МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., ПЛЕВЕН

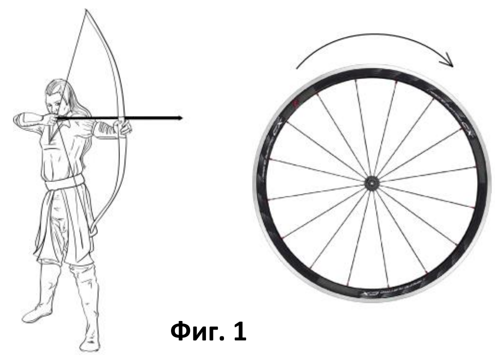
Тема за 7. клас

Задача 1. ***Стреляй в целта***

В тази задача приемаме, че стрелите се движат ***равномерно и праволинейно*** от момента на изстрелване до забиването в мишената. Трите части на задачата са независими.

Част 1. За да спечели принцеса Драупади, принц Арджуна трябва да изстреля стрела, която да мине между спиците на въртящо се колело без да бъде докосната от тях. Колелото има n = 100 много тънки спици и извършва едно пълно завъртане за T = 1 s (виж **Фиг. 1)**. Стрелата е тънка пръчка с дължина l = 60 cm. Принцът я изстрелва със скорост v = 50 m/s. Възможно ли е да спечели принцесата? **[4 т.]**

Забележка: ***n*** спици разделят колелото на ***n*** еднакви сектора.

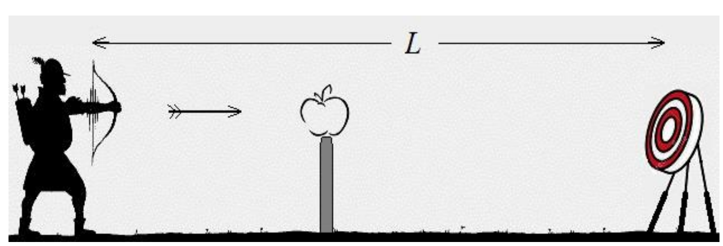


Фиг. 1

Част 2. Робин Худ трябва да изстреля *последователно* три стрели, които да пристигнат в мишената *едновременно*. Той прилага различен опън на тетивата (опънатата нишка на лък, чрез която се изстрелват стрелите) при всеки изстрел, така че стрелите излитат с различна скорост. На **Фиг. 2** е показана връзката между силата, с която се опъват тетивата, и съответната скорост на стрелата. За първата стрела Робин опъва тетивата със сила F = 120 N. Каква сила трябва приложи върху тетивата при втората и третата стрела, така че трите да пристигнат едновременно в мишената, която е на разстояние L = 120 m от Робин? Втората стрела е изстреляна t_0 = 1 s след първата, а третата – t_0 = 1 s след втората. **[4 т.]**

Фиг. 2

Част 3. Вилхелм Тел изстрелва с лъка си стрела, която пронизва ябълка преди да се забие в мишената (виж **Фиг. 3)**. Първоначално стрелата има скорост v_0 = 35 m/s. След пронизването на ябълката скоростта ѝ намалява с 10%. Разстоянието между стрелеца и мишената е L = 100 m. На какво разстояние от Вилхелм трябва да се намира ябълката, така че стрелата да се забие в мишената точно t_0 = 3 s след като е изстреляна? **[2 т.]**



Фиг. 3

Задача 2. ***Солено или сладко***

В 1 g вода може да се разтворят ***най-много*** 0,4 g сол или ***най-много*** 5 g захар. В тази задача разглеждаме солени или сладки разтвори, всеки от тях съставен от 1 g вода и един вид разтворено вещество.

а) Солен или сладък е разтвор с плътност $\rho_0 = 1{,}23\ \mathrm{g/cm^3}$? **[2 т.]**

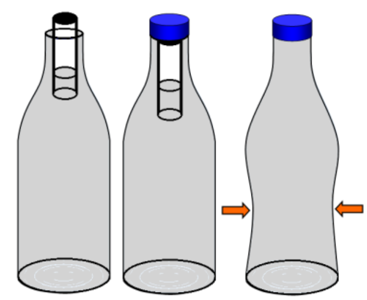
б) Колко е масата на разтвореното вещество в разтвора от подусловие а)? **[3 т.]**

в) Известно ни е, че кухо алуминиево топче не може да плава в солен разтвор, но може да плава в сладък (това може да не е някой от разтворите, разгледани в предишните подточки!). Каква максимална и минимална част от обема на топчето може да бъде заета от кухината? **[5 т.]**

Приемете, че плътностите на солта и на захарта не зависят от това дали веществото е разтворено или не. Плътността на водата е 1 $\mathrm{g/cm^3}$; на солта е 2,1 $\mathrm{g/cm^3}$; на захарта е 1,4 $\mathrm{g/cm^3}$; на алуминия е 2,7 $\mathrm{g/cm^3}$.

Задача 3. ***Флуиди под налягане***

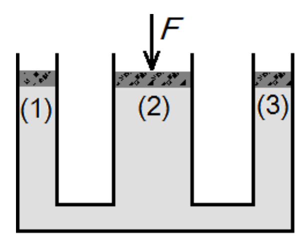
Част 1. В пластмасова бутилка, пълна догоре с вода, е потопена ***с дъното нагоре*** малка епруветка. В епруветката има вода дотолкова, че да плава почти изцяло потопена в бутилката. Затваряме плътно бутилката и силно я стискаме (виж **Фиг. 4**). Вследствие на това, епруветката бавно се придвижва надолу. Когато престанем да стискаме бутилката, епруветката се придвижва нагоре. Без да използвате пресмятания, обяснете защо епруветката потъва при стискане на бутилката. **[3 т.]**



Фиг. 4

Част 2. В тази част гравитационните ефекти се пренебрегват.

а) Бутала (1) и (3) на хидравличната машина на **Фиг. 5** имат площ A_0 а буталото (2) е с площ $3A_0$. Върху буталото (2) е приложен натиск F = 200 N. Какъв натиск трябва да се приложи върху буталата (1) и (3), така че системата да е в равновесие, т.е. буталата да не се движат? **[3 т.]**

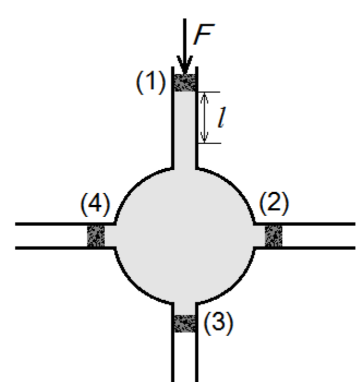


Фиг. 5

Буталата (1), (2), (3) и (4) на хидравличната машина от **Фиг. 6** имат еднаква площ.

б) Буталото (1) се придвижва надолу на разстояние l = 3 cm (виж **Фиг. 6)**. На какво разстояние ще се придвижат другите три бутала? **[2 т.]**

в) Върху бутало (1) е приложен натиск F = 300 N. Какъв натиск трябва да се приложи върху другите три бутала, така че системата да е в равновесие, т.е. буталата да не се движат? **[2 т.]**



Фиг. 6

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г., ПЛЕВЕН

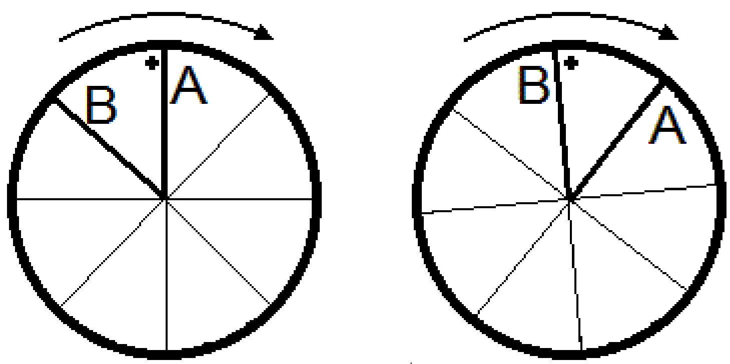
Тема 7. клас, Решения и указания

Задача 1. ***Стреляй в целта***

Част 1.

Максималното време, с което разполага стрелата, за да премине между спиците, е $t=\dfrac{T}{n}=0,01\ \text{s}$. **[2,5 т.]**

Например, ако върхът на стрелата достигне равнината на колелото в момент, в който спица A е в положение „12 часа“ (точката на „пронизване“ е означена на чертежа), то стрелата разполага с време за преминаване само докато съседната спица B на свой ред заеме положение „12 часа“ (в рамките на един оборот на колелото).



Имайки предвид дължината на стрелата, тя се нуждае от време $t_{стрела}=\dfrac{l}{v}=0,012\ \text{s}$. **[1 т.]**

Сравняваме: $t_{стрела}>t$, следователно принцът не може да спечели принцесата. **[0,5 т.]**

Забележка: *Би могъл да я спечели, ако скъси стрелата си с поне 10 cm.*

Част 2.

Първоначалното опъване е със сила $F_1=120\ \text{N}$, следователно скоростта на първата стрела е $v_1=40\ \text{m/s}$. **[0,5 т.]**

Времето, за което първата стрела достига мишената, е $t=\dfrac{L}{v_1}=\dfrac{120}{40}=3\ \text{s}$. **[0,5 т.]**

Втората стрела е изстреляна t_0 след първата със скорост v_2. Следователно $t=t_0+\dfrac{L}{v_2}$,

откъдето $v_2=\dfrac{L}{t-t_0}=\dfrac{120}{3-1}=60\ \text{m/s}$. **[1 т.]**

От графиката – съответната сила на опъване е $F_2=180\ \text{N}$. **[0,5 т.]**

Третата стрела има скорост v_3. Изстреляна е t_0 след втората и $2t_0$ след първата. Следователно $t = 2t_0 + \dfrac{L}{v_3}$, откъдето $v_3 = \dfrac{L}{t-2t_0} = \dfrac{120}{3-2} = 120\ \text{m/s}$. **[1 т.]**

От графиката – съответната сила на опъване е $F_3 = 360\ \text{N}$. **[0,5 т.]**

Част 3.

Ако разстоянието от Вилхелм до ябълката е x, то от ябълката до мишената е $L-x$.

Времето, за което стрелата ще долети при ябълката е $t_1 = \dfrac{x}{v_0}$; времето, за което стрелата ще измине разстоянието от ябълката до мишената е $t_2 = \dfrac{L-x}{0,9v_0}$. **[0,5 т.]**

От условието следва, че $t_1 + t_2 = t_0$. Заместваме изразите за t_1 и t_2, т.е. $t_0 = \dfrac{x}{v_0} + \dfrac{L-x}{0,9v_0}$, откъдето $x = 10L - 9t_0v_0 = 10\cdot 100 - 9\cdot 3\cdot 35 = 55\ \text{m}$. **[1,5 т.]**

Задача 2. *Солено или сладко*

а)

Поради избора на стойност за $\rho_0 = 1,23\ \text{g/cm}^3$*, определянето на вида на разтвора – солен или сладък, може да стане само след намиране на плътността на солен разтвор, приготвен с максималното количество сол, т.е. най-соления разтвор.*

В подточка ***а)*** *се дават точки само за най-соления разтвор.*

Ако е намерена плътността на най-сладкия разтвор, то се дават съответните точки от подточка ***в)****.*

За най-соления разтвор:

Обемът на $m_{\text{вода}} = 1\ \text{g}$ вода е $V_{\text{вода}} = 1\ \text{cm}^3$.

Обемът на 0,4 g сол е $V_{\text{сол}} = \dfrac{m_{\text{сол}}}{\rho_{\text{сол}}} = \dfrac{0,4}{2,10} = 0,19\ \text{cm}^3$. **[0,2 т.]**

Масата на най-соления разтвор е $m_{\text{солен р-р}} = m_{\text{сол}} + m_{\text{вода}} = 1 + 0,40 = 1,40\ \text{g}$. **[0,4 т.]**

Обемът на най-соления разтвор е $V_{\text{солен р-р}} = V_{\text{вода}} + V_{\text{сол}} = 1 + 0,19 = 1,19\ \text{cm}^3$. **[0,4 т.]**

Плътността на най-соления разтвор е $\rho_{\text{солен р-р}} = \dfrac{m_{\text{солен р-р}}}{V_{\text{солен р-р}}} = \dfrac{1,40}{1,19}\ \text{g/cm}^3 \approx 1,18\ \text{g/cm}^3$. **[0,5 т.]**

Разтворът е сладък, тъй като плътността му е по-голяма от максималната плътност за солен разтвор. **[0,5 т.]**

б)

Плътността на разтвора е $\rho_0 = \dfrac{m_0}{V_0} = 1,23\ \text{g/cm}^3$.

Масата m_0 на разтвора, приготвен от 1 g вода (по условие) и маса m_x захар, е $m_0 = m_{\text{вода}} + m_x$. **[0,5 т.]**

Обемът V_0 на разтвор, приготвен с обем V_x захар, е $V_0 = V_{\text{вода}} + V_x$. **[0,5 т.]**

От друга страна (плътността на захарта $\rho_{\text{захар}}$ е известна) $V_x = \dfrac{m_x}{\rho_{\text{захар}}}$. **[0,5 т.]**

Заместваме $\rho_0 = \dfrac{m_0}{V_0} = \dfrac{m_{\text{вода}} + m_x}{V_{\text{вода}} + V_x} = \dfrac{m_{\text{вода}} + m_x}{V_{\text{вода}} + \dfrac{m_x}{\rho_{\text{захар}}}}$, следователно $m_x = \rho_{\text{захар}} \dfrac{\rho_0 V_{\text{вода}} - m_{\text{вода}}}{\rho_{\text{захар}} - \rho_0}$ или

$m_x = 1,40 \dfrac{1,23-1}{1,40-1,23} \approx 1,89$ g. **[1,5 т.]**

в)

За плътността на най-сладкия разтвор:

Обемът на 5 g захар е $V_{\text{захар}} = \dfrac{m_{\text{захар}}}{\rho_{\text{захар}}} = \dfrac{5}{1,40} = 3,57\ \text{cm}^3$. **[0,2 т.]**

Масата на най-сладкия разтвор е $m_{\text{сладък р-р}} = m_{\text{захар}} + m_{\text{вода}} = 1 + 5 = 6$ g. **[0,4 т.]**

Обемът на най-сладкия разтвор е $V_{\text{сладък р-р}} = V_{\text{вода}} + V_{\text{захар}} = 1 + 3,57 = 4,57\ \text{cm}^3$. **[0,4 т.]**

Плътността на най-сладкия разтвор е $\rho_{\text{сладък р-р}} = \dfrac{m_{\text{сладък р-р}}}{V_{\text{сладък р-р}}} = \dfrac{6}{4,57}\ \text{g/cm}^3 \approx 1,31\ \text{g/cm}^3$. **[0,5 т.]**

За да плава топчето в сладък, но не и в солен разтвор, средната му плътност трябва да е по-голяма от тази на най-соления разтвор и по-малка от плътността на най-сладкия: $\rho_{\text{солен р-р}} < \rho_{\text{топче}} < \rho_{\text{сладък р-р}}$ или $1,18\ \text{g/cm}^3 < \rho_{\text{топче}} < 1,31\ \text{g/cm}^3$. **[1 т.]**

Нека кухината заема част $V_{\text{кухина}} = x V_{\text{топче}}$ от обема на топчето. Тогава алуминият заема обем $V_{\text{алуминий}} = (1-x) V_{\text{топче}}$.

Масата на топчето е $m_{\text{топче}} = \rho_{\text{алуминий}} V_{\text{алуминий}} = (1-x)\rho_{\text{алуминий}} V_{\text{топче}}$. **[0,5 т.]**

Средната плътност на топчето е $\rho_{\text{топче}} = \dfrac{m_{\text{топче}}}{V_{\text{топче}}} = \dfrac{(1-x)\rho_{\text{алуминий}} V_{\text{топче}}}{V_{\text{топче}}} = (1-x)\rho_{\text{алуминий}}$. **[0,5 т.]**

Най-малката средна плътност на топчето определя <u>**максималната кухина**</u>. **[0,25 т.]**

Тя се намира от равенството $\rho_{\text{топче}} = \rho_{\text{солен р-р}}$ или $1,18 = (1-x)2,7$. Тогава $x \approx 0,56$. **[0,5 т.]**

Най-голямата средна плътност на топчето определя <u>**минималната кухина**</u>. **[0,25 т.]**

Тя се намира от равенството $\rho_{\text{топче}} = \rho_{\text{сладък р-р}}$ или $1,31 = (1-x)2,7$. Тогава $x \approx 0,51$. **[0,5 т.]**

Задача 3. *Флуиди под налягане*

Част 1. *Точки се дават за следното или еквивалентно обяснение (може и нарисувано) :*

При стискане на бутилката, налягането в нея се повишава. **[0,5 т.]**

Увеличеното налягане се предава и на водата в епруветката. **[1 т.]**

В резултат, още малко от водата навлиза в епруветката, а въздухът в нея намалява обема си. **[1 т.]**

Епруветката, заедно с водата, става по-тежка (т.е. силата на тежестта става по-голяма от изтласкващата) и потъва. **[0,5 т.]**

Част 2.

а)

Вследствие от закона на Паскал, налягането p, създадено от натиска върху бутало (2), се предава еднакво във всички посоки, включително върху върху буталата (1) и (3). **[1 т.]**

Това налягане е $p = \dfrac{F}{3A_0}$. **[0,5 т.]**

Налягането върху буталата (1) и (3) е еднакво. За да не се движат другите две бутала, върху всяко от тях трябва да действа сила (със същата посока като F) $F_1 = pA_0 = \dfrac{F}{3A_0}A_0 = \dfrac{F}{3} \approx 67\ \mathrm{N}$. **[1,5 т.]**

б)

Вследствие от закона на Паскал, всяко от буталата (2), (3) и (4) ще се премести на едно и също разстояние. **[1 т.]**

Тъй като веществото (флуидът) се запазва, то всяко бутало ще се премести в посока „навън“ на разстояние $\dfrac{l}{3} = 1\ \mathrm{cm}$. **[1 т.]**

в)

Вследствие от закона на Паскал налягането върху буталата (2), (3) и (4) е еднакво. **[1 т.]**

Тъй като в този случай буталата са с еднаква площ, то върху тях трябва да се приложи същия по големина натиск, т.е. $F_{2,3,4} = 300$ N. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., Плевен

Тема за 8. клас

Задача 1. Условията А и Б са независими.

А. Тяло започва движението си от състояние на покой. Първите t секунди тялото се движи с ускорение a, следващите $2t$ секунди – с ускорение $a/2$ и още $3t$ секунди – с ускорение $a/3$. Определете средната скорост на движение на тялото за целия интервал от време.

Б. Тяло, движещо се равноускорително, през първите $t = 4\,\mathrm{s}$ от наблюдение на движението му изминава път $s_1 = 24\,\mathrm{m}$. През следващите $t = 4\,\mathrm{s}$ тялото изминава път $s_2 = 64\,\mathrm{m}$. Какъв път ще измине тялото през следващия трети интервал $t = 4\,\mathrm{s}$?

Задача 2. Консуматор със съпротивление R е включен към източник, при което токът във веригата е I. Възможно е свързване на допълнителен консуматор във веригата, при което токът във веригата се променя с η част от първоначалния ток I, като $\eta < 1$.

а) Какво съпротивление R_1 трябва да има консуматор, който се свързва последователно на първоначалния при изброените условия?

б) Какво трябва да бъде съпротивлението R_2 на консуматор, който се свързва успоредно на първоначалния?

в) На колко е равна общата мощност на консуматорите P_1 при последователно свързване и P_2 при успоредно свързване?

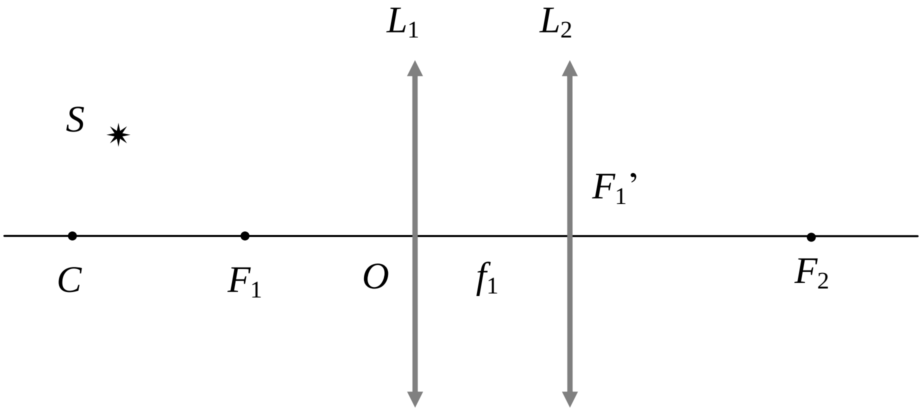
Задача 3. Част А: Две успоредни събирателни лещи L_1 и L_2 имат обща главна оптична ос, но различни фокусни разстояния ($f_1 < f_2$). Втората леща се намира във фокалната равнина на първата леща. Точков светлинен източник S се намира над главната оптична ос и пред първата леща на разстояние по-голямо от f_1 и по-малко от $2f_1$. Постройте образа S' на светлинния източник. Обяснете хода на използваните при построението на образа лъчи.

Част Б: В описания в част А случай лещата L_2 се заменя с плоско огледало *M*. Постройте образа S' на светлинния източник в този случай. Обяснете хода на използваните при построението на образа лъчи.

*Всяка задача се оценява максимално с **10 точки**.*

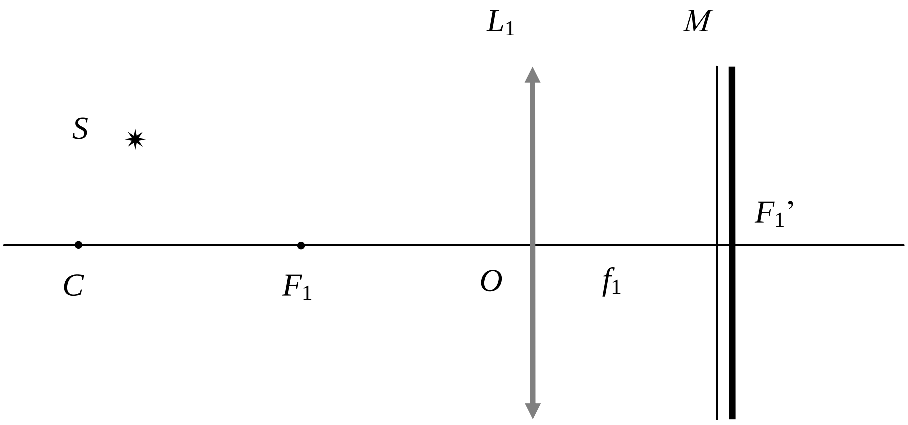
ЛИСТ ЗА ОТГОВОРИ НА ЗАДАЧА 3

ЧАСТ А:



фиг. 1

ЧАСТ Б:



фиг. 2

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., Плевен

Тема за 8 клас, Решения и указания

Задача 1. А. По определение средната скорост на движение за посочения интервал от време е

$$v = \frac{s}{t_{\text{общ}}},$$ **[0,5 т.]**

където общият изминат път $s = s_1 + s_2 + s_3$ **[0,5 т.]**, а $t_{\text{общ}} = 6t$ **[0,5 т.]**. През първия интервал t движението е равноускорително без начална скорост и

$$s_1 = \frac{at^2}{2}.$$ **[0,5 т.]**

През втория времеви интервал движението е равноускорително с начална скорост $v_0 = at$ **[0,5 т.]**. Тогава имаме

$$s_2 = v_0(2t) + \frac{(a/2)(2t)^2}{2} = 3at^2.$$ **[0,5 т.]**

През третия времеви интервал движението е също равноускорително с начална скорост, но нейната стойност е $v_0 = at + (a/2)(2t) = 2at$ **[0,5 т.]**. Тогава изминатият път е

$$s_3 = v_0(3t) + \frac{(a/3)(3t)^2}{2} = 6at^2 + \frac{3at^2}{2} = \frac{15}{2}at^2.$$ **[0,5 т.]**

Като заместим получените стойности във формулата за средната стойност на скоростта получаваме

$$v = \frac{s}{t_{\text{общ}}} = \frac{11}{6}at.$$ **[0,5 т.]**

Възможно е и друго решение. Тъй като движението във всеки интервал от време е равноускорително, то може да бъде заменено с равномерно, чиято скорост е равна на средната скорост в съответния интервал **[0,5 т.]** – $v_{\text{ср}} = (v_{\text{нач}} + v_{\text{кр}})/2$ **[0,5 т.]**. Тогава имаме

$$v_1 = \frac{at}{2}, \quad v_2 = \frac{3at}{2}, \quad v_3 = \frac{5at}{2},$$ **[1,5 т.]**

при което получаваме

$$v = \frac{s}{t_{\text{общ}}} = \frac{v_1 t + v_2(2t) + v_3(3t)}{6t} = \frac{11}{6} at. \qquad \textbf{[2 т.]}$$

Б. Пътят, изминат от тялото за първия интервал t, е

$$s_1 = v_0 t + \frac{at^2}{2}, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където началната скорост v_0 и ускорението a са неизвестни величини. През втория интервал t началната скорост е $v = v_0 + at$ **[0,5 т.]** при същото ускорение a. Тогава изминатият през този интервал път е

$$s_2 = vt + \frac{at^2}{2} = v_0 t + \frac{3at^2}{2}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

От двата израза можем да определим началната скорост v_0 и ускорението a. Тогава получаваме

$$v_0 = \frac{3s_1 - s_2}{2t} = 1\ \text{m/s}, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

$$a = \frac{s_2 - s_1}{t^2} = 2{,}5\ \text{m/s}^2. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Изминатото разстояние през третия интервал $t = 4\ \text{s}$ става с начална скорост

$$u = v_0 + 2at, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

като изминатото разстояние е

$$s_3 = ut + \frac{at^2}{2} = v_0 t + \frac{5at^2}{2} = 104\ \text{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Задача 2. а) При последователно свързване общото съпротивление $R_1 + R > R$ **[0,5 т.]**, при което токът $I_1 < I$ **[0,5 т.]**, като

$$I_1 = (1 - \eta) I. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

От друга страна имаме $I = U / R$, при което можем да запишем

$$I_1 = \frac{U}{R_1 + R} = \frac{I}{(R_1 / R) + 1} = (1 - \eta) I. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тогава получаваме

$$R_1 = \frac{\eta}{1 - \eta} R. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) При успоредно свързване общото съпротивление $R_2R/(R_2+R)<R$ **[0,5 т.]**, при което токът $I_2>I$ **[0,5 т.]**, като

$$I_2=(1+\eta)I\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

От друга страна имаме

$$I_2=\frac{U}{R_2R/(R_2+R)}=\frac{I[(R_2/R)+1]}{R_2/R}=(1+\eta)I\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Тогава получаваме

$$R_2=\frac{1}{\eta}R\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

в) В случая на последователно свързване мощността на консуматорите във веригата е

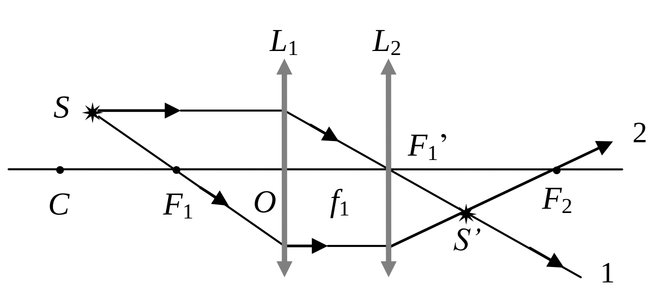
$$P_1=I_1^2(R_1+R)=(1-\eta)P\,, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

докато при успоредно свързване на консуматорите имаме

$$P_2=I_2^2\,\frac{R_2R}{R_2+R}=(1+\eta)P\,, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

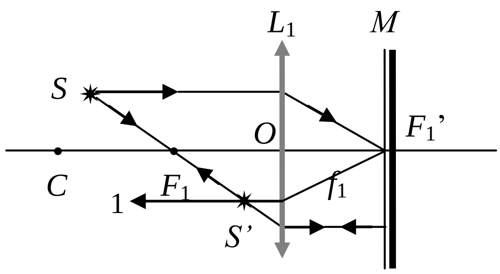
където $P=I^2R$ е мощността на консуматора, включен първоначално във веригата.

Задача 3. ЧастA: На фиг.1 е показано построението на образа S' **[2,5 т.]**, който се получава от пресичането на два лъча. Лъчът 1, който излиза от източника, е успореден на главната оптична ос **[0,5 т.]**. Той се пречупва от лещата L_1, като се насочва към фокуса й F_1' **[0,5 т.].** Фокусът на лещата L_1 съвпада с центъра на лещата L_2 и при преминаването през него лъчът 1 не се пречупва **[0,5 т.]**. Лъчът 2 минава през фокуса F_1, пречупва се от лещата L_1 и се разпространява като успореден на главната оптична ос **[0,5 т.]**. Той пада на лещата L_2, пречупва се, като минава през фокуса й F_2 **[0,5 т.]**.



фиг. 1

Част Б: На фиг.2 е показано построението на образа S' **[2,5 т.]**, който се получава от пресичането на два лъча. Лъчът 1, който излиза от източника, е успореден на главната оптична ос **[0,5 т.]**. Той се пречупва от лещата L_1, като се насочва към фокуса й F_1' **[0,5 т.]**. Фокусът на лещата L_1 лежи върху плоското огледало M и при отражение от него лъчът 1 се връща към лещата. След пречупване лъчът 1 се разпространява успоредно на главната оптична ос **[0,5 т.]**. Лъчът 2 минава през фокуса F_1, пречупва се от лещата L_1 и се разпространява като успореден на главната оптична ос **[0,5 т.]**. Той пада перпендикулярно на плоското огледало M и след отражение от него се връща към лещата L_1, пречупва се, като минава през фокуса F_1 **[0,5 т.]**.



фиг. 2

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., ПЛЕВЕН

Тема за 9. клас

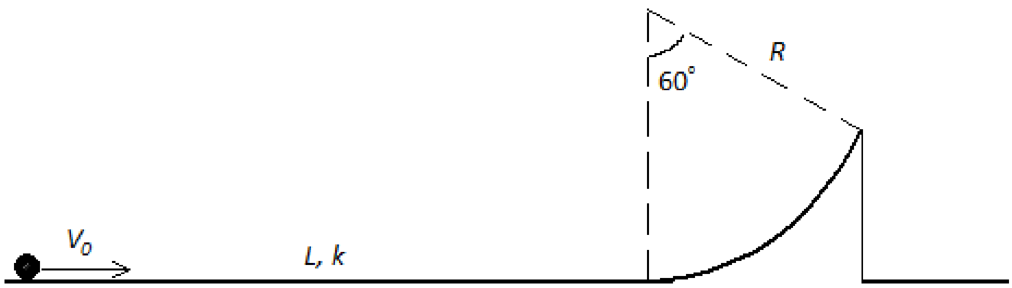
Задача 1. (Механика)
Малко топче с маса m се намира в началото на хоризонтална повърхност с дължина L и коефициент на триене k, както е показано на фиг. 1. Хоризонталната повърхност преминава в дъга от окръжност с нулев коефициент на триене, с радиус R и ъгъл $\alpha = 60^{o}$. В даден момент на тялото се придава начална скорост V_0 в посока, показана на фигурата.

а) Намерете каква трябва да бъде минималната начална скорост V_0, така че тялото да преодолее дъгата и да продължи хода си вдясно от нея. **[4 т.]**

б) Нека началната скорост на тялото да е такава, че то да достигне върха на дъгата (без да падне), след което да започне да се спуска обратно по дъгата. Намерете какво разстояние ще измине тялото по хоризонталната повърхност преди да спре своя ход. **[3 т.]**

в) Нека началната скорост на тялото да е такава, че то да спре още в началото на дъгата. Намерете средната стойност на мощността на силата на триене по времето. **[3 т.]**

Упътване: средната стойност на мощността по времето е равна на изменението на механичната енергия разделено на времето, за което се случва това изменение.



Фиг. 1

Задача 2. (електричество)
Пет еднакви крушки и два ключа (C_1 и C_2) са свързани в схема, както е показано на фиг. 2. Към двата края на схемата се включва източник на постоянно напрежение, при което крушките светват. Нека с P_1, P_2, P_3, P_4, P_5 да означим мощността на светене на крушките. Намерете отношенията P_2/P_1, P_3/P_1, P_4/P_1 и P_5/P_1 за следните случаи:

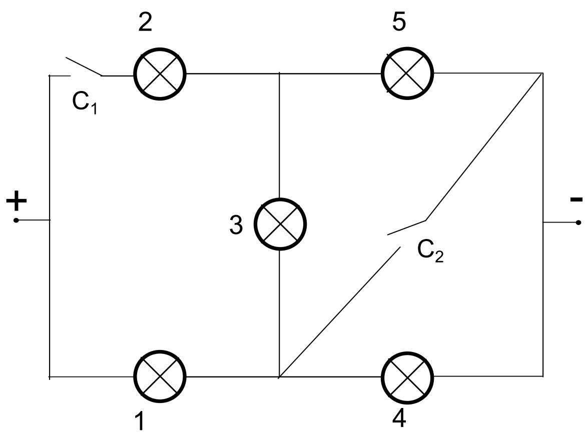
а) C_1 и C_2 са отворени; **[2.5 т.]**

б) C_1 и C_2 са затворени; **[2.5 т.]**

в) C_1 е отворен, а C_2 затворен; **[2.5 т.]**

г) C_1 е затворен, а C_2 е отворен. **[2.5 т.]**

Считайте, че за крушките е изпълнен законът на Ом и тяхното съпротивление не зависи от тока и приложеното напрежение.



Фиг. 2

Задача 3. (Електростатика)
Три заряда с големина q са закрепени неподвижно във върховете на равностранен триъгълник. Четвърти заряд със същата големина q е поставен на безкрайно голямо разстояние от триъгълника. Зарядите са положителни.

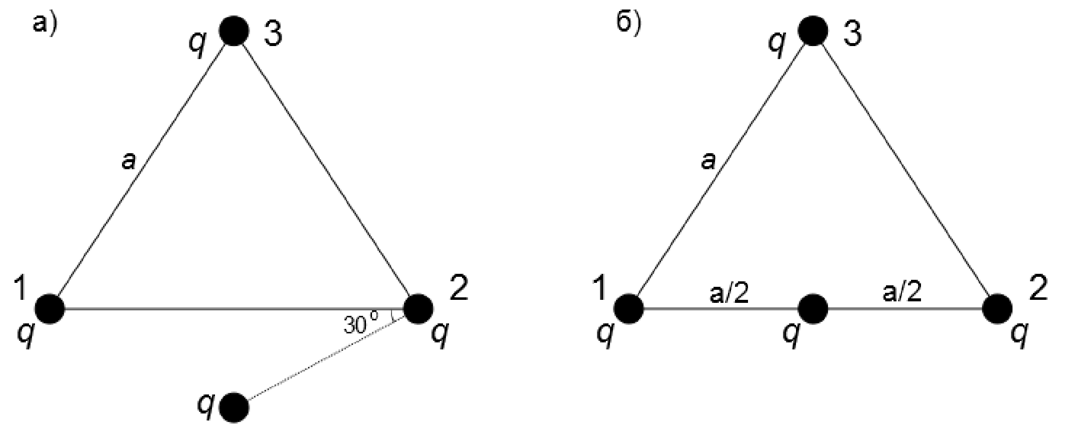
а) Намерете каква работа трябва да се извърши, за да се доближи (придърпа) свободният заряд до триъгълника, както е показано на фиг. 3 а). Във фигурата свободният заряд е на равни разстояния от заряди 1 и 2. **[3 т.]**

б) Намерете с каква сила действа триъгълникът на свободния заряд **[3 т.]** и с каква сила действа свободният заряд на триъгълника. **[1 т.]**

в) Каква допълнителна работа трябва са се извърши, за да се премести свободният заряд от положението, изобразено на фиг. 3 а), до положението, изобразено на фиг. 3 б)? Във фиг. 3 б) зарядът лежи на основата на триъгълника на равни разстояния от заряди 1 и 2. **[3 т.]**

Полезни формули:
потенциал на електростатичното поле на точков заряд: $\varphi = \dfrac{kq}{r}$ ($k = 9.10^9$ N·m^2/C^2);

Питагорова теорема: $a^2 + b^2 = c^2$, където a и b са дължините на катетите на правоъгълен триъгълник, а c е хипотенузата.



Фиг. 3

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
8 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г., ПЛЕВЕН
Тема 9. клас, Решения и указания

Задача 1. (Механика)

а) С E_1 и E_2 ще означим механичните енергии на тялото съответно в началото на движението, където тялото е в крайно лява позиция, и в края, където тялото е на връхната точка на дъгата. Имаме следната връзка:

$$E_2 - E_1 = A, \textbf{ [0.5 т.]}$$

където A е работата на силата на триене, натрупана при движението по хоризонталната повърхност. Имаме $A = -kmgL$ **[0.5 т.]**, $E_1 = \frac{mv_0^2}{2}$ **[0.5 т.]** и $E_2 = \frac{mv^2}{2} + mgh$ **[0.5 т.]**, където v е скоростта на тялото във връхната точка на дъгата. От геометрични съображения получаваме, че $h = R/2$ **[0.5т]** (използваме, че в правоъгълен триъгълник отношението на катета и хипотенузата е 1/2 при срещулежащ ъгъл от 30^o). Следователно:

$$\frac{mv_0^2}{2} - \left(\frac{mv^2}{2} + \frac{mgR}{2}\right) = kmgL. \textbf{ [0.5 т.]}$$

За да падне тялото, трябва да е изпълнено $v > 0$, откъдето за началната скорост получаваме

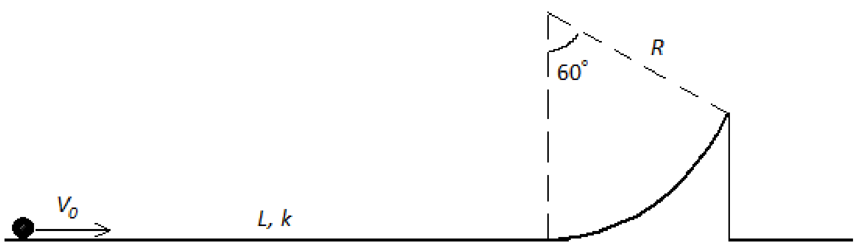
$$v_0 > \sqrt{g(2kL + R)}. \textbf{ [1 т.]}$$

б) В този случай имаме $E_1 = mgh$ **[0.5 т.]**, $E_2 = 0$ **[0.5 т.]** и $A = -kmgL_2$ **[0.5 т.]**, където E_1 е механичната енергия на тялото в началната позиция (на върха на дъгата), E_2 е механичната енергия на тялото в покой, след като то е изминало разстояние L_2 по хоризонталната повърхност, а A е работата на силата на триене.
Имаме $mgh = kmgL_2$ **[0.5 т.]**. Отново заместваме $h = R/2$ и получаваме

$$L_2 = \frac{R}{2k} \textbf{ [1 т.]}.$$

в) Движението на тялото по хоризонталната повърхност е равнозакъснително с ускорение a. Имаме $F = kmg = ma$ **[0.2 т.]**, откъдето получаваме $a = kg$ **[0.2 т.]**. За изминатото разстояние x имаме $x = v_0 t - \frac{kgt^2}{2}$ **[0.3 т.]**, а за скоростта имаме $v = v_0 - kgt$ **[0.3 т.]**. Нека означим с T времето, за което тялото изминава пътя с дължина L (до основата на дъгата, където движението спира). Така намираме $v_0 = kgT$ **[0.2 т.]**, а оттам получаваме $T = \sqrt{\frac{2L}{kg}}$ **[0.5т]**. За пълната работа на силата на триене намираме $A = -kmgL$ **[0.3 т.]**. Така окончателно за средната мощност получаваме

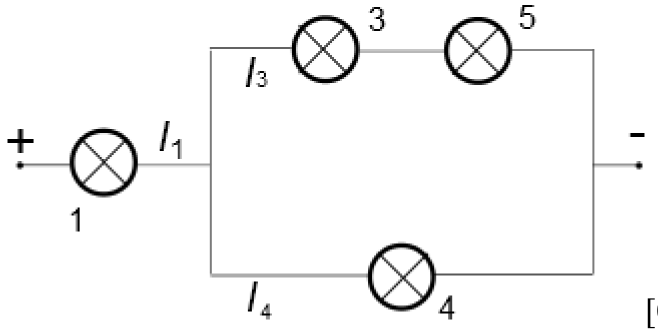
$$P = \frac{A}{T} = -m\sqrt{\frac{(kg)^3 L}{2}} \textbf{ [1 т.]}.$$



Фиг. 1

Задача 2. (Електричество)

а) C_1 и C_2 са отворени. Еквивалентната схема е следната (ток през втората крушка не протича):



$[\mathbf{0.5}\ \text{т.}]$

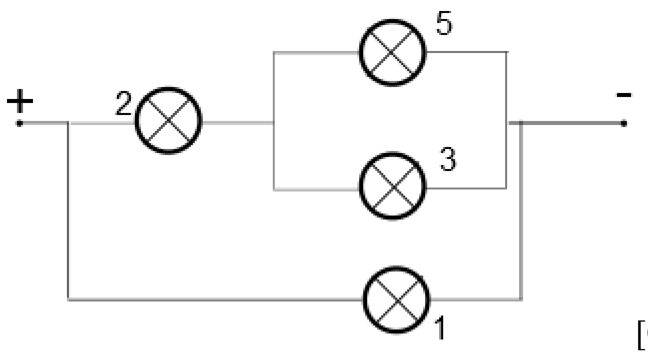
С I_1, I_3 и I_4 са означени токовете, протичащи съответно през крушките 1, 3 и 4. Изпълнено е $I_3 = I_5$. За токовете намираме следната връзка:

$$I_2 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_3 = \frac{I_1}{3}\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_4 = \frac{2I_1}{3}\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_5 = \frac{I_1}{3}\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}].$$

Тъй като за всяка крушка е изпълнен законът на Ом $U = R\,I$, за мощността имаме $P = I^2R$, където R е съпротивлението на всяка крушка. Следователно за мощностите получаваме следната връзка:

$$\frac{P_2}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{9}[\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_4}{P_1} = \frac{4}{9}[\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_5}{P_1} = \frac{1}{9}\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}].$$

б) C_1 и C_2 са затворени. Еквивалентната схема е следната (ток през четвъртата крушка не протича):



$[\mathbf{0.5}\ \text{т.}]$

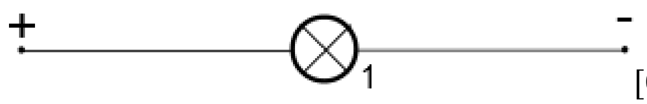
За токовете намираме следната връзка:

$$I_2 = \frac{2}{3}I_1\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_3 = \frac{I_1}{3}\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_4 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}],\qquad I_5 = \frac{I_1}{3}\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}].$$

За мощностите получаваме следната връзка:

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{4}{9}\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_3}{P_1} = \frac{1}{9}\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_4}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}],\qquad \frac{P_5}{P_1} = \frac{1}{9}\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}].$$

в) C_1 е отворен, а C_2 затворен. Еквивалентната схема е следната (ток протича само през първата крушка):



$[\mathbf{0.5}\ \text{т.}]$

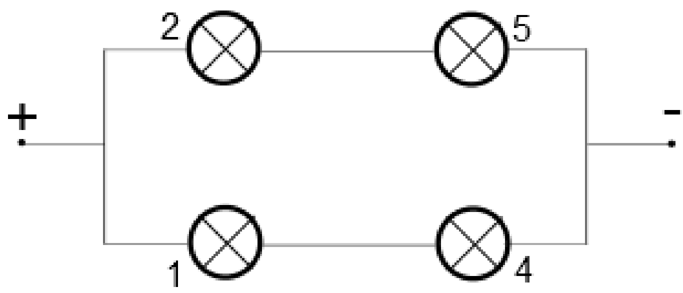
За токовете намираме следната връзка:

$$I_2 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}], \qquad I_3 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}], \qquad I_4 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}], \qquad I_5 = 0\ [\mathbf{0.2}\ \text{т.}].$$

За мощностите получаваме следната връзка:

$$\frac{P_2}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_3}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_4}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_5}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}].$$

г) C_1 е затворен, а C_2 е отворен. Поради симетрията в електрическата схема ток не протича през крушка 3 и следователно еквивалентната схема е:



$[\mathbf{0.5}\ \text{т.}]$

За токовете намираме следната връзка:

$$I_1 = I_2 = I_4 = I_5,\ I_3 = 0.$$ **[по 0.2 т. за равенство]**

За мощностите получаваме:

$$\frac{P_2}{P_1} = 1\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_3}{P_1} = 0\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_4}{P_1} = 1\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}], \qquad \frac{P_5}{P_1} = 1\ [\mathbf{0.3}\ \text{т.}].$$

Задача 3. (Електростатика)

а) Работата A намираме чрез потенциала на електричното поле $\varphi_а$, създадено от триъгълника, в точката, където е поставен зарядът q:

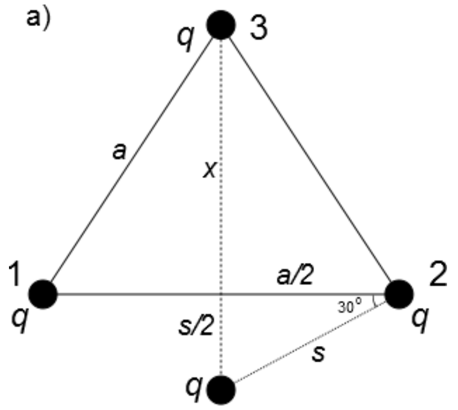
$$A = q\,\varphi_а$$ **[0.5 т.]**

Потенциалът $\varphi_а$ е сума от потенциалите на трите заряда в триъгълника:

$$\varphi_а = k\frac{q}{s_1} + k\frac{q}{s_2} + k\frac{q}{s_3}$$ **[0.5 т.]**,

където s_1, s_2 и s_3 са разстоянията между свободния заряд и зарядите в точки 1, 2 и 3. Изпълнено е $s_1 = s_2 = s$.

Използваме Питагорова теорема, за да пресметнем разстоянието s: $\frac{s^2}{4}+\frac{a^2}{4}=s^2$ **[0.2 т.]**, като използваме свойството, че в правоъгълен триъгълник с ъгъл от 30 градуса отношението между катета и хипотенузата е 1/2 (виж фигурата) **[0.2 т.]**.



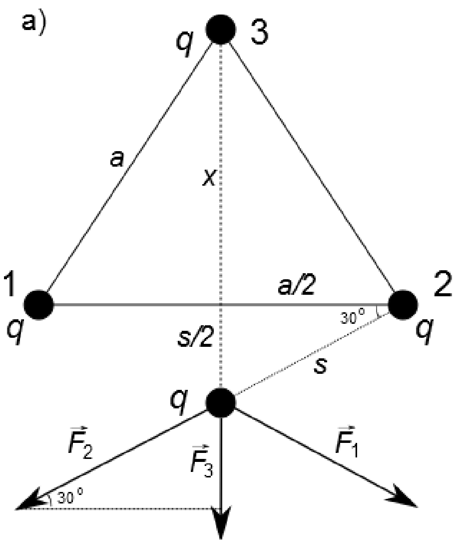
Така за s намираме: $s=\frac{a}{\sqrt{3}}$ **[0.1 т]**. По същия начин за височината x получаваме $x=\frac{\sqrt{3}}{2}a$ **[0.1 т.]**. Намираме s_3 като сума от височината x и разстоянието $s/2$:

$$s_3=\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{2a}{\sqrt{3}}.\ \textbf{[0.1 т.]}$$

Така получаваме: $\varphi_\text{a}=k\frac{q}{a}\frac{5\sqrt{3}}{2}$ **[0.3 т.]** и съответно

$$\text{A}=k\frac{q^2}{a}\frac{5\sqrt{3}}{2}\ \textbf{[1 т.]}.$$

б) Силата, с която действат зарядите от триъгълника върху свободния заряд, е векторна сума от сили: $\vec{F}=\overrightarrow{F_1}+\overrightarrow{F_2}+\overrightarrow{F_3}$ [**1** т.]. От съображения за симетрия силата $\vec{F}$ е с вертикално направление (виж фигурата долу).



Проекциите на $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_2}$ във вертикално направление получаваме като разделим големините им на 2 (имаме срещулежащ ъгъл от 30 градуса). Така големината на пълната сила $\vec{F}$, която бележим с F, е равна на

$$F = F_1 + F_3 \textbf{ [1 т.]},$$

където F_1 и F_3 са големините на $\overrightarrow{F_1}$ и $\overrightarrow{F_3}$ и сме отчели, че $F_1 = F_2$. Следователно имаме

$$F = \frac{kq}{s^2} + \frac{kq}{(x+s/2)^2} = \frac{15}{4}\frac{kq}{a^2} \textbf{ [1 т.]}.$$

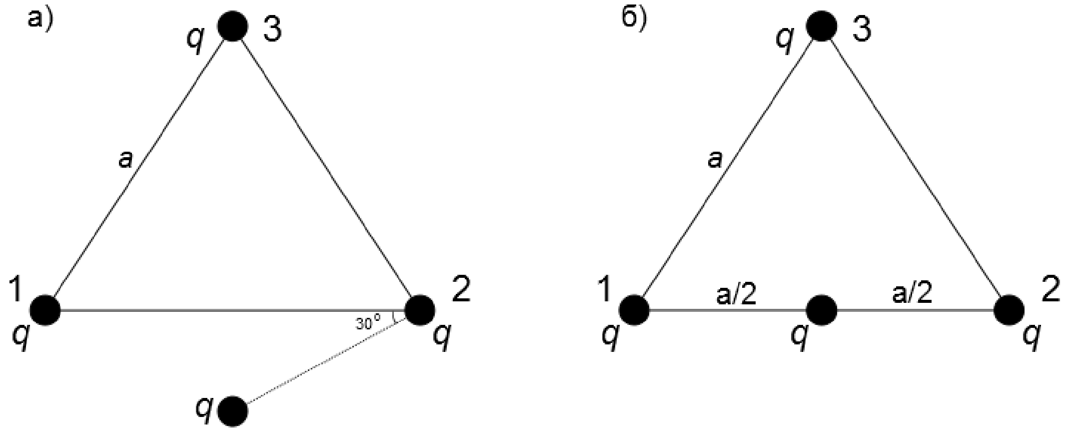
От третия принцип на Нютон следва, че големината на силата, с която свободният заряд действа на триъгълника, е равна на силата F, с която триъгълникът действа на свободния заряд **[1т]**.

в) Допълнителната работа A може да се пресметне чрез напрежението между двете точки (виж фигурата долу):

$$\text{A} = q(\varphi_б - \varphi_а) \textbf{ [1 т.]},$$

където $\varphi_б$ е потенциалът на свободния заряд в положението, указано във фиг. 3 б). Изведохме $\varphi_а = k\frac{q}{a}\frac{5\sqrt{3}}{2}$. За $\varphi_б$ имаме $\varphi_б = kq\left(\frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{1}{\left(\frac{a}{2}\right)} + \frac{1}{x}\right) = \frac{kq}{a}\frac{2(6+\sqrt{3})}{3}$ **[1 т.]**, където x е разстоянието между свободния заряд и заряда в точка 3 (виж фигурата долу). Следователно за допълнителната работа получаваме

$$\text{A} = \frac{kq^2}{a}\frac{(24-11\sqrt{3})}{6} \textbf{ [1 т.]}.$$



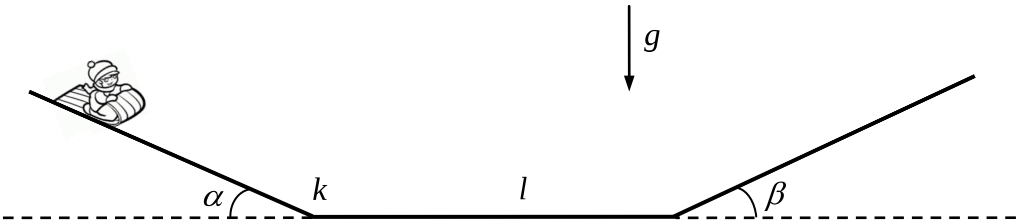
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., ПЛЕВЕН

Тема за 10. клас

<u>Задача 1</u>. Пързаляне с шейна.



Фиг. 1

Момче се спуска с шейна по склон с ъгъл $\alpha = 30^\circ$ спрямо хоризонта, както е показано на фиг. 1. Общата маса на момчето и шейната е $m = 40\,\mathrm{kg}$. В началния момент момчето се намира на височина $h_0 = 10\,\mathrm{m}$ спрямо подножието на склона и е с нулева скорост. След време $t = 3{,}5\,\mathrm{s}$ от началото на спускането шейната се намира в подножието на склона. Приемете, че коефициентът на триене при хлъзгане k не се променя по протежение на трасето, а земното ускорение е $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

а) Определете коефициента на триене при хлъзгане k. **[2 т]**

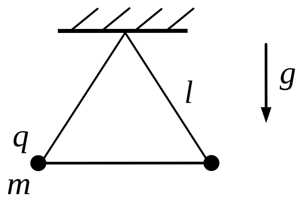
б) След като достига подножието на склона, шейната продължава да се движи по хоризонтален участък и изминава разстояние l преди да достигне до друг склон с неизвестен наклон β ($\tan\beta > k$). Ако е известно, че големината на скоростта на шейната намалява с 20% при преминаването на хоризонталния участък, намерете на колко е равно l. **[3 т]**

в) След това шейната продължава движението си по склона с неизвестен наклон, като достига максимална височина h. От тази височина момчето се спуска свободно обратно по склона и преминава отново през хоризонталния участък, като в подножието на първия склон окончателно спира. Определете стойността на h. На колко е равен ъгълът β? **[4 т]**

г) Намерете работата A_f, която извършва силата на триене по време на движението на шейната. **[1 т]**

<u>Упътване:</u> По време на движението на шейната върху склоновете силата на тежестта може да се представи като векторна сума на две сили, едната от които с големина $G_X = mg\sin\theta$ е успоредна на склона, а втората с големина $G_Y = mg\cos\theta$ е перпендикулярна на склона и насочена към него. С θ е означен ъгълът на наклона спрямо хоризонта, който в нашия случай може да бъде α или β.

Задача 2. Заредени топчета.



Фиг. 2

Две еднакви малки топчета, всяко с маса m и положителен заряд q, са закачени на еднакви непроводящи безмасови неразтегливи нишки с дължина l. Топчетата са свързани помежду си със също такава нишка, както е показано на фиг. 2. Приемете, че земното ускорение е $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, а константата в закона на Кулон $k = 9.10^9\,\mathrm{N.m^2/C^2}$.

а) Намерете изрази за интензитета на електростатичното поле и електричния потенциал в точката на окачване на горните две нишки. **[2 т]**

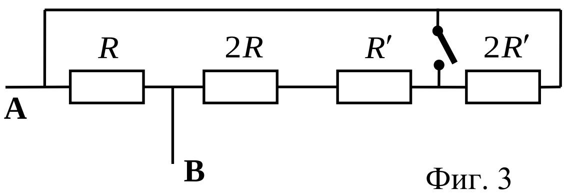
б) В един момент долната нишка е прерязана. Определете големината a на ускорението на топчетата непосредствено след момента на прерязването, ако максималната височина на издигане на топчетата след прерязването на нишката е височината на точката на окачване на горните нишки. **[4 т]**

в) Когато топчетата са в най-горно положение, големината на силите на опън на нишките е $T = 2\,\mathrm{N}$. На колко са равни зарядите и масите на топчетата, ако $l = 50\,\mathrm{cm}$? **[2 т]**

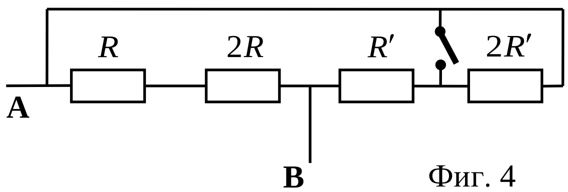
г) Намерете големината на скоростите на топчетата, когато нишките сключват прав ъгъл помежду си. **[2 т]**

Задача 3. Електрически вериги.

Разгледайте двата начина на свързване на четири резистора, които са показани на фиг. 3 и фиг. 4. Съпротивленията на резисторите са указани на фигурите. Първоначално ключовете са отворени.



Фиг. 3



Фиг. 4

а) Намерете общото съпротивление за всеки един от случаите. **[2 т]**

б) Между клемите **A** и **B** е подадено електродвижещо напрежение $E = 30\,\mathrm{V}$. Измерени са мощности $P_1 = 20\,\mathrm{W}$ и $P_2 = 10\,\mathrm{W}$, които се отделят съответно във веригите на фиг. 3 и фиг. 4. На колко са равни съпротивленията R и R'? **[4 т]**

в) Двата ключа се затварят. Начертайте еквивалентните схеми на свързване на резисторите в този случай. Намерете мощностите P_1' и P_2', които се отделят във веригите, ако електродвижещото напрежение не се променя. **[4 т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
8 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г., ПЛЕВЕН
Тема 10. клас, Решения и указания

Задача 1. Пързаляне с шейна.

Фиг. 1

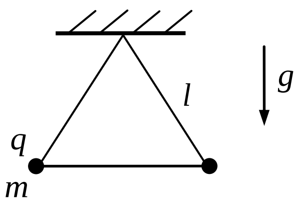
а) Шейната се движи равноускорително с ускорение $a_1 = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$ и нулева начална скорост. **[0,5 т]** Следователно, изминатият път до подножието на склона е $s_1 = \dfrac{h_0}{\sin\alpha} = = \dfrac{a_1 t^2}{2} = \dfrac{g(\sin\alpha - k\cos\alpha)t^2}{2}$ **[0,5 т]**, т.е. $k = \tan\alpha - \dfrac{2h_0}{\sin\alpha\cos\alpha g t^2} = \dfrac{17}{49\sqrt{3}} \approx 0{,}20$. **[1 т]**

б) Скоростта в подножието на склона е $v_1 = a_1 t = g(\sin\alpha - k\cos\alpha)t = \dfrac{2h_0}{t\sin\alpha}$. **[0,5 т]** При преминаване на хоризонталния участък на шейната действа постоянна сила на триене $f = kmg$, насочена обратно на посоката на движение. **[0,5 т]** Съществува следната връзка между скоростта в подножието на склона v_1 и скоростта в края на хоризонталния участък v_2: $\dfrac{mv_1^2}{2} = \dfrac{mv_2^2}{2} + kmgl$ **[0,5 т]**, откъдето $l = \dfrac{v_1^2 - v_2^2}{2kg} = \dfrac{v_1^2(1 - 0{,}8^2)}{2kg} = \dfrac{0{,}72h_0^2}{kgt^2\sin^2\alpha} \approx 12\,\text{m}$. **[1,5 т]**

в) При движението по склона с неизвестен наклон на шейната действа постоянна сила на триене $f = kmg\cos\beta$, насочена обратно на посоката на движение. **[0,5 т]** Използваме следната връзка между скоростта в подножието на склона v_2 и максималната височина на издигане h: $\dfrac{mv_2^2}{2} = mgh + kmg\cos\beta\dfrac{h}{\sin\beta} = mgh + kmgh\cot\beta$. **[0,5 т]** Още едно уравнение следва от условието работата на силата на триене да е равна на изменението на механичната енергия от началото на изкачването на склона с наклон β до момента на окончателно спиране на шейната: $\dfrac{mv_2^2}{2} = 2kmgh\cot\beta + kmgl$. **[0,5 т]** От тези две уравнения се получава, че $h = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{v_2^2}{2g} + kl\right) = \dfrac{v_1^2}{4g} = \dfrac{h_0^2}{gt^2\sin^2\alpha} = \dfrac{kl}{0{,}72} \approx 3{,}3\,\text{m}$. **[1,5 т]** От уравненията следва също така, че $\tan\beta = \dfrac{k}{0{,}28} \approx 0{,}71$. **[0,5 т]** Окончателно: $\beta \approx 36^\circ$. **[0,5 т]**

г) Работата A_f може да се намери от условието работата на силата на триене да е равна на изменението на механичната енергия от началото на първото спускане до окончателния край на движението: $mgh_0 = kmgh\cot\alpha + kmgl + 2kmgh\cot\beta + kmgl = A_f = 4\,\text{kJ}$. **[1 т.]**

<u>Задача 2</u>. Заредени топчета.



Фиг. 2

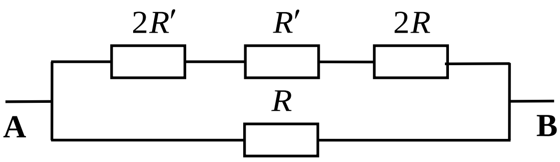
а) Интензитетът в точката на окачване е равен на векторната сума на интензитетите, създавани от отделните заряди. **[0,5 т]** Поради симетрията в разположението на зарядите интензитетът е насочен вертикално нагоре и има големина $E = 2\frac{kq}{l^2}\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}kq}{l^2}$. **[1 т]** Електричният потенциал е сума на потенциалите, създавани от зарядите в точката: $U = \frac{2kq}{l}$. **[0,5 т]**

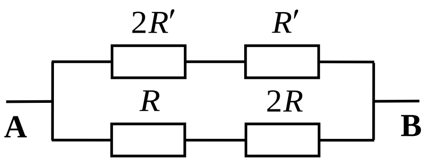
б) От условието за равновесие на топчетата, когато долната нишка още не е прерязана, получаваме две уравнения: $\frac{kq^2}{l^2} - T_1\cos 60^\circ - T_2 = 0$ **[0,5 т]** и $mg - T_1\sin 60^\circ = 0$ **[0,5 т]**, където с T_1 и T_2 сме означили големините на силите на опън на горните и долната нишки, съответно. Прерязването на нишката води до изчезване на члена T_2 в първото уравнение, при което ускорението в този момент ще има големина $a = \frac{kq^2}{ml^2} - \frac{T_1\cos 60^\circ}{m} = \frac{T_2}{m}$. **[0,5 т]** Изискването максималната височина на издигане на топчетата да е височината на точката на окачване се изразява чрез следното уравнение (като използваме и закона за запазване на енергията): $\frac{kq^2}{l} - 2mgh = \frac{kq^2}{2l}$ **[0,5 т]**, където $h = l\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}l}{2}$ (избираме нулевото ниво на гравитационната потенциална енергия да е при точката на окачване). Така получаваме връзката $\frac{kq^2}{l^2} = 2\sqrt{3}mg$ **[0,5 т]**, която заедно с горните две уравнения ни дава, че $T_2 = \frac{5mg}{\sqrt{3}}$ **[0,5 т]**, т.е. $a = \frac{5g}{\sqrt{3}} \approx 29\,\text{m/s}^2$. **[1 т]**

в) Когато топчетата са в най-горно положение, скоростта им е нула, и от условието за равновесие в радиално направление получаваме $T = \frac{kq^2}{4l^2} = \frac{\sqrt{3}mg}{2}$ **[1 т]**, откъдето следва, че $m = \frac{2T}{\sqrt{3}g} \approx 0{,}23\,\text{kg}$ **[0,5 т]**, а $q = 2l\sqrt{\frac{T}{k}} \approx 15\ \mu\text{C}$. **[0,5 т]**

г) Използваме закона за запазване на енергията, който дава: $\frac{kq^2}{l} - \frac{2\sqrt{3}mgl}{2} = \frac{2mv^2}{2} + \frac{kq^2}{\sqrt{2}l} - \frac{2mgl}{\sqrt{2}}$ **[1 т]**, откъдето следва, че $v = \sqrt{gl\left(\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{6}\right)} \approx 1{,}9$ m/s. **[1 т]**

<u>Задача 3</u>. Електрически вериги.





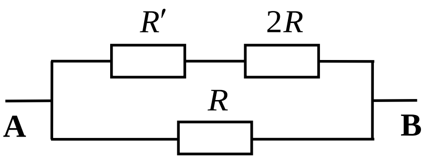
Фиг. 3

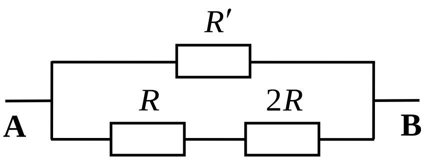
Фиг. 4

а) Еквивалентният вид на веригите е показан на фиг. 3 и фиг. 4. Общото съпротивление на веригата във фиг. 3 е $R'_{\text{AB}} = \dfrac{R(2R+3R')}{3(R+R')}$ **[1 т]**, а съпротивлението във фиг. 4 е $R''_{\text{AB}} = \dfrac{(R+2R)(2R'+R')}{3(R+R')} = \dfrac{3RR'}{R+R'}$. **[1 т]**

б) Мощността, която се отделя във веригата, е $P = \dfrac{E^2}{R_{\text{AB}}}$. **[0,5 т]** Така получаваме две уравнения за неизвестните съпротивления R и R': $\dfrac{R(2R+3R')}{3(R+R')} = \dfrac{E^2}{P_1} = 45\ \Omega$ **[0,5 т]** и $\dfrac{3RR'}{R+R'} = \dfrac{E^2}{P_2} = 90\ \Omega$. **[0,5 т]** Т.е. $R(2R+3R') = 135(R+R')$ и $RR' = 30(R+R')$. Изразяваме, например, R' от второто уравнение: $R' = \dfrac{30R}{R-30}$ **[0,5 т]**, и го заместваме в първото уравнение **[0,5 т]**, при което получаваме, че $R = 52{,}5\ \Omega$. **[1 т]** Накрая намираме, че $R' = 70\ \Omega$. **[0,5 т]**

в) Затварянето на ключовете води до липса на ток през резистора със съпротивление $2R'$. Т.е. еквивалентните схеми изглеждат по следния начин: **[1 т]**





Фиг. 5

Фиг. 6

Еквивалентните съпротивления са $\dfrac{R(2R+R')}{3R+R'}$ **[0,5 т]** и $\dfrac{3RR'}{3R+R'}$ **[0,5 т]**, съответно. За отделените мощности във веригите се получават $P'_1 = \dfrac{E^2(3R+R')}{R(2R+R')} \approx 22{,}3\,\text{W}$ **[1 т]** и $P'_2 = \dfrac{E^2(3R+R')}{3RR'} \approx$ $\approx 18{,}6\,\text{W}$. **[1 т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА

8 – 9 ноември 2014 г., ПЛЕВЕН

Тема за 11.-12. клас

Задача 1. Електрически предпазител (бушон).

Електрическият предпазител (разг. бушон) е устройство, което предпазва електрически вериги от претоварване и сериозни повреди. Най-простият вид е т. нар. предпазител със стопяема жичка. Представлява тънка метална жичка в керамично или стъклено тяло. Включва се последователно в електрическата верига. Когато през него протича ток с големина под някаква критична стойност $I_{кр}$, неговото електрично съпротивление е малко. Когато през жичката протече електрически ток, по-голям от допустимия $I_{кр}$, жичката се стапя и електрическата верига се прекъсва.

В тази задача жичката в бушона е от чист калай. Температурата на топене на калая е $t_{топ}$ = 232 ^oC. Температурата на околната среда е $t_{ок}$ = 20 ^oC. Специфичното електрично съпротивление на калая при 0 ^oC е ρ_0 = 1,00.10^{-7} Ω.m. То се променя с температурата линейно по закона $\rho(t) = \rho_0.(1 + \alpha.t)$, където t е температурата на калая в ^oC, а α = 4,20.10^{-3} $^oC^{-1}$. Жичката има форма на цилиндър с дължина l = 1,00 cm и радиус r = 0,500 mm. Предполага се, че нагрятата жичка отдава топлина (количество топлина за единица време) на околната среда по закона $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = hS(t - t_{ок})$, където S е площта на околната повърхност на жичката, а h = 50,0 W/m^2.^oC. Също така се предполага, че всички части на жичката имат една и съща температура. Намерете:

а) електричното съпротивление $R_{ок}$ и $R_{топ}$ на жичката съответно при температури $t_{ок}$ и $t_{топ}$. **[2 т.]**

б) големината $I_{кр}$ на тока, при която жичката се стапя. **[3 т.]**

в) температурата t_{5A} на жичката, когато през нея протича ток с големина 5 A. **[3,5 т.]**

г) електричната мощност P, която се отделя в жичката, когато през нея протича ток с големина 5 A. **[1,5 т.]**

Задача 2. Топче, подскачащо по наклонена равнина.

Топче (материална точка) пада от покой върху наклонена равнина, сключваща ъгъл α ($\alpha < 45^o$) с хоризонталата. Земното ускорение е g. Преди да се удари идеално еластично за първи път в равнината, топчето изминава път h. (Приемете, че при идеално еластичен удар скоростта на отскачане е равна на скоростта на падане, а ъглите на падане и отскачане са равни.)

а) Каква е скоростта v_1 на топчето в момента на първия удар в равнината? **[1 т.]**

б) Каква е минималната скорост v_{min} на топчето в интервала време между първия и втория удар? **[1 т.]**

в) Каква е максималната височина h_1, мерена спрямо нивото на първия удар, която топчето достига след първия удар? **[1 т.]**

г) Колко е разстоянието L между местата на първия и втория удар на топчето с равнината? **[3 т.]**

д) Каква е скоростта v_2 на топчето в момента на втория удар в равнината? **[1 т.]**

е) На какво разстояние l от мястото на първия удар ($l < L$) трябва да се постави преграда, перпендикулярна на равнината, така че топчето да се удари перпендикулярно в нея? **[2 т.]**

ж) Колко е отношението $k = l/L$? **[1 т.]**

<u>Задача 3.</u> Спектрометър с дифракционна решетка.

Принципната схема на спектрометър, съдържащ входен процеп ВП, две вдлъбнати сферични огледала О1 и О2, отражателна дифракционна решетка ДР и CCD детектор, е дадена на фигурата по-долу.

а) За какво служи огледалото О1? **[0.5 т.]**

б) За какво служи дифракционната решетка ДР? **[0.5 т.]**

в) За какво служи огледалото О2? **[0.5 т.]**

Елементите в схемата имат следните характеристики: фокусните разстояния на двете огледала са равни: $f = 25$ cm. Входния процеп ВП и CCD детекторът са разположени във фокалните равнини (равнините, перпендикулярни на оптичните оси и минаващи през техните фокуси) съответно на огледалата О1 и О2. Дифракционната решетка има 1200 отразяващи ивици на милиметър (решетката работи на отражение). Ивиците са вертикални спрямо равнината на чертежа. Падащият сноп светлина върху решетката ДР пада перпендикулярно на нея. CCD детекторът има 1000 пиксела в равнината на чертежа и дължина L = 2,5 cm. Входният процеп се осветява от светлина, излъчвана от натриева лампа, чийто спектър съдържа две близки по дължина на вълната и еднакво интензивни спектрални линии с дължини на вълната съответно $\lambda_1 = 589{,}00$ nm и $\lambda_2 = 589{,}59$ nm. По-нататък извършвайте изчисленията приближено, като представяте отговорите с две-три значещи цифри. Размерите на О1, О2 и ДР са около 5 cm (те не ви трябват за по-нататъшните изчисления!).

г) Изчислете константата *d* на решетката ДР. **[0.5 т.]**

д) Какъв е порядъкът на дифрактиралата от ДР светлина? **[1 т.]**

е) Изчислете ъгъла α между падащия върху ДР сноп и дифрактиралия от ДР сноп. **[1 т.]**

ж) Какво ще е разстоянието *x* (в mm и в пиксели) между двете спектрални линии върху CCD детектора? Приемете, че двете линии са разположени в средата на CCD детектора. **[3 т.]**

з) Изчислете какъв е интервалът $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ от дължини на вълните на светлината, която може да се регистрира от CCD детектора при това положение на оптичните елементи на спектрометъра. **[1 т.]**

и) Какво трябва да може да се променя (движи) и как, за да може спектрометърът да регистрира светлина с други дължини на вълните? **[0.5 т.]**

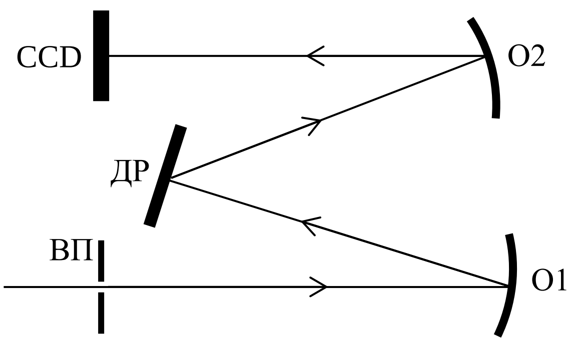
к) Оценете колко може да е максималната ширина *l* на входния процеп ВП, така че двете спектрални линии все още да се виждат разделени (да не се слеят в една широка, „размазана“). **[1 т.]**

л) Защо все пак са дадени ориентировъчните размери на О1, О2 и ДР? **[0.5 т.]**

Полезна математика:

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$ $\qquad$ $\sin\alpha \approx \alpha;\ \alpha \ll 1$

$\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-(\tan\alpha)^2}$ $\qquad$ $\cos\alpha \approx 1;\ \alpha \ll 1$, ако α се измерва в радиани



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
8 – 9 НОЕМВРИ 2014 Г., ПЛЕВЕН
Тема 11.-12. клас, Решения и указания

Задача 1. Електрически предпазител (бушон).

а) Електричното съпротивление $R_{\text{ок}}$ и $R_{\text{топ}}$ на жичката при температури $t_{\text{ок}}$ и $t_{\text{топ}}$ е равно съответно на $R_{\text{ок}} = \rho_0(1 + \alpha t_{\text{ок}}).\frac{l}{\pi r^2}$ **[0,5 т.]** = 1,38 mΩ **[0,5 т.]** и $R_{\text{топ}} = \rho_0(1 + \alpha t_{\text{топ}}).\frac{l}{\pi r^2}$ **[0,5 т.]** = 2,51 mΩ. **[0,5 т.]**

б) Големината $I_{\text{кр}}$ на тока, при която жичката се стапя, се намира от равенството на отделената в жичката електрична мощност и отделената в околната среда топлинна мощност: $I_{\text{кр}}{}^2 R_{\text{топ}} = h2\pi rl(t_{\text{топ}} - t_{\text{ок}})$ **[1,0 т.]**, откъдето $I_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{h2\pi rl(t_{\text{топ}} - t_{\text{ок}})}{R_{\text{топ}}}}$ **[0,5 т.]** = 11,5 A. **[1,5 т.]**

в) Температурата t_5 на жичката, когато през нея протича ток с големина 5 A, се намира от равенството на отделената в жичката електрична мощност и отделената в околната среда топлинна мощност: $I_{5\text{A}}{}^2\rho_0(1 + \alpha t_{5\text{A}}).\frac{l}{\pi r^2} = h2\pi rl(t_{5\text{A}} - t_{\text{ок}})$ **[0,5 т.]**, откъдето $1 + \alpha t_{5\text{A}} = \frac{h2\pi^2 r^3}{I_{5\text{A}}{}^2\rho_0}(t_{5\text{A}} - t_{\text{ок}}) = B(t_{5\text{A}} - t_{\text{ок}})$, където $B \equiv \frac{h2\pi^2 r^3}{I_{5\text{A}}{}^2\rho_0}$. **[0,5 т.]** Тогава $t_{5\text{A}} = (1 + Bt_{\text{ок}})/(B - \alpha)$ **[1,5 т.]** = 44 °C. **[1 т.]**

г) Електричната мощност P, която се отделя в жичката, когато през нея протича ток с големина 5 A, е $P = I^2R(t_{5A}) = I^2\rho_0(1 + \alpha t_{5A}).\frac{l}{\pi r^2}$ **[0,5 т.]** = 37,7 mW. **[1 т.]**

Задача 2. Топче, подскачащо по наклонена равнина.

а) Скоростта v_1 на топчето в момента на първия удар в равнината се намира от закона за запазване на механичната енергия $mgh = \frac{1}{2}mv_1{}^2$ **[0.5 т.]**, откъдето $v_1 = \sqrt{2gh}$ **[0.5 т.]**.

б) Минималната скорост v_{min} на топчето в интервала време между първия и втория удар се достига, когато то се намира на най-голяма височина **[0.25 т.]**. Тогава скоростта е хоризонтална **[0.25 т.]**. Тъй като хоризонталната компонента на скоростта се запазва, а скоростта след удара сключва ъгъл 2α с вертикалата **[0.25 т.]**, то $v_{min} = v_1\sin(2\alpha) = \sqrt{2gh}.\sin(2\alpha)$ **[0.25 т.]**.

в) Максималната височина h_1, мерена спрямо нивото на първия удар, която топчето достига след първия удар, може да се изчисли от закона за запазване на механичната енергия $\frac{1}{2}mv_1{}^2 = mgh_1 + \frac{1}{2}mv_{min}{}^2$**[0.5 т.]**, откъдето $h_1 = h\cos^2(2\alpha)$ **[0.5 т.]**.

г) Разстоянието L между местата на първия и втория удар на топчето с равнината може да се намери, изчислявайки параметрите на траекторията на движение (парабола) на топчето. В случая по-лесно е да се използва координатна система с абсциса x, успоредна на наклонената равнина и надолу и ордината y, перпендикулярна на наклонената равнина и нагоре. Тогава движението на топчето може да се представи като резултат от две насложени праволинейни движения: по x с ускорение $a_x = g\sin\alpha$ и по y с ускорение $a_y = -g\cos\alpha$. **[0.25 т.]** Тогава законът за скоростта по двете оси е $v_x = v_1\sin\alpha + g\sin\alpha\, t$, $v_y = v_1\cos\alpha - g\cos\alpha\, t$ ($t = 0$, в момента на първия удар) **[0.25 т.]**, а законът за движение: $x(t) = v_0\sin\alpha t + \frac{1}{2}g\sin\alpha\, t^2$, $y(t) = v_1\cos\alpha t - \frac{1}{2}g\cos\alpha\, t^2$. **[0.5 т.]** Топчето ще се удари втори път в момента време t_2, когато

$y(t_2) = 0; t_2 \neq 0$. От закона за движение по оста y намираме $t_2 = 2v_1/g$ **[0.5 т.]**. Замествайки в закона за движение по оста x, намираме $L = x(t_2) = \frac{4{v_1}^2}{g}\sin\alpha = 8h\sin\alpha$. **[1.5 т.]**

д) Скоростта v_2 на топчето в момента на втория удар в равнината се намира от закона за запазване на механичната енергия: $\frac{1}{2}m{v_1}^2 = \frac{1}{2}m{v_2}^2 - mgL\sin\alpha$ **[0.5 т.]**, откъдето $v_2 = v_1\sqrt{1+8\sin^2\alpha} = \sqrt{2gh[1+8(\sin\alpha)^2]}$ **[0.5 т.]**.

е) За да се удари топчето перпендикулярно в преградата, в момента $t_{уд}$ на удара в избраната по-горе координатна система $v_y(t_{уд}) = v_1\cos\alpha - g\cos\alpha\, t_{уд} = 0$, **[0.5 т.]** откъдето $t_{уд} = v_1/g$. **[0.5 т.]** В този момент координатата x и следователно положението на преградата $l = x(t_{уд}) = v_1\sin\alpha t_{уд} + \frac{1}{2}g\sin\alpha\, {t_{уд}}^2 = \frac{3}{2}\frac{{v_1}^2}{g}\sin\alpha = 3h\sin\alpha$. **[1 т.]**

ж) Отношението $k = \frac{l}{L} = \frac{3}{8}$. **[1 т.]**

<u>Задача 3.</u> Спектрометър с дифракционна решетка.

а) Огледалото О1 създава успореден сноп, падащ върху дифракционната решетка. **[0.5 т.]**

б) Дифракционната решетка ДР разделя пространствено светлината на успоредни монохроматични снопове с различна дължина на вълната. **[0.5 т.]**

в) Огледалото О2 фокусира дифрактиралите снопове с различна дължина на вълната в различни точки върху CCD детектора. **[0.5 т.]**

г) Константата d на решетката ДР е $d = \frac{1}{1200}$ mm = 833 nm. **[0.5 т.]**

д) От формулата за дифракционна решетка $d\sin\alpha = k\lambda$ **[0.25 т.]** следва, че $k = \frac{d\sin\alpha}{\lambda} < \frac{d}{\lambda} = \frac{833\ \text{nm}}{589\ \text{nm}} < 2$. Следователно k = 1 и дифрактиралият сноп е максимум от първи порядък. **[0.75 т.]**

е) От по-горната формула $\sin\alpha = \frac{\lambda}{d} = \frac{589\ nm}{833\ nm} \approx 0{,}707$, откъдето $\alpha \approx 45°$. **[1 т.]**

ж) Първо оценяваме ъгъла $\Delta\alpha$ между двата снопа с дължини на вълните λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Прилагайки два пъти формулата за дифракционна решетка $d\sin\alpha = k\lambda$, $d\sin(\alpha + \Delta\alpha) = k(\lambda + \Delta\lambda)$ или $d\sin\alpha\cos(\Delta\alpha) + d\cos\alpha\sin(\Delta\alpha) \approx d\sin\alpha + d\cos\alpha.\Delta\alpha \approx k(\lambda + \Delta\lambda)$, се получава $\Delta\alpha = \frac{\Delta\lambda}{d\cos\alpha}$ **[1.5 т.]**. Разстоянието x между двете спектрални линии върху CCD детектора ще бъде $x = f\Delta\alpha = \frac{f\Delta\lambda}{d\cos\alpha}$ = 0,25 mm. **[1 т.]**
Тъй като един пиксел има размер 2,5 cm/1000 = 0,025 mm, то разстоянието x е 10 пиксела. **[0.5 т.]**

з) От предното подусловие $\lambda_{max} - \lambda_{min} = d\cos\alpha\frac{L}{f} =$ **[0.5 т.]** $= 833\text{nm}.\frac{\sqrt{2}}{2}\frac{2{,}5\text{cm}}{25\text{cm}} \approx$ 59 nm. При дължина на вълната в средата на CCD от 589,3 nm, интервалът $(\lambda_{min}, \lambda_{max})$ = (560 nm, 619 nm). **[0.5 т.]**

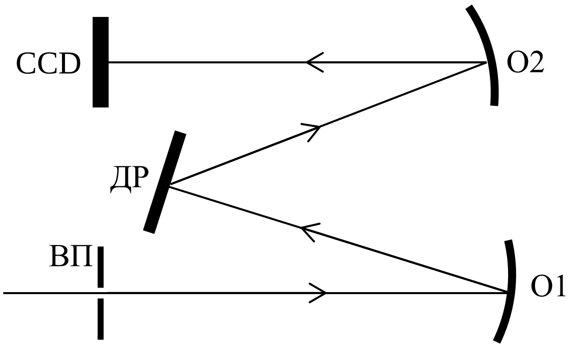
и) За да може спектрометърът да регистрира светлина с други дължини на вълните, технически най-лесно е да се върти дифракционната решетка около вертикална ос. **[0.5 т.]**

При отговор „Да се върти огледалото О2“ - **[0.3 т.]**

При отговор „Да се мести CCD детекторът перпендикулярно на падащия сноп“ - **[0.2 т.]**

к) Сноп монохроматична светлина ще се фокусира в точка върху CCD детектора само при безкрайно тесен входен процеп ВП. При ширина l на входния процеп ВП, всяка от спектралните линии също ще има ширина l върху детектора. **[0.5 т.]** Следователно, ако l = 0.25 mm, двете линии ще се слеят. Може да се очаква, че при два пъти по-малка ширина $l \approx 0.125$ mm двете спектрални линии ще се виждат разделени. **[0.5 т.]**

л) Ориентировъчните размери на O1, O2 и ДР са дадени, защото вероятно ако тези елементи са много малки, това ще предизвика допълнителни дифракционни ефекти от крайните размери на сноповете и по-ниска разделителна способност на дифракционната решетка (заради по-малкия брой отразяващи ивици), което ще предизвика допълнително уширение на спектралните линии. Вероятно при тези размери тези дифракционни ефекти са достатъчно малки. **[0.5 т.]**



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално есенно състезание по физика

Плевен, 7–9 ноември 2014 г.

Специална тема

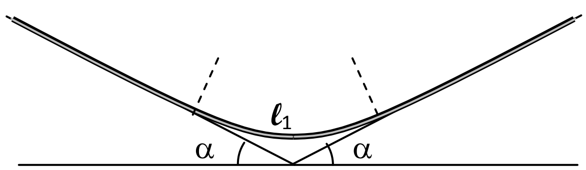
Основни константи

- земно ускорение, $g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$;
- универсална газова константа, $R = 8.314\ \mathrm{J/(mol{\cdot}K)}$;
- константа на Болцман, $k_B = 1.381\times10^{-23}\ \mathrm{J/K}$;
- скорост на светлината, $c = 3.00\times10^{8}\mathrm{m/s}$;

Задача 1. Механика на тежък шнур

Задачата се състои от три независими подусловия, в които се разглеждат различни случаи на равновесие и движение на еднороден, тежък и неразтеглив шнур. Масата на шнура е m, а дължината му е ℓ. Шнурът е идеално гъвкав, т.е. за огъването му не е нужна сила. Земното ускорение е g.

А) Шнурът е поставен симетрично върху две допиращи се равнини, наклонени под еднакви ъгли α спрямо хоризонта, както е показано на фигурата. Коефициентът на триене между шнура и равнините е μ ($\mu > \tan\alpha$).



Намерете отношението $k = \ell_1/\ell$, където ℓ_1 е максималната възможна дължина на свободновисящата част от шнура, когато той е в равновесие. **[3.0 точки]**

Б) Половината от шнура се намира върху хоризонтална гладка маса (без триене), а другата му половина виси от ръба на масата, както е показано на фигурата. Шнурът е пуснат да се свлича от масата с нулева начална скорост. При това дължината x на висящата му част се изменя с времето по закона:

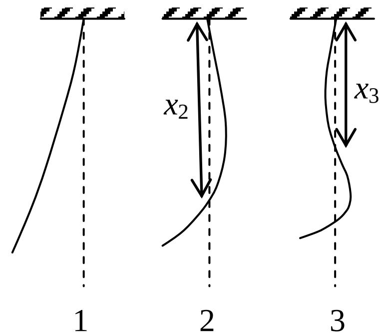
$$x = A\cosh(kt).$$

Намерете неизвестните константи A и k. За колко време τ шнурът ще падне от масата?

[4.0 точки]

Упътване. Можете да използвате математическото приложение на последната страница.

В) Шнурът е окачен в единия си край, като другият му край виси свободно. В това положение шнурът може да извършва под действие на собствената си тежест различни хармонични трептения, част от които са показани на фигурата. Съответните им кръгови честоти ω_i са дадени в таблицата по-долу. Обърнете внимание, че подобно на трептяща струна, по дължината на шнура има точки, които не трептят в напречно направление – т.нар. **възли**.



№	ω
1	$1.202\sqrt{g/\ell}$
2	$2.760\sqrt{g/\ell}$
3	$4.327\sqrt{g/\ell}$

В1. Предложете опростен модел, чрез който да оцените кръговата честота ω_1 на първото (най-нискочестотно) трептене на шнура с относителна грешка, по-малка от 5%. **[1.5 точки]**

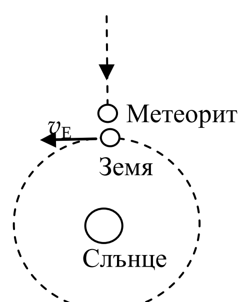
В2. Като използвате данните от таблицата, намерете разстоянията x_2 и x_3 между точката на окачване и първия възел за трептенията 2 и 3 съответно (вж. фигурата). Приемете, че трептенията са с амплитуди, много по-малки от дължината на шнура. **[1.5 точки]**

Задача 2. Изгаряне на метеорит в атмосферата

В тази задача ще разгледате опростен модел за изпарение на метеорит в земната атмосфера поради триенето му с въздуха. Метеоритът се състои от вещество с плътност ρ_m = 7800 kg/m^3 и специфична топлина на сублимация L = 6.1×10^6 J/kg. Атмосферата е идеален газ, състоящ се от точкови молекули със средна моларна маса μ = 0.029 kg/mol. Температурата на атмосферата е постоянна по цялата ѝ височина, T = 280 K, а атмосферното налягане на морското ниво е p_0 = 1.0×10^5 Pa. Ударите на молекулите на въздуха с метеорита са абсолютно нееластични. Влиянието на земната гравитация върху движението на метеорита се пренебрегва.

А) Оценете средната скорост $\overline{v}$ на топлинно движение на молекулите на въздуха.

[0.5 точки]



Б) Метеоритът започва движението си от състояние на покой на много голямо разстояние от Слънцето. Той се ускорява под действие на слънчевата гравитация в равнината на земната орбита, като я пресича под прав ъгъл, както е показано на фигурата. Ако е известно, че орбиталната скорост на Земята е v_E = 30 km/s, намерете относителната скорост v_0 спрямо Земята, с която метеоритът навлиза в атмосферата. Под какъв ъгъл θ спрямо вертикалата е насочена тази скорост? **[2.0 точки]**

Както следва от предходните две подточки, скоростта на топлинно движение на молекулите е много по-малка от скоростта, с която метеоритът навлиза в атмосферата. Затова се приема, че метеоритът се движи в газ, състоящ се от неподвижни точкови молекули. Разгледайте сферичен метеорит с радиус r, който се движи в атмосферата със скорост v спрямо въздуха. Плътността на атмосферата на дадената височина е ρ_a.

В) Получете израз за моментната топлинна мощност P, която се отделя поради ударите между метеорита и молекулите на въздуха. **[2.0 точки]**

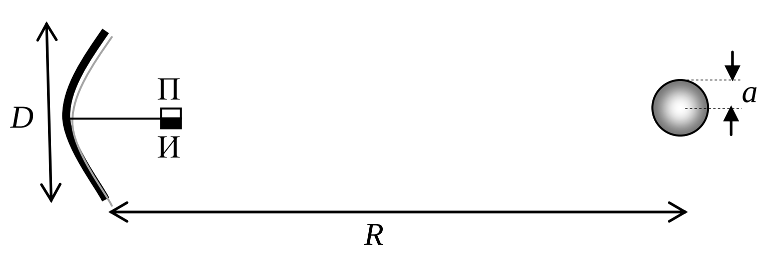
Приемете, че η = 50% от отделената поради ударите топлина, се изразходва изцяло за сублимация (изпарение от твърдо агрегатно състояние) на веществото на метеорита. Останалата част от топлината води до загряване на въздуха и до топлинно излъчване. Считайте, че изпарението е равномерно по цялата повърхност на метеорита, т.е. той запазва сферичната си форма.

Г) Получете израз за скоростта $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, с която намалява радиусът на метеорита, като функция на моментния му радиус r и останалите зададени параметри. **[2.0 точки]**

Д) Измерванията показват, че метеоритите изминават по-голямата част от пътя си в атмосферата праволинейно (вж. снимката в началото) и практически с постоянна скорост. Оценете минималния радиус $r_{\min}$, който трябва да има метеорит преди да навлезе в атмосферата, за да достигне земната повърхност. **[3.5 точки]**

Задача 3. Радар

Радар се състои от малки по размер източник И и приемник П на микровълнови импулси, разположени във фокуса на идеално отразяваща параболична антена с диаметър на изходния отвор D = 2 (вж. фигурата). Източникът излъчва микровълнови импулси с дължина на вълната λ = 5 cm, продължителност τ = 1 μs и мощност P_0 = 100 kW. Докато трае излъчването на даден импулс, приемникът е изключен. След това той се включва и регистрира импулсите, отразени от обект, намиращ се на разстояние R от радара ($R \gg D$).



А) Пресметнете минималното растояние $R_{\min}$, на което радарът може да регистрира обекта. **[1.0 точка]**

Б) Радарът се характеризира с величината **яркост**, която се дефинира като:

$$B = P/\Omega,$$

където P е мощността на импулсите, а Ω е пространственият ъгъл, в който е съсредоточено излъчването на радара (виж математическото приложение). Получете израз и оценете числено максималната теоретично достижима яркост на радара. **[2.5 точки]**

В) Обектът е идеално отразяваща метална сфера с радиус a ($\lambda << a << R$). Получете израз за мощността P_r на отразената от сферата вълна. Определете пространствения ъгъл Ω_r, в който се разпространява отразената вълна. **[2.0 точки]**

Г) Получете израз за мощността P_d на вълната, която се фокусира върху приемника П. **[2.0 точки]**

Д) За да регистрира приемникът отразената вълна, е нужно енергията, която той поглъща от вълната, да бъде по-голяма от средната енергия на топлинно движение на токовите носители в регистриращата електронна верига. Определете максималното разстояние R_{max}, на което радарът може да регистрира метална сфера с радиус a = 1 m. Температурата на елементите от електронната верига на приемника е T = 300 K. **[2.5 точки]**

Математическо приложение

1) Функциите хиперболичен косинус ($\cosh$) и хиперболичен синус ($\sinh$) се дефинират с равенствата:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \qquad \text{и} \qquad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},$$

и удовлетворяват следните тъждества:

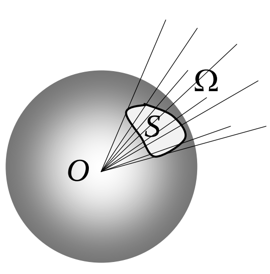
$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1; \qquad (\cosh x)' = \sinh x; \qquad (\sinh x)' = \cosh x.$$

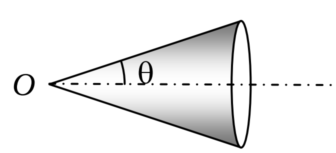
2) Пространствен ъгъл Ω е част от пространството, ограничена от сноп лъчи – образуващи на ъгъла, излизащи от обща точка O – връх на ъгъла. Ако разгледаме мислена сфера с радиус R и център в т. O, големината на пространствения ъгъл се дава с формулата:

$$\Omega = S/R^2,$$

където S е площта на сферичния сегмент, ограничен от лъчите. Пространственият ъгъл се измерва в стерадиани (strad). Пространственият ъгъл, съответстващ на конус с ъгъл θ между образуващата и оста на конуса, се дава с израза:

$$\Omega = 4\pi \sin^2(\theta/2).$$





МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

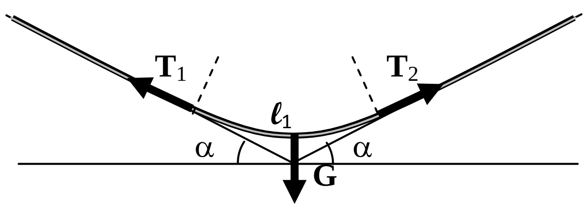
Национално есенно състезание по физика
Плевен, 7–9 ноември 2014 г.
Решения на специалната тема

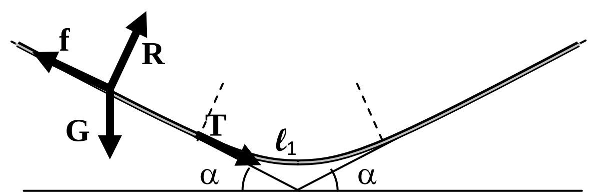
Задача 1. Механика на тежък шнур

А) Масата на висящия участък е:

(1) $$m_1 = \frac{ml_1}{l} = mk\,,$$

където $k = l_1/l$.





Силите на опън $\mathbf{T}_1$ и $\mathbf{T}_2$ в двата края на участъка са допирателни към шнура и имат еднакви големини: $T_1 = T_2 = T$. От условието за равновесие на висящия участък имаме:

(2) $$m_1 g = 2T\sin\alpha$$

или

(3) $$T = \frac{mg}{2\sin\alpha}k\,.$$

От условието за равновесие на един от участъците, намиращи се върху наклонените равнини, имаме:

(4) $$\frac{mg(1-k)}{2}\sin\alpha + T = f\,;$$

(5) $$R = \frac{mg(1-k)\cos\alpha}{2}\,.$$

Дължината l_1 (съответно отношението k) е максимална, когато силата на триене f приема своята максимална възможна стойност:

(6) $$f = \mu R\,.$$

Така получаваме:

(7) $$\frac{mg(1-k)}{2}\sin\alpha + \frac{mgx}{2\sin\alpha} = \frac{\mu mg(1-k)}{2}\cos\alpha\,,$$

откъдето:

(8) $$k = \frac{(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha}{1+(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)\sin\alpha}\,.$$

Б) В момента t = 0 дължината на провесената част е $x(0) = \ell/2$. От друга страна, от закона за движение имаме $x(0) = A\cosh(0) = A$. Следователно:

(9) $$A = \ell/2\,.$$

Константата k ще намерим от закона за запазване на енергията. Избираме хоризонталната повърхност като нулево ниво на потенциалната енергия. Масата на провесената част е $m_1 = m\,x/\ell$, а височината на центъра й спрямо нулевото ниво е $h = -x/2$. Следователно потенциалната енергия на шнура като функция на времето е:

(10) $$E_p = -\frac{mgx^2}{2\ell} = -\frac{mg\ell}{8}\cosh^2(kt)\,.$$

Кинетичната енергия на шнура е:

(11) $$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m\dot{x}^2}{2} = \frac{m\ell^2k^2}{8}\sinh^2(kt)\,,$$

защото всичките му точки се движат с една и съща скорост $v = \dot{x} = kA\sinh(kt)$. От закона за запазване на енергията следва равенството:

(12) $$\frac{m\ell^2k^2}{8}\sinh^2(kt) - \frac{mg\ell}{8}\cosh^2(kt) = -\frac{mg\ell}{8}\,,$$

което е изпълнено тъждествено, ако:

(13) $$k = \sqrt{\frac{g}{\ell}}\,.$$

Шнурът се отделя от масата в момента, когато $x(\tau) = \ell$, т.е.

(14) $$\cosh(k\tau) = 2\,.$$

Полагаме $y = \exp(k\tau)$, откъдето получаваме уравнението:

(15) $$y^2 - 4y + 1 = 0\,.$$

Избираме корена $y > 1$ на квадратното уравнение, защото той съответства на $\tau > 0$:

(15) $$y = 2 + \sqrt{3}\,.$$

Следователно:

(16) $$\tau = \sqrt{\frac{\ell}{g}}\ln(2 + \sqrt{3})\,.$$

В) В1. За първото трептене бихме могли да пренебрегнем изкривяването на шнура, т.е. да го разглеждаме като люлееща се твърда пръчка с инерчен момент:

$$I = 1/3\, m\ell^2$$

спрямо точката на окачване и разстояние:

$$d = \frac{\ell}{2}$$

от центъра на масата до точката на окачване. От формулата за честота на физично махало намираме:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{mgd}{I}} = \sqrt{\frac{3g}{2\ell}} \approx 1.225\sqrt{\frac{g}{\ell}} \, .$$

Полученият отговор се различава от точния с около 2%, което е в рамките на допустимата грешка.

В2. Движението, което извършва участъкът от шнура, намиращ се под първия възел, може да се разглежда като най-нискочестотното трептене на шнур с дължина $\ell - x_1$. Следователно:

$$1.202\sqrt{\frac{g}{\ell - x_1}} = 2.760\sqrt{\frac{g}{\ell}} \, ,$$

откъдето:

$$x_1 = \left[1 - \left(\frac{1.202}{2.760}\right)^2\right]\ell = 0.810\ell \, .$$

Аналогично, за третото трептене движението на частта от шнура под най-горния възел може да се разглежда като второто по честота трептене на шнур с дължина $\ell - x_2$, т.е.

$$2.760\sqrt{\frac{g}{\ell - x_2}} = 4.327\sqrt{\frac{g}{\ell}} \, ;$$

$$x_2 = \left[1 - \left(\frac{2.760}{4.327}\right)^2\right]\ell = 0.593\ell \, .$$

Задача 2. Изгаряне на метеорит в атмосферата

А) Ако пренебрегнем разликата между средноквадратична и средна скорост, имаме:

$$\frac{m\bar{v}^2}{2} = \frac{3}{2}k_{\mathrm{B}}T \, ,$$

където $m = \mu / N_A$ е масата на една молекула. Като вземем предвид, че $k_B = R/N_A$, намираме:

$$\bar{v} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}} = 491\,\mathrm{m/s} \, .$$

Б) От II принцип на механиката имаме за движението на Земята около Слънцето:

$$\frac{m_E v_E^2}{a} = \gamma \frac{m_E M}{a^2} \, ,$$

където m_{E} е масата на Земята, M – масата на Слънцето, а a – радиусът на земната орбита. Оттук намираме:

$$v_E = \sqrt{\gamma \frac{M}{a}} \, .$$

Нека означим масата на метеорита преди на навлезе в земната атмосфера с m_0, а скоростта му спрямо Слънцето – с v_m. От закона на запазване на енергията имаме:

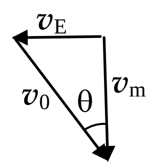
$$\frac{m_0 v_m^2}{2} = \gamma \frac{M m_0}{a}.$$

Оттук получаваме:

$$v_m = \sqrt{2\gamma \frac{M}{a}} = \sqrt{2} v_E.$$

Скоростта на метеорита спрямо Земята е $\vec{v}_0 = \vec{v}_m - \vec{v}_E$ (виж фигурата), т.е. има големина:

$$v_0 = \sqrt{v_E^2 + v_m^2} = v_E \sqrt{3} = 52 \text{ km/s}$$



и сключва ъгъл с вертикалата:

$$\theta = \arccos\left(\frac{v_m}{v_0}\right) = \arccos\sqrt{\frac{2}{3}} = 35^\circ.$$

В) Разглеждаме удара между молекула на въздуха и метеорита в отправна система, свързана с метеорита. Тъй като ударът е идеално нееластичен, а масата M на метеорита е много по-голяма от масата m на една молекула, количеството топлина q, отделена при един удар, е равно на кинетичната енергия на падащата молекула:

$$q = \frac{mv^2}{2}.$$

За време t в метеорита се удрят молекулите, заемащи обем:

$$V = \pi r^2 v t.$$

Броят на тези молекули е:

$$N = nV = (\rho_a / m)\pi r^2 v t,$$

където $n = (\rho_a / m)$ е обемната концентрация на молекулите. Общата отделена топлина за това време е:

$$Q = Nq = \frac{\rho_a \pi r^2 v^3}{2} t,$$

а мощността:

$$P = \frac{Q}{t} = \frac{\rho_a \pi r^2 v^3}{2}.$$

Г) Нека за малък интервал от време $\mathrm{d}t$ от метеорита се изпарява тънък сферичен слой с дебелина $-\mathrm{d}r$ ($\mathrm{d}r < 0$). Обемът на изпарения слой е $\mathrm{d}V = -4\pi r^2 \mathrm{d}r$, а масата му:

$$\mathrm{d}M = -4\pi\rho_m r^2 \mathrm{d}r.$$

За изпарението на слоя е нужно количество топлина:

$$\mathrm{d}Q = L\mathrm{d}M = -4\pi\rho_m L r^2 \mathrm{d}r.$$

От уравнението за топлинен баланс имаме:

$$\mathrm{d}Q = \eta P \mathrm{d}t \text{ или } -4\pi r^2 \rho_m L \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{\eta \rho_a \pi r^2 v^3}{2},$$

откъдето получаваме:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{\eta \rho_a v^3}{8\rho_m L}.$$

Д) Приемаме, че скоростта на метеорита е постоянна по големина и по посока. За време dt височината на метеорита се променя с:

$$\mathrm{d}h = -v_0 \cos\theta \mathrm{d}t = -\sqrt{2} v_E \mathrm{d}t.$$

Следователно промяната на радиуса на метеорита с височината се описва с уравнението:

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}h} = \frac{\eta \rho_a v_0^2}{8\rho_m L \cos\theta} = \frac{3\sqrt{6}\eta \rho_a v_E^2}{16\rho_m L}.$$

От уравнението за хидростатично равновесие на атмосферата имаме:

$$\mathrm{d}p = -\rho_a g \mathrm{d}h.$$

Следователно, промяната на радиуса на метеорита с височината е свързана със съответната промяна на атмосферното налягане по траекторията на метеорита:

$$\mathrm{d}r = -\frac{3\sqrt{6}\eta v_E^2}{16\rho_m L g} \mathrm{d}p.$$

Нека в атмосферата навлиза метеорит с радиус $r_{\min}$. Когато достигне земната повърхност, метеоритът изгаря напълно, т.е. $r = 0$ и съответно $\Delta r = -r_{\min}$. От друга страна, във високите слоеве на атмосферата, където започва изгарянето на метеорита, атмосферното налягане е практически равно на нула, а на земната повърхност е равно на p_0, т.е. $\Delta p = p_0$. Следователно:

$$r_{\min} = \frac{3\sqrt{6}\eta v_E^2 p_0}{16\rho_m L g} = 44\ \mathrm{m}.$$

Задача 3. Радар

А) За да бъде регистриран, отразеният импулс трябва да се върне в радара след време, по-голямо от продължителността на импулса:

$$\frac{2R}{c} \geq \tau.$$

Следователно за минималното разстояние получаваме:

$$R_{\min} = \frac{c\tau}{2} = 150\ \mathrm{m}.$$

Б) Пространственият ъгъл, в който е съсредоточено излъчването на радара се определя от ъгъла на дифракционна разходимост:

$$\theta = \frac{1.22\lambda}{D} \approx 3\times 10^{-2}\ \mathrm{rad}.$$

Тъй като θ << 1, можем да използваме приближението:

$$\Omega = 4\pi \sin^2(\theta/2) \approx \pi\theta^2 = \frac{1.49\pi\lambda^2}{D^2} = 2.93\times10^{-3}\text{strad}.$$

Съответно яркостта на радара е:

$$B = \frac{P_0}{\Omega} = \frac{P_0 D^2}{1.49\pi\lambda^2} = 34\ \text{MW/strad}.$$

В) Пространственият ъгъл, под който радарът „вижда" сферата се определя от нейното напречно сечение:

$$\Omega_\text{s} = \frac{\pi a^2}{R^2}.$$

Съответно върху сферата пада и изцяло се отразява мощност:

$$P_\text{r} = B\Omega_\text{s} = \frac{P_0 D^2 a^2}{1.49\lambda^2 R^2}.$$

Отразените лъчи сключват с падащите лъчи ъгли, които варират от 0 за лъчите, допиращи се до сферата, до 180° за лъчите, които се отразяват в обратна посока. Следователно отразената от сферата вълна се разпространява изотропно в рамките на пълния пространствен ъгъл:

$$\Omega_\text{r} = 4\pi.$$

Г) По отношение на отразената вълна, сферата е източник с яркост:

$$B_\text{r} = \frac{P_\text{r}}{\Omega_\text{r}} = \frac{P_0 D^2 a^2}{5.96\pi\lambda^2 R^2}.$$

Входният отвор на радара се вижда под пространствен ъгъл $\frac{\pi D^2}{4R^2}$. Следователно, мощността, която пада върху параболичната антена и се фокусира върху детектора, е:

$$P_\text{d} = \frac{P_0 D^4 a^2}{23.84 R^4 \lambda^2}$$

Д) За да може детекторът да регистрира отразената вълна е нужно:

$$P_\text{d}\tau \geq \frac{3}{2} k_\text{B} T$$

или

$$\frac{P_0 D^4 a^2 \tau}{23.84 R^4 \lambda^2} \geq \frac{3}{2} k_\text{B} T$$

Оттук определяме максималното разстояние, на което сферата може да бъде регистрирана от радара:

$$R_\text{max} = 0.17 D \sqrt[4]{\frac{P_0 \tau}{k_\text{B} T}} \sqrt{\frac{a}{\lambda}} \approx 107\ \text{km}.$$