МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

29.08.2014 г. – ВАРИАНТ 1

Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!

1. Кой от изразите приема стойност, която е цяло число?

А) $-\frac{16\sqrt{7}}{\sqrt{28}}$ **Б)** $(-2)^{-3}$ **В)** $121^{-0,5}$ **Г)** $\sqrt{5}-5\sqrt{5}$

2. Изразът $\frac{3a^3-3b^3}{a^2+ab+b^2}-\frac{2a^3+2b^3}{a^2-ab+b^2}$ **е тъждествено равен на:**

А) $5a-b$ **Б)** $3a-2b$ **В)** $a-5b$ **Г)** $2a-3b$

3. Всички допустими стойности на израза $\frac{\sqrt{x+4}}{2x-3}$ **са:**

А) $x\in\left(-4;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ **Б)** $x\in\left[-4;\frac{3}{2}\right)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$

В) $x\in\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$ **Г)** $x\neq\frac{3}{2},\ x\neq 4$

4. Кое от посочените числа е решение на неравенството $x+1\geq 6x^2$

А) $-\frac{1}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{4}$ **В)** $\frac{3}{4}$ **Г)** 1

5. Ако $\log_a 16=-4$**, то числото** a **е равно на:**

А) -4 **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 4

6. Решенията на системата $\left|\begin{array}{l} x-2y^2=4 \\ x^2-x-30=0 \end{array}\right.$ **са:**

А) $(6;1)$ и $(6;-1)$ **Б)** $(6;1)$ **В)** $\left(-5;\sqrt{\frac{9}{2}}\right)$ **Г)** $(-6;5)$ и $(6;-5)$

7. Кое от уравненията има два реални положителни корена?

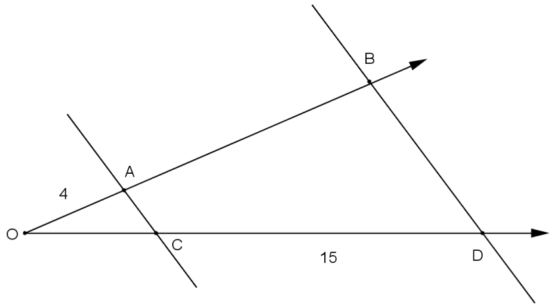
А) $x^2+9x+6=0$ **Б)** $-x^2-9x+6=0$

В) $x^2-9x+6=0$ **Г)** $x^2-9x-6=0$

8. Стойността на $\cos 300^\circ$ **е равна на:**

А) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$

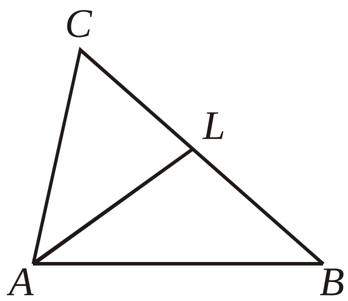
9. На чертежа правите AC **и** BD **са успоредни,** $OA = 4$ **cm,** $CD = 15$ **cm и** OC **е със** 4 **cm по-къса от** AB**. Дължината на отсечката** AB **е равна на:**



А) 6 cm **Б)** 7 cm

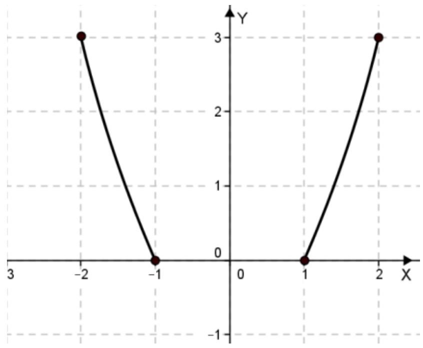
В) 10 cm **Г)** 14 cm

10. В $\triangle ABC$ $AB = 5$ **cm,** $AC = 4$ **cm и** $AL\left(L \in BC\right)$ **е ъглополовяща на** $\sphericalangle BAC$**. Ако** $CL = \frac{8}{3}$ **cm, то дължината на** AL **е:**



А) $\frac{10}{3}$ cm **Б)** $\frac{32}{15}$ cm **В)** $\frac{15}{2}$ cm **Г)** $\frac{100}{9}$ cm

11. Множеството от стойности на функцията, зададена с графиката си, е:



А) $x \in [-1;1]$ **Б)** $x \in [0;3]$

В) $x \in [-2;\,-1] \cup [1;2]$ **Г)** $x \in (-\infty;0) \cup (3;+\infty)$

12. Общият член $a_n\ (n \in \mathbb{N})$ **на числовата редица** $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{7}{12}, \ldots\ldots\ldots\ldots$ **е:**

А) $a_n = \frac{3n-2}{n^2+n}$ **Б)** $a_n = \frac{n}{n+1}$ **В)** $a_n = \frac{n^2-2}{n^2+3}$ **Г)** $a_n = \frac{2n-1}{n+1}$

13. Числата $13,\ 10,\ 7,\ \ldots,\ -50$ **образуват крайна аритметична прогресия. Броят на членовете на тази прогресия е:**

А) 21 **Б)** 22 **В)** 37 **Г)** 63

14. Ако $\operatorname{tg} 47° = b$**, то вярно е, че:**

А) $\operatorname{cotg} 47° = \frac{1}{b^2}$ **Б)** $\operatorname{cotg} 43° = b$ **В)** $\operatorname{tg} 43° = 1 - b$ **Г)** $\operatorname{cotg} 47° = \sqrt{1 - b^2}$

15. На контролна работа по математика в един клас ***двама*** **ученици получили оценка** ***Среден 3, осем*** **ученици –** ***Добър 4, тринадесет ученици – Много добър 5*** **и** ***седем*** **ученици –** ***Отличен 6***. **Колко ученици са получили оценки, които са по-високи от средния успех на класа?**

А) 28 **Б)** 20 **В)** 13 **Г)** 7

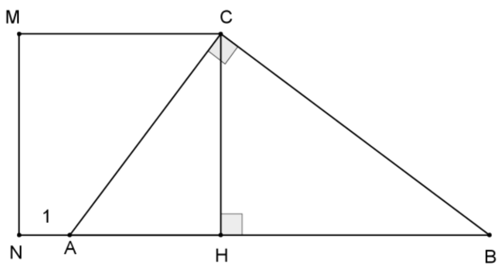
16. От буквите на думата МАТУРИ са съставени всички 6**-буквени думи (не задължително смислени), като във всяка от тях групата букви ТУР остава непроменена (Например: ТУРМАИ, АМТУРИ…). Броят на съставените думи, включително думата МАТУРИ, е:**

А) $4!+1$ **Б)** $4!$ **В)** $4!.3!$ **Г)** $6!$

17 . В $\triangle ABC$ $AC = 14$**,** $BC = 14\sqrt{2}$ **и** $\sphericalangle BAC = 45°$. **Мярката на** $\sphericalangle ABC$ **е:**

А) $15°$ **Б)** $30°$ **В)** $120°$ **Г)** $150°$

18. На чертежа $NHCM$ **е квадрат със страна, равна на височината** CH **към хипотенузата** AB **на правоъгълния** $\triangle ABC$**. Ако** $S_{NHCM} = 16\,\mathbf{cm^2}$ **и** $AN = 1\,\mathbf{cm}$**, дължината на** BH **е:**

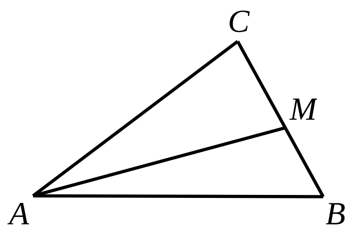


А) 16 cm **Б)** $\frac{25}{3}$ cm

В) $\frac{16}{3}$ cm **Г)** 5 cm

19. На фигурата лицето на $\triangle ABC$ **е** 30 $\mathbf{cm^2}$ **и** $BM = \frac{2}{3}CM$ **.**

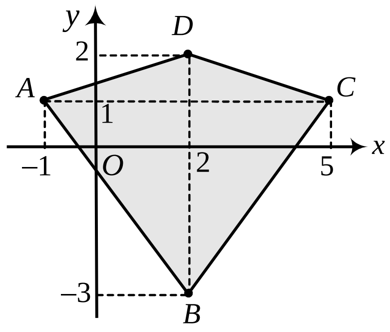
Лицето на $\triangle AMB$ **е:**



А) 6 cm^2 **Б)** 12 cm^2

В) 18 cm^2 **Г)** 20 cm^2

20. В правоъгълна координатна система са построени точките $A(-1;1)$, $B(2;-3)$, $C(5;1)$ и $D(2;2)$. Лицето на четириъгълника $ABCD$ **е :**



А) 30 **Б)** 15

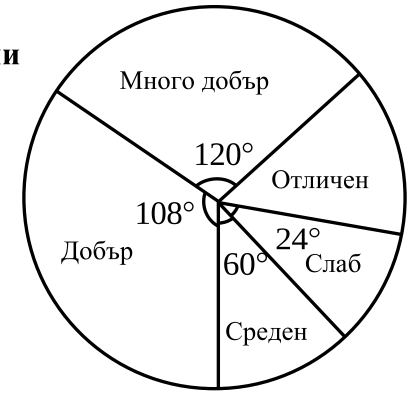
В) 7,5 **Г)** 5

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

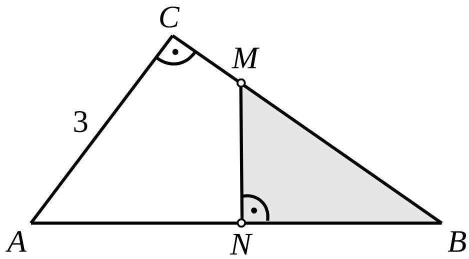
21. Намерете стойността на израза $A = \frac{1+\sin(180°-\alpha)}{\sin(90°+\alpha)} \cdot \frac{1+\cos(90°+\alpha)}{\cos^2(180°-\alpha)}$ **за** $\alpha = 60°$

22. Намерете корените на уравнението $\sqrt{x+6} - \sqrt{2x-2} = 1$.

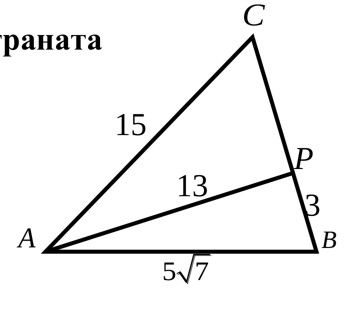
23. На пробна матура по математика от едно училище се явили 30 **ученици. На кръговата диаграма е представено разпределението на получените оценки. Намерете средния успех на учениците от пробната матура.**



24. Даден е правоъгълен $\triangle ABC$ **с катети** $AC = 3$**cm и** $BC = 4$**cm. Върху страната** BC **е избрана точка** M **така, че** $CM : CB = 1:4$. **Ако** N **е петата на перпендикуляра, спуснат от** M **към** AB, **намерете лицето на** $\triangle BNM$ **.**



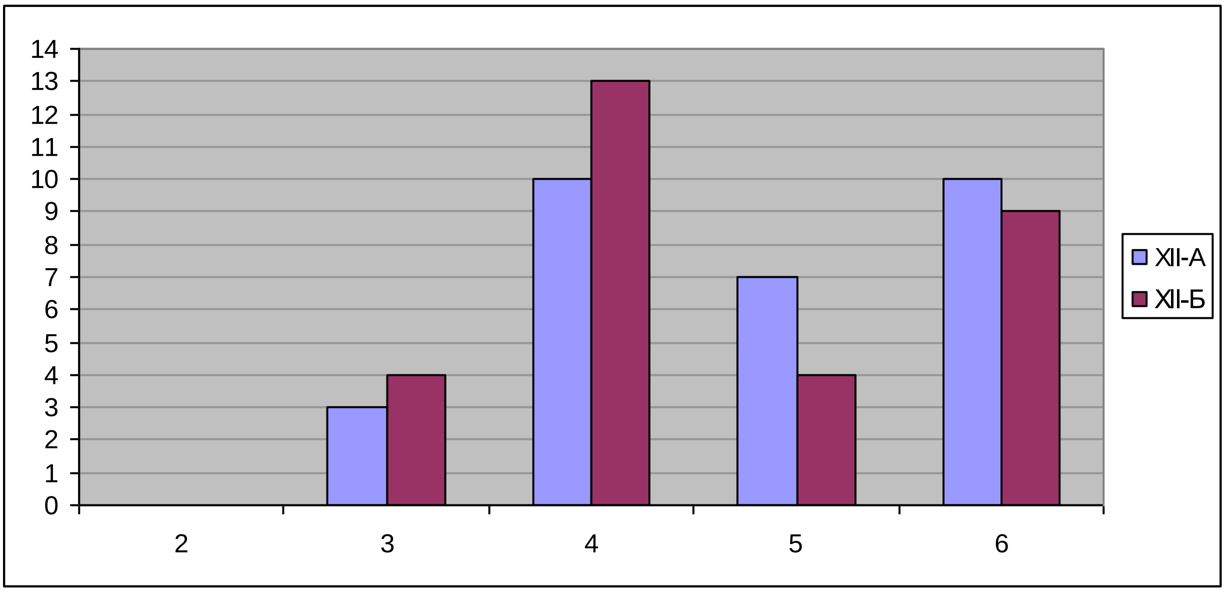
25. Даден е $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 5\sqrt{7}$ **cm и** $AC = 15$**cm. Върху страната** BC **е взета точка** P **така, че** $AP = 13$**cm и** $BP = 3$**cm. Намерете дължината на отсечката** PC**.**



<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете уравнението $\left(x^2+2x\right)^2-2\left(x^2+2x\right)-3=0$**.**

27. Учениците от XII **клас в едно училище са** 60 **на брой и са разпределени в два класа (**XII-А **и** XII-Б**) по** 30 **ученици. На диаграмата са дадени годишните им оценки по математика.**



Като направите необходимата аргументация, отговорете на следващите въпроси:

1. Каква е медианата на оценките по математика на учениците от випуска (от двата класа, взети заедно)?

2. От всички ученици от XII-А клас се избират двама. Каква е вероятността те да НЕ са отличници по математика?

3. Учениците от двата класа, получили оценка *Среден* *3*, са подредени в една редица, като първо са наредени учениците от XII-А **клас, а до тях – тези от** XII-Б **клас. По колко начина може да стане това?**

28. Вписаният в окръжност четириъгълник $ABCD$ **е със страни** $AB=7$ **cm,** $BC=5$ **cm,** $CD=7$ **cm и** $DA=3$ **cm. Диагоналите му** AC **и** BD **се пресичат в точка** O**. Да се намерят дължините на отсечките** AO**,** BO**,** CO **и** DO**.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac \qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a} \qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a| \qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0 \qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} \qquad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a} \qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x \qquad a^{\log_a b}=b \qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d \qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1} \qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	$0°$	$30°$	$45°$	$60°$	$90°$
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 29. 08. 2014 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**А**	2
2	**В**	2
3	**Б**	2
4	**Б**	2
5	**В**	2
6	**А**	2
7	**В**	2
8	**В**	2
9	**В**	2
10	**А**	2
11	**Б**	3
12	**А**	3
13	**Б**	3
14	**Б**	3
15	**Б**	3
16	**Б**	3
17	**Б**	3
18	**В**	3
19	**Б**	3
20	**Б**	3
21	2	4
22	$x_1 = 3$	4
23	$4,30$	4
24	$\frac{54}{25}\,\mathrm{cm}^2$	4
25	$PC = 7\,\mathrm{cm}$	4
26	$x_{1,2} = -1$, $x_3 = 1$ и $x_4 = -3$	10
27	**1.** Медиана:4,5; **2**. $P = \frac{C_{20}^2}{C_{30}^2} = \frac{38}{87}$; **3.** $3!.4! = 6.24 = 144$	10
28	$AO = DO = 3\,\mathrm{cm}$, $BO = CO = 5\,\mathrm{cm}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. Въвеждане на ново неизвестно $t = x^2 + 2x$ и свеждане до квадратното уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$ за новото неизвестно. (2 т.)
2. Решаване на квадратното уравнение $t^2 - 2t - 3 = 0$ и получаване на корените $t_1 = -1,\ t_2 = 3$. (1 т.)
3. Получаване на уравненията $x^2 + 2x = -1,\ x^2 + 2x = 3$ за неизвестното x. (2 т.)
4. Решаване на уравнението $x^2 + 2x = -1 \Leftrightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$ и получаване на на корените $x_{1,2} = -1$. (2 т.)
5. Решаване на уравнението $x^2 + 2x = 3 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 3 = 0$ и получаване на корените $x_3 = 1,\ x_4 = -3$. (2 т.)
6. Окончателен отговор $x_{1,2} = -1,\ x_3 = 1,\ x_4 = -3$. (1 т.)

27. Критерии за оценяване:

1. 1.1. Представяне оценките в статистически ред $\underbrace{3, ..., 3}_{7}, \underbrace{4, ..., 4}_{23}, \underbrace{5, ..., 5}_{11}, \underbrace{6, ..., 6}_{19}$ (1 т.)

1.2. Пресмятане на медианата $\dfrac{4+5}{2} = 4,5$. (1 т.)

2. 2.1. Пресмятане на броя на възможностите $C_{20}^2 = 190$, по които могат да се изберат учениците от XII-А клас, които не са отличници. (2 т.)

2.2. Пресмятане на броя на възможностите за избор на двама от всичките 30 ученици от XII-А клас – $C_{30}^2 = \dfrac{30.29}{1.2} = 435$. (2 т.)

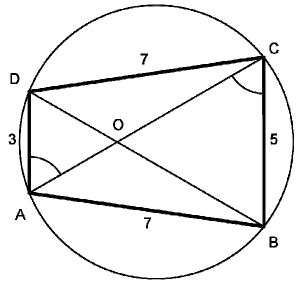
2.3. Намиране на търсената вероятност – $P = \dfrac{C_{20}^2}{C_{30}^2} = \dfrac{20.19}{30.29} = \dfrac{38}{87}$ **.** (1 т.)

3. 3.1 Пресмятане на възможните наредби 3 ученици от XII-А – $3! = 6$ и на 4 ученици от XII- Б – $4! = 4.3.2.1 = 24$. (2 т.)

3.2 Намиране броя на възможностите за подреждане на избраните ученици от двата класа–$3!.4! = 6.24 = 144$ (1 т.)

28. Критерии за оценяване:

I. Начин



1. Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^0 - \varphi$ и от косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имаме $\left| \begin{array}{l} d_1^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot \cos\varphi \\ d_1^2 = 3^2 + 7^2 + 2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме
   $AC = d_1 = 8$. (2 т.)
2. Аналогично, ако $BD = d_2$, $\sphericalangle BAD = \psi$, то $\sphericalangle BCD = 180^0 - \psi$ и от $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$ имаме
   $\left| \begin{array}{l} d_2^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cdot \cos\psi \\ d_2^2 = 3^2 + 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\psi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $BD = d_2 = 8$. (1 т.)
3. От косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle CDA$ имаме $\cos\sphericalangle ACB = \dfrac{5^2 + 8^2 - 7^2}{2\cdot 5\cdot 8} = \dfrac{1}{2}$ и
   $\cos\sphericalangle CAD = \dfrac{3^2 + 8^2 - 7^2}{2\cdot 3\cdot 8} = \dfrac{1}{2}$, откъдето $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD = 60^0$. (2 т.)
4. Правите AD и BC са успоредни и четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец и
   $\sphericalangle ADB = \sphericalangle CBD = 60^0$ (например от окръжността). (1 т.)
5. Сега $\triangle AOD$ и $\triangle BOC$ са равностранни, т.е. $AO = DO = AD = 3$ и
   $BO = CO = BC = 5$. (4 т.)

II. Начин

1. Понеже $AB = CD$, то $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$, т.е. AD и BC са успоредни и четириъгълникът $ABCD$ е равнобедрен трапец. (2 т.)
2. Доказване, че $AC = BD$. (1 т.)
3. От $\sphericalangle ADB = \sphericalangle ACB$ и $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAD$ имаме $\triangle ADO$ и $\triangle BCO$ са равнобедрени и $\triangle ADO \sim \triangle BCO$, т.е. $AO = DO$, $BO = CO$ и $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{CO}{OA} = \dfrac{5}{3}$. (2 т.)

4. Ако $AC = d$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^{o} - \varphi$ и от косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имаме $\left| \begin{array}{l} d^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot \cos\varphi \\ d^2 = 3^2 + 7^2 + 2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $AC = BD = d = 8$. (2 т.)

5. От $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{5}{3}$ и $BO + DO = BD = 8$, намираме $BO = CO = 5$ и $AO = DO = 3$. (3 т.)

III. Начин

1. От свойствата на ъглите, вписани в окръжности имаме $\triangle ABO \sim \triangle DCO$ и $\triangle ADO \sim \triangle BCO$, т.е. $\dfrac{AB}{DC} = \dfrac{BO}{CO}$, $\dfrac{AD}{BC} = \dfrac{DO}{CO}$ или $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{AB\cdot BC}{CD\cdot DA} = \dfrac{7\cdot 5}{7\cdot 3} = \dfrac{5}{3}$. (3 т.)

2. Ако $AC = d_1$, $\sphericalangle ABC = \varphi$, то $\sphericalangle ADC = 180^{o} - \varphi$ и от косинусовата теорема за $\triangle ABC$ и $\triangle ADC$ имаме $\left| \begin{array}{l} {d_1}^2 = 7^2 + 5^2 - 2\cdot 7\cdot 5\cdot \cos\varphi \\ {d_1}^2 = 3^2 + 7^2 + 2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\varphi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $AC = d_1 = 8$. (2 т.)

3. Аналогично ако $BD = d_2$, $\sphericalangle BAD = \psi$, то $\sphericalangle BCD = 180^{o} - \psi$ и от $\triangle BAD$ и $\triangle BCD$ имаме $\left| \begin{array}{l} {d_2}^2 = 7^2 + 5^2 + 2\cdot 7\cdot 5\cdot \cos\psi \\ {d_2}^2 = 3^2 + 7^2 - 2\cdot 3\cdot 7\cdot \cos\psi \end{array} \right.$, откъдето получаваме $BD = d_2 = 8$. (1 т.)

4. От $\dfrac{BO}{DO} = \dfrac{5}{3}$ и $BO + DO = 8$, намираме $BO = 5$ и $DO = 3$. (2 т.)

5. Аналогично $\dfrac{AO}{CO} = \dfrac{DA\cdot AB}{BC\cdot CD} = \dfrac{3\cdot 7}{5\cdot 7} = \dfrac{3}{5}$ и $AO + CO = 8$, т.е. $AO = 3$ и $CO = 5$. (2 т.)