<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

26.05.2015 г. – <u>ВАРИАНТ 2</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кое от числата е различно от останалите три ?

А) $0,6\%$ от 60 **Б)** 6% от 6 **В)** $\left(-\frac{50}{18}\right)^{-1}$ **Г)** $\left(-\frac{5}{3}\right)^{-2}$

2. При $x \neq \pm 1$ **изразът** $\frac{x^2+x}{x^2-1}-\frac{x^2}{x-1}$ **е тъждествено равен на:**

А) $-x$ **Б)** x **В)** $-\frac{x^2}{x+1}$ **Г)** $\frac{x}{x-1}$

3. Всички допустими стойности на израза $\sqrt{\frac{2}{x-3}}-\sqrt{7-x}$ **са:**

А) $x \in (-\infty; 7]$ **Б)** $x \in [3; 7)$ **В)** $x \in (3; 7)$ **Г)** $x \in (3; 7]$

4. Решенията на неравенството $\frac{x-4}{2-3x} \leq 0$ **са:**

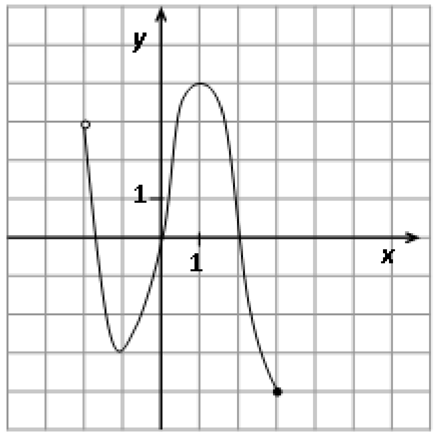
А) $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right) \cup [4; +\infty)$ **Б)** $x \in \left[\frac{2}{3}; 4\right]$

В) $x \in \left(\frac{3}{2}; 4\right)$ **Г)** $x \in \left(-\infty; \frac{2}{3}\right] \cup (4; +\infty)$

5. Стойността на израза $5^{\log_5 3}-\sqrt{\log_5 \sqrt[9]{5}}$ **е равна на:**

А) $\frac{1}{3}$ **Б)** $\frac{8}{3}$ **В)** 3 **Г)** $\frac{10}{3}$

6. За $x \in [0;3]$ **стойностите на функцията, зададена графично на чертежа, са от интервала:**



А) $[-4;4]$ **Б)** $[-4;3)$

В) $[-3;4]$ **Г)** $(-2;3]$

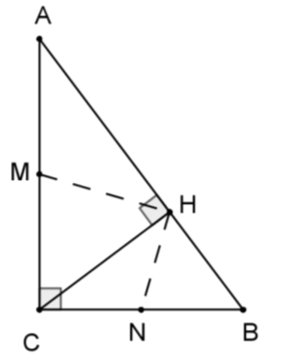
7. Броят на различните двойки $(x;y)$**, които са решения на системата** $\begin{cases} x+2y=3 \\ 4x+3y^2=15 \end{cases}$ **, е:**

А) един **Б)** два **В)** три **Г)** четири

8. Стойността на израза $\sin 15°.\sin 45°.\sin 75°$ **е равна на стойността на израза:**

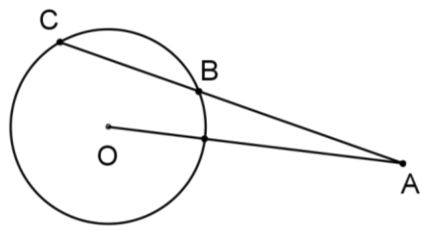
А) $\sin 45°$ **Б)** $\frac{1}{2}\sin 45°$ **В)** $\frac{1}{2}\sin 30° \sin 45°$ **Г)** $\sin 30° \sin 45°$

9. В правоъгълния $\triangle ACB (\sphericalangle C = 90°)$ **е построена височината** $CH\ (H \in AB)$**, а точките** M и N **са съответно средите на** AC **и** BC**. Ако** $AC = 12$ **и** $AB = 13,$ **то отношението** $HM : HN$ **е равно на:**



А) $1:2$ **Б)** $3:5$ **В)** $12:5$ **Г)** $5:12$

10. На чертежа точката A **е на разстояние** 17 cm **от центъра** O **на окръжност. Ако** $AB = 12\,\text{cm}$ **и** $BC = 8\,\text{cm}$**, то диаметърът на окръжността е равен на:**



А) 7 cm **Б)** $\sqrt{183}$ cm **В)** 14 cm **Г)** $2\sqrt{183}$ cm

11. Числата $\sqrt{2}$ **и** $\sqrt{8}$ **са корените на уравнението:**

А) $x^2 - 3\sqrt{2}x + 4 = 0$ **Б)** $x^2 - 4x + 3\sqrt{2} = 0$

В) $x^2 - 3\sqrt{2}x - 4 = 0$ **Г)** $x^2 + 4x - 3\sqrt{2} = 0$

12. Ако за $n \in \mathbb{N}$ **общият член на числова редица е** $a_n = (-1)^{n+1}.2n + (-1)^n$ **, то** a_{18} **е:**

А) –37 **Б)** –35 **В)** 35 **Г)** 37

13. Частното на геометрична прогресия $a_1, a_2, a_3, .., a_n, ..$**, за която** $a_1 = 3$ **и** $a_6 = 96$**, е равно на:**

А) $\sqrt[6]{32}$ **Б)** 5 **В)** $\sqrt[6]{96}$ **Г)** 2

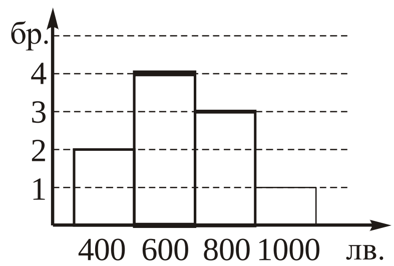
14. Най-голямата стойност на израза $2\sin x \cos x - 1$ **е равна на:**

А) 1 **Б)** $\sqrt{2} - 1$ **В)** 0 **Г)** -1

15. Фирма изработва двуцветни шнурове чрез усукване на 2 **различни по цвят прежди. Колко различни шнура могат да се изработят, ако се използват** 10 **различни по цвят прежди?**

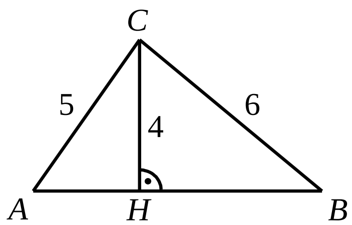
А) 20 **Б)** 45 **В)** 90 **Г)** 100

16. На диаграмата са показани заплатите на всички служители в малко предприятие. Средната заплата в предприятието е:



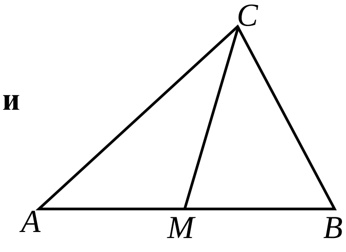
А) 280 лв. **Б)** 600 лв. **В)** 660 лв. **Г)** 700 лв.

17. В $\triangle ABC$ **е построена височината** $CH (H \in AB)$**. Ако** $AC = 5$ cm**,** $BC = 6$ cm **и** $CH = 4$ cm, **то радиусът на описаната около** $\triangle ABC$ **окръжност е:**



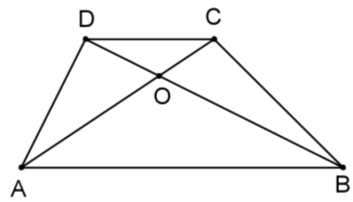
А) $\frac{15}{8}$ cm **Б)** $\frac{15}{4}$ cm **В)** $\frac{15}{2}$ cm **Г)** 2 cm

18. В $\triangle ABC$ **е построена медианата** $CM (M \in AB)$**. Ако** $AC = 4$**,** $AB = 6$ **и** $\cos\sphericalangle CAB = \frac{9}{16}$**, то медианата** CM **е равна на:**



А) $\frac{1}{2}\sqrt{46}$ **Б)** $\frac{1}{2}\sqrt{79}$ **В)** $\sqrt{23}$ **Г)** $\sqrt{22}$

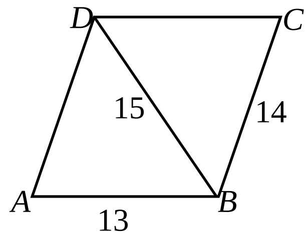
19. За трапеца $ABCD\left(AB\parallel CD\right)$ **е дадено, че** $OC:AC=1:3$,



където O **е пресечната точка на диагоналите. Ако лицето на триъгълника** $\triangle AOB$ **е** 36 cm^2**, то лицето на** $\triangle DOC$ **е равно на:**

А) 4 cm^2 **Б)** 9 cm^2 **В)** 12 cm^2 **Г)** 18 cm^2

20. В успоредника $ABCD$ $AB=13\,\text{cm}$, $BC=14\,\text{cm}$**, а диагоналът** $BD=15\,\text{cm}$**. Разстоянието от върха** A **до правата** BC **е равно на:**



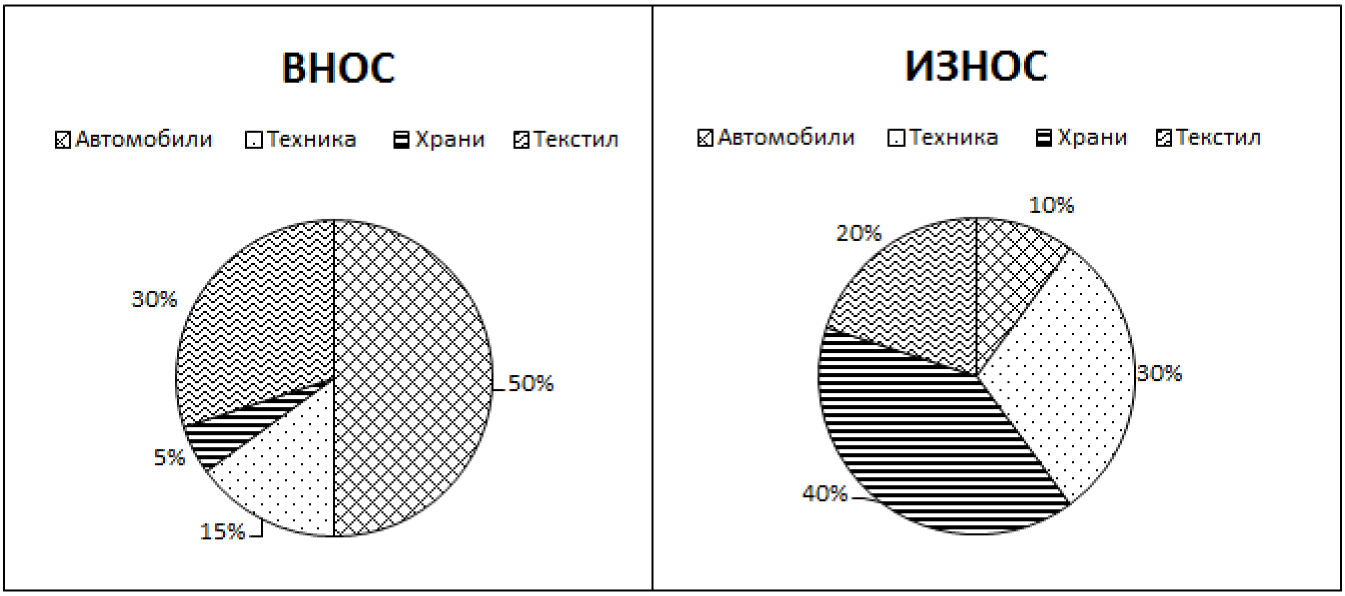
А) 12 cm **Б)** 11,2 cm **В)** 6cm **Г)** 3 cm

Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!

21. Намерете произведението от реалните корени на уравнението $4x^4-11x^2-3=0$**.**

22. Ако $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ **и** $\alpha\in\left(90°;180°\right)$**, то намерете стойността на израза** $\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{cotg}\alpha$**.**

23. На диаграмите са дадени процентните разпределения на вноса и на износа на четири вида стоки за тримесечен период от време. Левовата равностойност на вноса за цитирания период е 30 милиона лева, а на износа – 20 милиона лева.



Ако x **е сумата в лв. за внесената за този период техника, а** y **– сумата в лв. за изнесената техника за същия период от време, то намерете отношението** $\dfrac{x}{y}$**.**

24. В четириъгълника $ABCD$ $\sphericalangle ABC = 90^\circ$, $AB = 8\,\text{cm}$, $AD = CD = \sqrt{29}\,\text{cm}$ **и** $BC = 6\,\text{cm}$.
Намерете лицето на четириъгълника.

25. Даден е $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 5\,\text{cm}$**,** $AC = 3\,\text{cm}$ **и ъглополовяща** $AL = \dfrac{3\sqrt{5}}{2}$ cm**.**
Намерете радиуса на вписаната в $\triangle ABC$ **окръжност.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Решете уравнението $\sqrt{x+9} = \sqrt{\lg 100} + \sqrt{1-x}$ **.**

27. Даден е равностранен $\triangle ABC$**. На всяка от страните му са отбелязани по две точки, които я делят на** 3 **равни части. Върху** AC **са взети точките** A_1 **и** A_2 **(**A_1 **е между** A и A_2**), върху** BC **– точките** B_1 **и** B_2 (B_1 **е между** B и B_2**), а на** AB **– точките** C_1 **и** C_2 **(**C_1 **е между** A и C_2**). Построени са нови триъгълници, за които единият от върховете е връх на** $\triangle ABC$**, а останалите два са измежду отбелязаните точки на делене, които лежат на страните на дадения триъгълник, пресичащи се в избрания връх. Определете броя на всички такива триъгълници. Аргументирайте и запишете всички триъгълници, които са получени по посочения начин и са подобни на** $\triangle ABC$**. Намерете вероятността при случаен избор на един от новите триъгълници, той да е подобен на** $\triangle ABC$**.**

28. Трапецът $ABCD$ $AB \parallel CD, AB > CD$ **е вписан в окръжност с радиус** 4**. Ако** $\sin\sphericalangle BAD = \dfrac{\sqrt{7}}{3}$ **и** $AD = 2\sqrt{7}$**, докажете, че в трапеца може да се впише окръжност и намерете радиуса ѝ.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 26 май 2015 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**В**	2
2	**А**	2
3	**Г**	2
4	**А**	2
5	**Б**	2
6	**А**	2
7	**Б**	2
8	**В**	2
9	**В**	2
10	**В**	2
11	**А**	3
12	**Б**	3
13	**Г**	3
14	**В**	3
15	**Б**	3
16	**В**	3
17	**Б**	3
18	**А**	3
19	**Б**	3
20	**А**	3
21	-3	4
22	$-\frac{5}{2}$ или $-2,5$	4
23	$\frac{3}{4}$ **или** $3:4$ **или** $0,75$	4
24	$S_{ABCD}=34\,\mathrm{cm}^2$	4
25	$r=1\,\mathrm{cm}$	4
26	$x_1=-1$	10
27	$P=\frac{1}{2}$	10
28	$r=\frac{7}{3}$	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване:

1. Заместване в уравнението на $\sqrt{\lg 100}$ с $\sqrt{2}$. (1 т.)

2. Повдигане на двете страни на уравнението на втора степен, приведение и свеждане до уравнение с един радикал ($x+3=\sqrt{2(1-x)}$ или $\sqrt{(x+9)(1-x)}=4$

или $x+5=\sqrt{2(x+9)}$). (3 т.)

3. Свеждане на уравнението до квадратното уравнение $x^2+8x+7=0$. (2 т.)

4. Намиране на корените $x_1=-1$ и $x_2=-7$ на уравнението $x^2+8x+7=0$. (2 т.)

5. Отхвърляне на отговор $x_2=-7$ и даване на правилния отговор $x_1=-1$ чрез пряка проверка или множествата, в които се извършват нееквивалентните преобразувания на ирационалното уравнение. (2 т.)

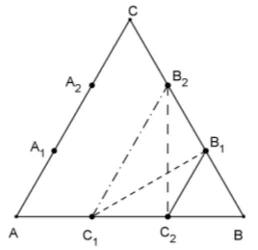
27. Критерии за оценяване:

1. Определяне на броя на всички триъгълници, получени по посочения начин (за всеки от трите върха на $\triangle ABC$ по 4 триъгълника 3.4=12) (2 т.)

2. Изписване на всичките триъгълници, получени по описания начин –
$\triangle A_1B_1C$ и $\triangle A_2B_2C$, $\triangle A_1C_1A$ и $\triangle A_2C_2A$, $\triangle B_1C_2B$ и $\triangle B_2C_1B$ подобни на дадения. (6 т.)

3. За извода, че всички равностранни триъгълници, получените по описания начин, са подобни на дадения. (1 т.)

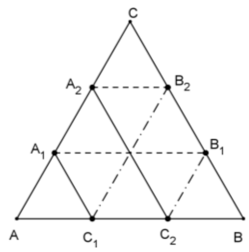
4. Намиране на търсената вероятност – $P=\frac{6}{12}$ (1т.)



Решение:

Броят на всички триъгълници, получени по посочения начин е 3.4=12.

Построените равностранни триъгълници по искания начин са подобни на $\triangle ABC$ по първи признак. Броят на всички такива триъгълници е 6. Ако приемем, че страната на $\triangle ABC$ е a, то



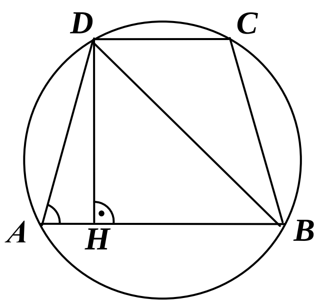
Дължина на страната	Подобни триъгълници на $\triangle ABC$	Брой
$\frac{1}{3}a$	$\triangle A_2B_2C$, $\triangle A_1C_1A$ и $\triangle B_1C_2B$	3
$\frac{2}{3}a$	$\triangle A_1B_1C$, $\triangle A_2C_2A$ и $\triangle B_2C_1B$	3

Търсената вероятност $P=\frac{1}{2}$

28. Критерии за оценяване:

1. За извода, че трапецът е равнобедрен. (1т.)
2. За построяване на височината $DH \perp AB$ $H \in AB$ и намиране $DH=\frac{14}{3}$. (1 т.)
3. За намиране на диагонала $BD=\frac{8\sqrt{7}}{3}$. (2 т.)
4. За намиране на $BH=2\sqrt{7}$. (1 т.)
5. За обосновка, че $BH=\frac{AB+CD}{2}$. (1 т.)
6. За намиране на $AB+CD=4\sqrt{7}$. (1т.)
7. За намиране на $AD+BC=4\sqrt{7}$ (1т.)
8. За извода, че в трапеца може да се впише окръжност (*AD* + *BC* = *AB* + *CD*). (1 т.)
7. За намиране на радиуса на вписаната окръжност $r=\frac{7}{3}$. (1 т.)

Решение:



Щом трапецът е вписан в окръжност, то той е равнобедрен, т.е. *AD* = *BC*. Построяваме $DH \perp AB$ $H \in AB$.

$\triangle ADH$: $DH=AD\sin\sphericalangle BAD=2\sqrt{7}.\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{14}{3}$. От синусова теорема за $\triangle ABD$: $\frac{BD}{\sin\sphericalangle BAD}=2R$ и $BD=2.4.\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{8\sqrt{7}}{3}$. От правоъглния $\triangle BHD$: $BH^2=BD^2-DH^2=\left(\frac{8\sqrt{7}}{3}\right)^2-\left(\frac{14}{3}\right)^2=28$ и $BH=2\sqrt{7}$. В равнобедрения трапец $ABCD$ $BH=\frac{AB+CD}{2}$. Следва, че $AB+CD=4\sqrt{7}$. Но и $AD+BC=2.2\sqrt{7}=4\sqrt{7}$, т.е. *AD* + *BC* = *AB* + *CD*. Следователно в $ABCD$ може да се впише окръжност и нейният диаметър е равен на разстоянието между двете основи. Т. е $2r=DH$, откъдето $r=\frac{1}{2}DH$, $r=\frac{7}{3}$.