alpha$**, страната** AB **е равна на:**



А) $2R\sin\alpha$ **Б)** $2R\sin(120° - \alpha)$

В) $2R\sin(120° + \alpha)$ **Г)** $R\sin(60° + \alpha)$

18. За $\triangle ABC$ **на чертежа е дадено, че** $BC = 3\,\text{cm}$**,** $AC = 4\,\text{cm}$ **и** $\cos(\alpha + \beta) = \frac{1}{3}$**. Дължината на страната** AB **е равна на:**

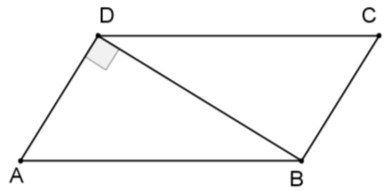


А) $\sqrt{17}$ cm **Б)** 5 cm **В)** $\sqrt{33}$ cm **Г)** 6 cm

19. Даден е трапец с основи $12\,\text{cm}$ **и** $9\,\text{cm}$ **и диагонали** $11\,\text{cm}$ **и** $18\,\text{cm}$**. Лицето на трапеца е равно на:**

А) $35\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ **Б)** $70\sqrt{2}\,\text{cm}^2$ **В)** $100\,\text{cm}^2$ **Г)** $55{,}5\,\text{cm}^2$

20. В успоредника $ABCD$ $AC = 10\,\text{cm}$**,** $BD = 6\,\text{cm}$ **и** $\sphericalangle ADB = 90°$**. Намерете лицето на успоредника.**



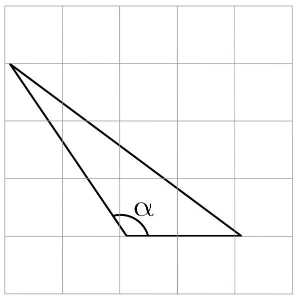
А) $12\,\text{cm}^2$ **Б)** $18\,\text{cm}^2$

В) $24\,\text{cm}^2$ **Г)** $36\,\text{cm}^2$

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

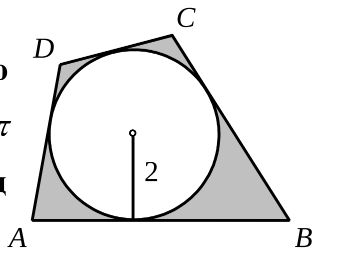
21. Намерете корените на уравнението $\sqrt{x+2} - \sqrt{3-x} = 1$**.**

22. Като използвате квадратната мрежа, намерете стойността на $\cos\alpha$**.**

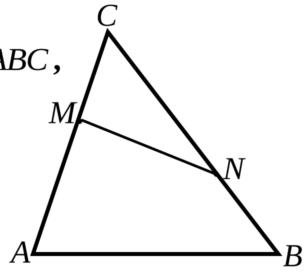


23. В банка са вложени 5000 лв. **при сложна годишна лихва. Намерете лихвения процент, ако след две години сумата е нараснала с** 408 лв.

24. На чертежа четириъгълникът $ABCD$ **е описан около окръжност с радиус** 2 **и** $AD+BC=9$**. Изразете чрез числото** π **лицето на фигурата, получена от четириъгълника след „изрязване” на вписания в него кръг.**



25. Точките M **и** N **лежат съответно на страните** AC **и** BC **на** $\triangle ABC$**,** $AM=2CM$**,** $CN=2BN$ **и** $S_{\triangle MNC}=14\,\text{cm}^2$**. Намерете лицето на** $\triangle ABC$**.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете уравнението $(x+1)(x-2)(x+3)+(x-1)(x+3)(x-5)+(x+3)(x-2)(x-3)=0$**.**

27. Кодът на сейф се състои от 4 **различни цифри и не започва с нула. Известно е, че числото, образувано от първите две цифри (цифрата на хилядите и стотиците), е квадрат на естествено число. Най-много колко различни опита са необходими, за да се отвори сейфът?**

28. Даден е $\triangle ABC$ **със страна** $AB=a$ **и** $\sphericalangle BAC=30^\circ$**. Построена е окръжност** k**, която минава през върха** B **на** $\triangle ABC$**, пресича страната му** AB **в точка** D **и се допира до** AC **в точка** C**. Намерете радиуса на окръжността, ако** $AD:DB=1:2$**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c^{\,2} = a_1 b_1$ $r = \dfrac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \dfrac{a}{c}$ $\cos\alpha = \dfrac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \dfrac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha \quad b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta \quad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \quad \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

Формула за медиана:

$$m_a^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right) \qquad m_b^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right) \qquad m_c^{\,2} = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$$

Формула за ъглополовяща: $\dfrac{a}{b} = \dfrac{n}{m}$ $l_c^{\,2} = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \dfrac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \dfrac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\left(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\right)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 22 май 2015 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**А**	2
2	**В**	2
3	**А**	2
4	**Г**	2
5	**Г**	2
6	**Г**	2
7	**Б**	2
8	**Б**	2
9	**В**	2
10	**Г**	2
11	**Г**	3
12	**Б**	3
13	**В**	3
14	**Б**	3
15	**Г**	3
16	**Б**	3
17	**Б**	3
18	**В**	3
19	**Б**	3
20	**В**	3
21	2	4
22	$-\frac{2}{\sqrt{13}}$ или $-\frac{2\sqrt{13}}{13}$	4
23	4%	4
24	$S=18-4\pi$ или $S=2(9-2\pi)$	4
25	$S_{\vartriangle ABC}=63\,\mathrm{cm}^2$	4
26	$x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$	10
27	336	10
28	$R=\frac{a}{3}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване

По решението

I начин

1. Изнасяне на множител $(x+3)$ и представяне на уравнението във вида $(x+3)\left[(x+1)(x-2)+(x-1)(x-5)+(x-2)(x-3)\right]=0$. (2 т.)

2. Вярно разкриване на малките скоби и свеждане на уравнението до еквивалентното му $(x+3)\left(x^2-x-2+x^2-6x+5+x^2-5x+6\right)=0$ за всяко събираемо по 1 точка. (3 т.)

3. За правилно приведение и свеждане на уравнението до еквивалентното му $(x+3)\left(3x^2-12x+9\right)=0$. (2 т.)

4. За намиране на трите корена $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$. (3 т.)

II начин

1.Правилно разкриване на скобите (по 1точка за всяко от трите събираеми) и свеждане на уравнението до еквивалентното му $3x^3-3x^2-27x+27=0$. общо (4 т.)

2. Последователно получаване на еквивалентните уравнения $3\left(x^3-x^2-9x+9\right)=0\,|:3 \Leftrightarrow x^2(x-1)-9(x-1)=0 \Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-9\right)=0$. (2 т.)

3. Свеждане до уравнението $(x-1)(x+3)(x-3)=0$. (1 т.)

4. За намиране на трите корена $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$. (3 т.)

Решение

I начин $(x+1)(x-2)(x+3)+(x-1)(x+3)(x-5)+(x+3)(x-2)(x-3)=0 \Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left[(x+1)(x-2)+(x-1)(x-5)+(x-2)(x-3)\right]=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x+3)\left(x^2-x-2+x^2-6x+5+x^2-5x+6\right)=0 \Leftrightarrow (x+3)\left(3x^2-12x+9\right)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3(x+3)\left(x^2-4x+3\right)=0 \Leftrightarrow 3(x+3)(x-1)(x-3)=0 .$$

Корените на равнението са $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$.

II начин: Преобразуваме лявата страна на уравнението и получаваме еквивалентното уравнение:

$$3x^3-3x^2-27x+27=0 \Leftrightarrow 3\left(x^3-x^2-9x+9\right)=0\,|:3 \Leftrightarrow x^2(x-1)-9(x-1)=0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-1)\left(x^2-9\right)=0 \Leftrightarrow (x-1)(x+3)(x-3)=0 .$$

Корените на уравнението са $x_1=-3,\ x_2=1,\ x_3=3$.

27. Критерии за оценяване

1. Записване на точните квадрати, по-малки от 100, на естествените числа. (2 т.)
2. Отхвърляне на числата 1 (01), 4 (04) и 9 (09). (1 т.)
3. Определяне на 6-те възможни двуцифрени числа (точни квадрати), които заемат първите 2 позиции на кода. (1т.)
4. Определяне на възможностите за наредба на неизползваните 8 цифри на трета и четвърта позиция в кода – $V_8^2 = 8.7 = 56$. (4 т.)
4. Правилен извод за пресмятане на опитите като произведение от 6 възможности за първите 2 цифри и 56 възможности за вторите две цифри (6.56) . (1 т.)
5. Получаване на правилния максимален брой 336 опита за отваряне на сейфа . (1 т.)

Решение

Точните квадрати, по-малки от 100, на естествени числа, са: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64 и 81.

Тъй като кодът не започва с нула, не може първите две цифри да са квадратите на 1, 2 и 3 $\left(1^2 = 1,\ 2^2 = 4,\ 3^2 = 9\right)$, т.е. наредбата 01.., 04.. , или 09.. е невъзможна.

Двуцифрените числа, които са точни квадрати и могат да са първите две цифри на шифъра, са: 16, 25, 36, 49, 64 и 81.
Възможностите за цифрите на десетиците и на единиците, които се избират измежду останалите 8 цифри, неангажирани за първите 2 позиции, са $V_8^2 = 8.7 = 56$ на брой.
Следователно максималният брой опити за отваряне на сейфа е $6.56 = 336$.

28. Критерии за оценяване

1. За намиране на $AD = \frac{a}{3}$ и $DB = \frac{2a}{3}$. (1 т.).

2. За намиране на $AC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. (2 т.)

3. За намиране на $BC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. (2 т.)

I начин на продължение на решението

4. За извода, че $\sphericalangle ABC = 30°$. (1т.)

5. За намиране на $\sphericalangle CDB = 60°, \sphericalangle DCB = 90°$ или $CD = \frac{a}{3}$. (2 т.)

6. За извода, че $R = \frac{1}{2}DB$ или изразяване на R чрез CD от $\triangle CDB$. (1 т.)

7. За верен отговор $R = \frac{a}{3}$. (1 т.)

II начин на продължение на решението

4. За извода, че $\sphericalangle ABC = 30°$. (1т.)

5. За намиране на $\overset{\frown}{CD} = 60°$. (1 т.)

6. За намиране на $\overset{\frown}{CB} = 120°$. (1 т.)

7. За намиране на $\overset{\frown}{DCB} = 180°$. (1 т.)

8. За извода, че $DB = 2R$, $R = \frac{DB}{2} = \frac{a}{3}$. (1 т.)

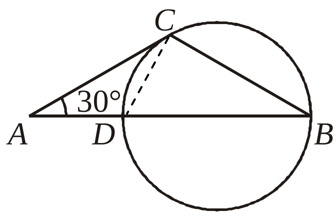
III начин на продължение на решението

4. За намиране на $CD = \frac{a}{3}$. (2 т.)

5. За доказване, че $\triangle BCD$ е правоъгълен. (2 т.)

6. За извода, че $DB = 2R$, $R = \frac{DB}{2} = \frac{a}{3}$. (1 т.)

Решение



От даденото съотношение $AD : DB = 1 : 2$ следва, че $AD = \frac{a}{3}$ и $DB = \frac{2a}{3}$.

За допирателната AC и секущата AB имаме $AC^2 = AB.AD = a.\frac{a}{3}$, откъдето получаваме, че $AC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$. **(**От подобните триъгълници $\triangle ACD \sim \triangle ABC \Rightarrow \frac{AC}{AB} = \frac{AD}{AC}$**,**

$\Rightarrow AC^2 = AB.AD = a.\frac{a}{3}$ $AC = a\frac{\sqrt{3}}{3}$).

От косинусова теорема за $\triangle ABC$: $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB.AC.\cos 30°$ получаваме, че

$BC = a\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

I начин на продължение на решението

Следователно $AC = BC$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Следователно

$\overset{\frown}{CD} = 60°, \sphericalangle ACD = 30°, \sphericalangle CDB = 60°$. Оттук следва, че $\sphericalangle DCB = 90° \Rightarrow DB = 2R, R = \dfrac{a}{3}$.

Или от косинусова теорема за ADC: $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30°$, $CD = \dfrac{a}{3}$.

От синусова теорема за $\triangle CDB$: $\dfrac{CD}{\sin 30°} = 2R$, $R = \dfrac{a}{3}$.

II начин на продължение на решението

Следователно $AC = BC$ и $\sphericalangle ABC = 30^\circ$. Оттук следва, че $\overset{\frown}{CD} = 2\sphericalangle ABC = 60°$.

От $\sphericalangle CAB = \dfrac{\overset{\frown}{BC} - \overset{\frown}{CD}}{2} \Rightarrow \overset{\frown}{BC} = 2\sphericalangle CAB + \overset{\frown}{CD}$, откъдето $\overset{\frown}{CB} = 120°$ и следователно

$\overset{\frown}{DCB} = 180°$ и DB е диаметър. Оттук $DB = 2R$, $R = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a}{3}$.

III начин на продължение на решението

От косинусова теорема за ADC: $CD^2 = AD^2 + AC^2 - 2AD.AC.\cos 30°$, $CD = \dfrac{a}{3}$.

От равенството $BD^2 = CD^2 + BC^2$ $\left(\dfrac{4a^2}{9} = \dfrac{a^2}{9} + \dfrac{3a^2}{9}\right)$ следва, че $\triangle BCD$ е правоъгълен

и $\sphericalangle BCD = 90°$, а DB е диаметър, откъдето $DB = 2R$, $R = \dfrac{DB}{2} = \dfrac{a}{3}$.