Р Е П У Б Л И К А Б Ъ Л Г А Р И Я
М И Н И С Т Е Р С Т В О Н А О Б Р А З О В А Н И Е Т О И Н А У К А Т А

НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКА
ОБЛАСТЕН КРЪГ – 30 МАРТ 2014 Г.

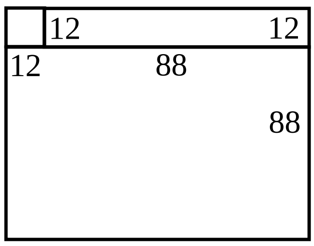
4 – 8 КЛАС
Задачи, решения, оценяване

4.1. Ако разполагам с $15.2014-10.2013+11.2012-11.2011-7.1313$ лева, ще ми стигнат ли да купя общо $528:(72.18-46.23+36.9-23.23)$ енциклопедии, които струват по $(17.3200-33.1600):(73.4-53.4)$ лева всяка? Ако да, колко лева ще ми останат? Ако не, колко лева не ми достигат?

Решение: Разполагам с $30210-20130+11-9191=10091-9191=900$ лева. Броят на енциклопедиите е $528:(1296-1058+324-529)=528:(1620-1587)=528:33=16$, а единичната им цена е $1600:80=20$. За покупката са ми необходими $16.20=320$ лева и ще ми останат $900-320=580$ лева.

Оценяване: по 2 точки за пресмятане на всеки от трите числови израза; 1 точка за завършване на решението.

4.2. Правоъгълник има периметър $(234.6+149.4):(49.89-24.89-25.87)$ см и широчина $(19.93+17.48-15-111.16):(12.48+9.49-24.42)$ мм. С колко квадратни милиметра лицето на правоъгълника е по-малко от лицето на квадрат със същия периметър? Покажете как може квадратът да се разреже на квадратче и две правоъгълничета така, че от правоъгълничетата да се сглоби даденият правоъгълник; отбележете дължината и широчината на всяка от получените части при разрязването.



Решение: Периметърът на правоъгълника е

$$(1404+596):(25.89-25.87)=2000:50=40 \text{ см} = 400 \text{ мм},$$

а широчината му е $792:9=88$ мм. Тогава дължината му е $200-88=112$ мм, а лицето му е $88.112=9856$ кв. мм. Страната на квадрата е $400:4=100$ мм, а лицето му е 10000 кв. мм, което е с $10000-9856=144$ кв. мм повече от лицето на правоъгълника. Вдясно е показано е едно примерно разрязване, при което малкият правоъгълник трябва да се завърти под прав ъгъл и да се залепи до големия.

Оценяване: по 1 точка за пресмятане на периметъра и широчината на правоъгълника; по 0,5 точки за пресмятане на дължината на правоъгълника, лицето на правоъгълника, дължината на страната на квадрата и лицето на квадрата; 2 точки за подходящо разрязване; 1 точка за завършване на решението.

4.3. Разполагате с 9 бели и 9 червени еднакво големи кубчета. Трябва да се изберат няколко (повече от едно) и да се сглоби с тях по-голям плътен куб. По колко различни начина може да изглежда новият куб?

Забележка. Два куба не се считат за различни, ако единият може да се получи чрез завъртане на другия.

Решение: Кубът може да се състои от $2\times2\times2=8$ малки кубчета, от $3\times3\times3=27$ малки кубчета и т.н. Тъй като разполагаме само с 18 малки кубчета, то единствената възможност е да използваме само 8 от тях. Различните варианти за комбиниране на бели и червени кубчета са описани по-долу. На всяка от картинките считаме, че невидимите кубчета са бели.

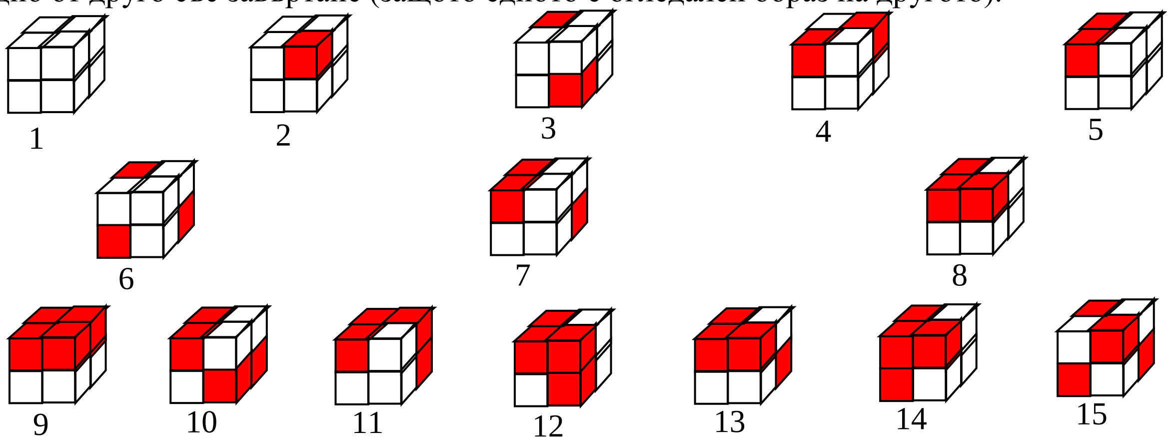
Случай 1. 0 червени и 8 бели кубчета (1 вариант) – картинка № 1.

Случай 2. 1 червено и 7 бели кубчета (1 вариант) – картинка № 2.

Случай 3. 2 червени и 6 бели кубчета (3 варианта) – картинки № 3, № 4 и № 5.

Случай 4. 3 червени и 5 бели кубчета (3 варианта) – картинки № 6, № 7 и № 8.

Случай 5. 4 червени и 4 бели кубчета (7 варианта) – картинки № 9, № 10, № 11, № 12, № 13, № 14 и № 15. Да обърнем внимание, че кубовете № 11 и № 12 не се получават едно от друго със завъртане (защото едното е огледален образ на другото).

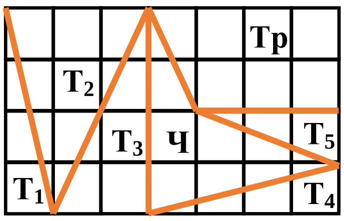


Забелязваме, че ако разменим местата на червените и белите кубчета, то случаите на 8 червени, 7 червени, 6 червени и 5 червени се свеждат до разгледаните случаи от 1. до 4. включително. Оттук получаваме отговора на задачата:

$$2(1+1+3+3)+7=2.8+7=16+7=23.$$

Оценяване: 1 точка за заключение, че кубът трябва да е съставен от $2\times2\times2=8$ малки кубчета и разглеждане на случаите с 0 и 8 червени малки кубчета; 1 точка за случаите с 1 и 7 червени малки кубчета; по 1 точка за всеки от случаите с 2, 3, 4, 5 и 6 червени малки кубчета.

5.1. През междучасието Емил си купил от магазина голям шоколад във формата на правоъгълник 14 см на 8 см, разделен на 28 еднакви квадратчета. По пътя към училище той изтървал шоколада, който се счупил на 7 парчета: пет триъгълника (**T_1**, **T_2**, **T_3**, **T_4** и **T_5**), един трапец (**Тр**) и един четириъгълник (**Ч**), както е показано на чертежа. Намерете лицето на всяко от парчетата.



Решение: Тъй като широчината на шоколада е 8 см и по широчината има 4 квадратчета, то дължината на страната на едно малко квадратче е $8:4=2$ см, а лицето му е $2.2=4$ кв. см. Триъгълникът **T_1** има основа 2 см и височина 8 см. Следователно лицето му е

$\frac{2.8}{2}=8$ кв. см. Триъгълникът **T$_2$** има основа $3.2=6$ см и височина 8 св. Следователно лицето му е $\frac{6.8}{2}=24$ кв. см. Триъгълникът **T$_3$** има основа $2.2=4$ см и височина 8 см. Следователно лицето му е $\frac{4.8}{2}=16$ кв. см. Триъгълникът **T$_4$** има основа $4.2=8$ см и височина 2 см. Следователно лицето му е $\frac{8.2}{2}=8$ кв. см. Триъгълникът **T$_5$** има основа $3.2=6$ см височина 2 см. Следователно лицето му е $\frac{6.2}{2}=6$ кв. см. Трапецът **Тр** има основи $3.2=6$ см и $4.2=8$ см, както и височина $2.2=4$ см. Следователно лицето му е $\frac{6+8}{2}\cdot 4=28$ кв. см. Сборът от лицата на петте триъгълника и трапеца е равен на $8+24+16+8+6+28=90$ кв. см. Полученото лице ще извадим от лицето на целия шоколад и ще получим лицето на четириъгълника **Ч**. Тъй като шоколадът има формата на правоъгълник с размери $7.2=14$ см и $4.2=8$ см, лицето му е $14.8=112$ кв.см. Тогава лицето на четириъгълника е $112-90=22$ кв. см.
Оценяване: По 1 точка за намиране лицето на всяка от седемте части на шоколада.

5.2. . Решете ребуса

ГАЦО + БАЦО = ЗАЙЦИ,

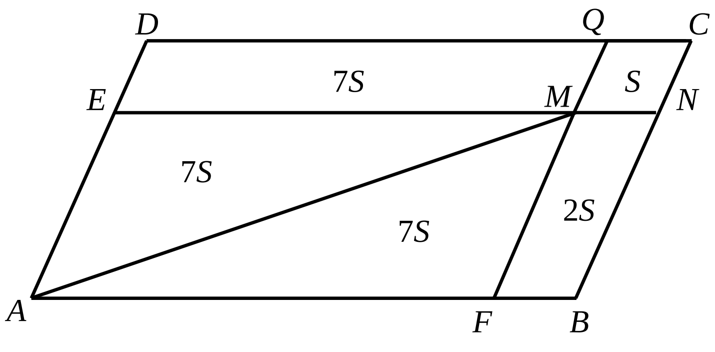
ако на еднаквите букви съответстват еднакви цифри, а на различните букви съответстват различни цифри. Освен това числото, което съответства на думата ЗАЙЦИ, е възможно най-голямо.
Решение: Ребусът е сбор на две четирицифрени числа, като резултатът е петцифрено число. Оттук следва, че на буквата „З“ съответства 1, т.е. „З“=1. Тъй като ЗАЙЦИ трябва да е възможно най-голямо число, то е естествено да опитаме с „А“=9. Но тогава числото Г+Б+1 няма как да е равно на 19. Ако „А“=8, то числото Г+Б+1 може да е равно на 18 само в случай, че Г и Б са цифрите 9 и 8. Това е невъзможно, защото цифрата 8 е вече използвана за „А“. Ако „А“=7, то Г+Б+1 може да е равно на 17 само ако „Г“=“Б“=8 или Г и Б са цифрите 9 и 7. И двата случая е нарушено условието в задачата. Ще докажем, че при „А“=6 задачата има решение. В този случай Г+Б+1=16 само ако Г и Б са цифрите 8 и 7. Сега „Й“=2 или „Й“=3. За да получим по-голяма стойност на ЗАЙЦИ ще опитаме с „Й“=3 и „Ц“=9. Сега единствената възможност за О е „О“=5. Получаваме сбора 8695+7695=16390 е непосредствено проверяваме, че всички условия в задачата са изпълнени. Задачата има още едно решение, като разменим стойностите на Г и Б, а именно 7695+8695=16390.
Оценяване: 1 точка за намиране на „З“=1; по 1 точка за отхвърляне на трите случая „А“=9, „А“=8 и „А“=7; 3 точки за завършване на решението. По 1 точка за всеки от двата отговора, когато липсват обосновки (тези точки не се добавят към предишните).

5.3. Всеки месец един търговец записвал в тетрадка по едно число *X*, което показвало разликата между приходите *П* и разходите *Р* за месеца, т.е. разликата между парите, които търговецът получавал през месеца и парите, които харчел през месеца. Търговецът забелязал, че записаните през последните пет месеца числа X_1, X_2, X_3, X_4 и X_5 са естествени и притежават следните свойства: числото $\frac{X_1+X_2+X_3+X_4+X_5}{5}$ не е цяло, а сумата на кои да е две, три или четири числа от тези пет, разделена със съответния брой на събираемите, е цяло число. Например, ако вземем три от числата, да кажем X_1, X_3 и X_4, то числото $\dfrac{X_1+X_3+X_4}{3}$ е цяло. Възможно ли е да се случи това? Обосновете отговора си!

Решение: Ще посочим пример, който изпълнява условията на задачата. Нека $X_1=X_2=X_3=X_4=1$ и ще намерим $X_5=a$ така, че да са изпълнени исканите свойства. Забелязваме, че числото a трябва да е нечетно. В противен случай числото $a+1$ ще е нечетно и $\dfrac{a+1}{2}$ няма да е цяло. Така, получаваме, че a трябва да дава остатък 1 при деление на 2. Тъй като $1+1+a$ трябва да се дели на 3, то a трябва да дава остатък 1 при деление на 3. Тъй като $1+1+1+a$ трябва да се дели на 4, то a трябва да дава остатък 1 при деление на 4. В същото време числото $1+1+1+1+a$ не трябва да се дели на 5, за което е достатъчно да изберем a така, че да се дели на 5. Числото $a-1$ трябва да се дели на 2, на 3 и на 4, а следователно и на най-малкото общо кратно на тези числа, което е 12. Разглеждаме последователните кратни на 12. Ако $a-1=12$, то $a=13$, което обаче не се дели на 5. Но ако $a-1=24$, то $a=25$, което вече се дели на 5. По този начин установихме, че числата 1, 1, 1, 1 и 25 изпълняват условията в задачата. Оттук непосредствено следва, че и числата n, n, n, n и $25n$ също изпълняват условията на задачата при произволно естествено число n. От направените разглеждания следва, че са възможни и много други случаи.

Оценяване: 3 точки, ако е доказано, че е достатъчно четири от числата да се изберат равни; 4 точки за завършване на решението (от тях 1 точка за частични резултати в тази част на решението). Задачата се оценява с пълен брой точки, ако е посочен пример и е направена проверка, че примерът е работещ.

6.1. Дадени са успоредник $ABCD$ и ромб $MNCQ$, за които точката C е общ връх, точката M е във вътрешността на успоредника, а $N \in BC$ и $Q \in CD$. Страната AB на успоредника е 8 пъти по-голяма от страната на ромба и $BC=\dfrac{3}{8}AB$. Да се намери лицето на ромба, ако лицето на трапеца $ABNM$ е 171 кв. см.



Решение: Нека правата NM пресича страната AD в точка E, а правата QM пресича страната AB в точка F. Тогава

$$FB=\frac{1}{8}AB,\ AB=8FB,$$

$$AF=AB-FB=8FB-FB=7FB,$$

$BC=\dfrac{3}{8}AB=\dfrac{3}{8}\cdot 8FB=3FB=3NC$, $NC=\dfrac{1}{3}BC$ и $BN=BC-NC=3NC-NC=2NC$. Да означим лицето на $MNCQ$ с S. Тъй като $MNCQ$ и успоредникът $FBNM$ имат обща височина от върха M съответно към страните NC и BN, то $S_{FBNM}=2S$. Аналогично успоредниците $FBNM$ и $AFME$ имат обща височина от върха M съответно към страните FB и AF, откъдето $S_{AFME}=14S$. Като вземем предвид, че диагоналът в успоредника разделя лицето му на две равни части, заключаваме, че $S_{AFM}=7S$. Оттук $S_{ABNM}=S_{AFM}+S_{FBNM}=7S+2S=9S$. От условието на задачата намираме $9S=171$, т.е. $S=\frac{171}{9}=19$ кв. см.

Оценяване: По 2 точки за изразяване лицата на успоредниците $FBNM$ и $AFME$ чрез S. По 1 точка за изразяване лицата на ΔAFM и на трапеца $ABNM$ чрез S. За завършване на решението – 1 точка.

6.2. Празнична торта е направена от три цилиндрични блата с еднаква височина. Най-долният блат има диаметър 50 см, а диаметърът на всеки следващ е с 10 см по-малък от предходния. Тортата е поставена в цилиндрична кутия с диаметър, равен на диаметъра на най-долния блат и височина, която е с 5 см по-голяма от височината на тортата. Намерете височината на тортата, ако тортата заема $\frac{3}{5}$ от обема на кутията .

Решение: Да означим височината на един блат с h см. Тогава цялата торта е висока $3h$ см, а кутията – съответно $(3h+5)$ см. За радиусите на трите блата намираме 25, 20 и 15 см. Като използваме формулата за обем на цилиндър, получаваме

$$\pi\left(15^2+20^2+25^2\right)h=\frac{3}{5}.\pi.25^2.(3h+5).$$

След опростяване оттук следва, че $10h=3(3h+5)$ и $h=15$ см. Следователно тортата е висока 45 см.

Оценяване: 1 точка за намиране радиусите на трите блата; 3 точки за изравняване обемите на тортата и кутията; 2 точки за намиране на неизвестното от съответното уравнение; 1 точка за завършване на решението.

6.3. В държавата Фридландия паричната единица се нарича фрид и се използват три вида монети. Монетата от 1 фрид тежи 6 г, монетата от 2 фрида тежи 12 г, а монетата от 10 фрида тежи 25 г. В централната банка на държавата всеки набор монети може да се замени за друг със същото тегло.

а) Ако имате 2014 фрида в 1030 монети по 1 фрид, 7 монети по 2 фрида и 97 монети по 10 фрида, можете ли с подходящи замени да получите 3449 фрида?

б) Възможно ли е от 2014 фрида (в произволен набор монети) да получите 2901 фрида с помощта на подходящи замени?

Решение: а) За да получим 3449 фрида от 2014 фрида, трябва да постигнем печалба от $3449-2014=1435$ фрида. Да забележим, че теглото на 25 монети по 1 фрид е 150 г, колкото е теглото на 6 монети по 10 фрида. Така, при замяна на набор монети по 1 фрид със стойност 25 фрида и набор монети по 10 фрида (който е със същото тегло) реализираме печалба от $6.10-25.1=35$ фрида. Да разгледаме 41 групи от по 25 монети по 1 фрид. От направеното разсъждение следва, че можем да заменим тези групи с 41 групи от по 6 монети по 10 фрида. По този начин ще се реализира исканата печалба $41.35=1435$ фрида. При това се ползват $41.25=1025$ от наличните 1030 монети по 1 фрид.

б) Нека имаме a монети по 1 фрид, b монети по 2 фрида и c монети по 10 фрида. Тогава стойността на монетите е $N=1.a+2.b+10.c$ фрида, а теглото им е

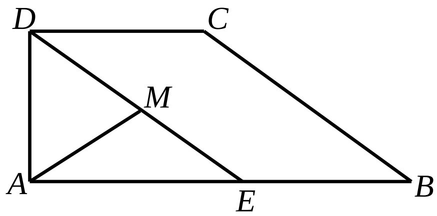
$$M=6.a+12.b+25.c\ =(a+2.b+10.c)+(5.a+10.b+15c)\text{ грама.}$$

Двете числа M и N имат един и същ остатък при деление на 5. От друга страна числото 2014 има остатък 4, а числото 2901 има остатък 1 при деление на 5. Следователно замяната не може да се извърши.

Оценяване: а) 2 точки за установяване, че при замяна на 25 фрида в монети по 1 фрид с 6 монети по 10 фрида се реализира печалба от 35 фрида (същият брой точки се присъждат при установяване на еквивалентна зависимост); 2 точки за показване как се получава желаната печалба.

б) 2 точки за откриване на инварианта (или негов еквивалент) и 1 точка за прилагането му.

7.1. Даден е трапец $ABCD$, в който сборът от ъглите, прилежащи на по-голямата основа AB, е равен на 120^0. Да се намерят ъглите на трапеца, ако $BC = 2AD$.



Решение: Нека правата през D, която е успоредна на BC, пресича AB в точка E. Тогава $\angle AED = \angle ABC$ (съответни). От условието в задачата намираме, че $\angle DAE + \angle AED = 120^0$. Оттук получаваме, че $\angle ADE = 60^0$. Нека M е средата на отсечката DE.

Получаваме, че $DM = \frac{1}{2}ED = \frac{1}{2}BC = AD$. Това означава, че ΔAMD е равнобедрен, а следователно и равностранен, след като ъгълът при върха му е 60^0. В частност $AM = DM = EM$, т.е. ΔAEM е равнобедрен. Сега $60^0 = \angle AMD = \angle MAE + \angle AEM$ (външен) $= 2\angle AEM$. Така $\angle ABC = \angle AEM = 30^0$. Освен това

$$\angle BAD = \angle DAM + \angle EAM = 60^0 + 30^0 = 90^0.$$

Окончателно ъглите на трапеца са 90^0, 30^0, 150^0 и 90^0.

Оценяване: За доказване, че ΔAMD е равностранен – 4 точки (от които 3 точки, че е равнобедрен и 1 точка за $\angle ADE = 60^0$). За $\angle AEM = 30^0$ 1 точка, за $\angle BAD = 90^0$ 1 точка и 1 точка за останалите ъгли.

7.2. Да се намерят целите решения на уравнението $10xy + 16x + 5y = 2006$.

Решение: След прибавяне на 8 към двете страни на уравнението можем да разложим лявата страна на множители и да получим $(5y+8).(2x+1) = 2014$. Тъй като $2014 = 2.19.53$ и когато x е цяло число, $2x+1$ е нечетно, са възможни следните случаи:

1. $2x+1=1,\ 5y+8=2014$
2. $2x+1=-1,\ 5y+8=-2014$
3. $2x+1=19,\ 5y+8=106$
4. $2x+1=-19,\ 5y+8=-106$
5. $2x+1=53,\ 5y+8=38$
6. $2x+1=-53,\ 5y+8=-38$
7. $2x+1=1007,\ 5y+8=2$
8. $2x+1=-1007,\ 5y+8=-2$

В случай 5. получаваме $x = 26, y = 6$, в случай 8. получаваме $x = -504, y = -2$, а останалите случаи нямат решения в цели числа.

Оценяване: 3 точки за разлагането $(5y+8).(2x+1) = 2014$; 4 точки за решаване на диофантовото уравнение (по 0,5 точки за пълно обосноваване на всеки от осемте случая, което включва проверка дали получените стойности са решение или не); 0,5 точки за отгатнат верен отговор, като тези точки не се добавят към предишните.

7.3. Нека $A = 3.2^{2013}$. Да се докаже, че съществува:

а) представяне на A в сума от последователни естествени числа (поне две);

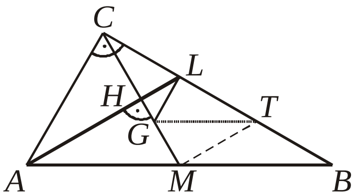
б) единствено представяне на A в сума от последователни естествени числа (поне две).

Решение: а) $A=\left(2^{2013}-1\right)+2^{2013}+\left(2^{2013}+1\right)$.

б) Да разгледаме уравнението $A=a+(a+1)+\ldots+(a+n-1)$, $n\geq 2$. Задачата се свежда да докажем, че това уравнение има единствено решение в естествени числа a и n. Имаме $2A=2.3.2^{2013}=2\left(na+\dfrac{n(n-1)}{2}\right)=n(2a+(n-1))$, т.е. $3.2^{2014}=n(2a+(n-1))$. Ако n е четно, то числото $2a+(n-1)$ е нечетно и от последното равенство следва, че $2a+(n-1)=1$ или $2a+(n-1)=3$. Първата възможност отпада непосредствено, поради $n\geq 2$. Втората възможност може да се реализира единствено при $n=2$ и $a=1$. Но тогава $A=1+2=3$, което е невъзможно. Заключаваме, че n е нечетно и следователно $n=3$. Сега $2^{2014}=2a+2$, откъдето $a=2^{2013}-1$. Получаваме отново, че $A=\left(2^{2013}-1\right)+2^{2013}+\left(2^{2013}+1\right)$, но от доказателството следва, че това представяне е единствено.

Оценяване: 2 точки за а) и 5 точки за б), от които 1 точка за представянето $A=na+\dfrac{n(n-1)}{2}$, за свеждане на задачата до диофантовото уравнение $3.2^{2014}=n(2a+(n-1))$ 1 точка, за доказване, че n е нечетно – 2 точки, за завършване на задачата – 1 точка.

8.1. Даден е правоъгълен триъгълник ABC с хипотенуза $AB=2a$ и медицентър G. Ако ъглополовящата AL $(L\in BC)$ е перпендикулярна на медианата CM $(M\in AB)$, намерете дължината на отсечката LG.



Решение: Нека $H=CM\cap AL$. В ΔAMC, в който $CM=AM$, AH е ъглополовяща и височина. Следователно $AC=AM$ и ΔAMC е равностранен. В ΔABC получаваме $\angle CAB=60^\circ$ и $\angle CBA=30^\circ$. Построяваме $MT\parallel AL$, $T\in BC$. Тъй като M е средата на AB, то T е средата на BL. Но H е средата на CM и $HL\parallel MT$. Следователно $CL=LT=TB$ и MT е средна отсечка в ΔABL. Тогава $\angle TMB=\angle LAB=30^\circ=\angle ABC$. Разглеждаме $\overrightarrow{GT}=\overrightarrow{CT}-\overrightarrow{CG}=\frac{2}{3}\overrightarrow{CB}-\frac{2}{3}\overrightarrow{CM}=\frac{2}{3}\overrightarrow{MB}$ и получаваме, че $GT\parallel MB$. Оттук $\angle GTL=\angle MBT=30^\circ$. Но $\angle MTC=60^\circ$ като външен за ΔMBT и следователно $\Delta GTM\cong\Delta GTL$ (I признак). Така $LG=GM$. Но тъй като G е медицентър на ΔABC, то $GM=\frac{1}{3}CM=\frac{a}{3}$. Окончателно получаваме, че $LG=\frac{a}{3}$.

Оценяване: За доказване, че ΔAMC е равностранен – 1 точка; 1 точка за $MT\parallel AL$, $T\in BC$; 1 точка, че MT е средна отсечка в ΔABL; 2 точки за $GT\parallel MB$; 1 точка за $LG=GM$ и 1 точка за завършване на решението.

8.2. Ако m и n са естествени числа, за които $|m-1|+|m-2|+\ldots+|m-2015|=n(n+1)$, да се пресметне $m+n$.

Решение: Да обърнем внимание, че при фиксирано n съществува най-много едно m, за което е изпълнено равенството от условието на задачата. Нека m удовлетворява равенството при фиксирано n. Сега е ясно, че числото $2016-m$ също го удовлетворява. От единствеността следва, че $m=2016-m$, откъдето $m=1008$. Тогава равенството става

$$1007+1006+...+1+0+1+...1007=n(n+1),$$

т.е. $2(1+2+...+1007)=n(n+1)$. Оттук $1007.1008=n(n+1)$. Получаваме $n=1007$ и $m+n=2015$.

Оценяване: За съобразяване, че при фиксирано n съществува най-много едно m, което е удовлетворява равенството, 2 точки. За съобразяване, че $2016-m$ е решение в случай, че m е решение, 3 точки. За завършване на решението – 2 точки.

8.3. Намерете всички двойки цели числа x и y, за които $x^2+4y^2=2014y$.

Решение: Нека (x,y) е решение. Тъй като $2014=2.19.53$, то 19 дели лявата страна на уравнението. Оттук следва, че 19 дели поотделено x и y. Този факт може да се съобрази с помощта на таблицата по-долу, в която с използване на означенията $a=x$ и $b=2y$ са разгледани всевъзможните остатъци на a и b при деление на 19.

a,b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
a^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1
b^2	0	1	4	9	16	6	17	11	7	5	5	7	11	17	6	16	9	4	1

С непосредствена проверка от таблицата следва, че при комбиниране на числата от втория и третия ред само в случая, когато a и b се делят едновременно на 19, е възможно a^2+b^2 да се дели на 19. По-нататък забелязваме, че x трябва да е четно, откъдето заключаваме, че дясната страна на уравнението се дели на 4. Това означава, че и y е четно. Имаме:

$$x=2.19.x_1 \text{ и } y=2.19.y_1 \Rightarrow x_1^2+4y_1^2=53.y_1 \Rightarrow x_1^2=y_1.(53-4y_1).$$

Полученото диофантово уравнение може да се реши, като даваме последователно стойности $y_1=0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12$ и 13. Оттук $x_1=\pm 7$ и $y_1=1$ или $x_1=0$ и $y_1=0$. Лесно проверяваме, че решенията (x,y) са (0; 0), (266; 38) и (– 266; 38).

Оценяване: 3 точки за обосновка, че x и y поотделно се делят на 19; за четност на x и y – 1 точка; за всяко открито решение без тривиалното – по 1 точка (общо 2 точки); за доказване, че решенията са само три – 1 точка.

Забележка. Известен е следният факт от теорията на числата: Ако простото число $p=4k+3$ дели a^2+b^2, то a и b се делят едновременно на p. Който е взел предвид, че $19=4.4+3$ и е използвал този факт (дори и без доказателство), получава 3 точки.

Задачите са предложени, както следва:

4.1. – Ивайло Старибратов и Ивайло Кортезоз, 4.2. – Ивайло Кортезов, 4.3. – Ивайло Старибратов;

5.1. – Емил Карлов, Иван Ангелов, Ивайло Кортезов;

6.1. – Стоян Ненков, 6.2. – Ирина Шаркова, 6.3. – Мариана Кьосева;

7.1. – Веселин Ненков и Сава Гроздев, 7.2. – Мариана Кьосева, 7.3. – Веселин Ненков и Сава Гроздев;

8.1. – Мариана Кьосева, 8.2. – Веселин Ненков и Сава Гроздев, 8.3. – Иван Ангелов.

Министерство на образованието и науката
Съюз на математиците в България

63. Национална олимпиада по математика

Областен кръг, 30 март 2014 г.

София, 2014 г.

Условия, кратки решения и инструкции за оценяване

Задача 9.1. Да се реши уравнението $\sqrt{6-x} = 6 - x^2$.

Решение. Уравнението има смисъл при $x \leq 6$, а при $x \in [-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$ то е еквивалентно на $6 - x = 36 - 12x^2 + x^4 \iff x^4 - 12x^2 + x + 30 = 0$. Чрез проверка на делители на 30 установяваме, че 2 е корен (това се вижда лесно и от условието) и разлагаме $x^4 - 12x^2 + x + 30 = (x-2)(x^3 + 2x^2 - 8x - 15)$. Уравнението $x^3 + 2x^2 - 8x - 15 = 0$ има корен -3 (който не е корен на нашето ирационално уравнение, защото $-3 < -\sqrt{6}$) и разлагаме $x^3 + 2x^2 - 8x - 15 = (x+3)(x^2 - x - 5)$.

Квадратното уравнение има корени $x_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{21}}{2}$, като само $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$ принадлежи на интервала $[-\sqrt{6}, \sqrt{6}]$.

Окончателно, решенията са $x = 2$ и $x = \frac{1-\sqrt{21}}{2}$.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 1 т. за достигане до уравнението от четвърта степен, 1 т. за намиране на корена 2, 1 т. за първото разлагане, 1 т. за откриване на множителя $x+3$, 1 т. за второто разлагане, 2 т. за решаване на квадратното уравнение и изследване на корените му.

Задача 9.2. Даден е $\triangle ABC$ с център на вписаната окръжност I. Окръжност с център I минава през върха C и пресича страната AB във вътрешни точки M и N. Да се докаже, че $\sphericalangle MCN < 60^\circ$.

Решение. В $\triangle AMC$ точка I се явява пресечна точка на симетралата на страната CM и ъглополовящата на $\sphericalangle CAM$ и следователно I лежи на описаната около $\triangle AMC$ окръжност и в частност $\sphericalangle ICM = \sphericalangle IAM = \dfrac{1}{2} \sphericalangle CAB$. Аналогично $\sphericalangle ICN = \dfrac{1}{2} \sphericalangle CBA$ и следователно $\sphericalangle ACB = 180^\circ - \sphericalangle CAB - \sphericalangle CBA = 180^\circ - 2 \sphericalangle MCN$. Но по условие M и N са вътрешни точки за AB и следователно $\sphericalangle ACB > \sphericalangle MCN$, т.е. $\sphericalangle MCN < 60^\circ$.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 3 т. за $AMIC$ - вписан и $BNIC$ - вписан; 2 т. за изразяване на $\sphericalangle ACB$ чрез $\sphericalangle MCN$ и 2 т. за заключението $\sphericalangle MCN < 60^\circ$.

Задача 9.3. Да се намерят всички естествени числа n, за които числото

$$A = n(n+2)(n+3)(n+5)$$

има точно три различни прости делителя. (Някои от простите делители на A могат да делят A и с по-висока от първа степен.)

Решение. Очевидно един от простите делители е 2. Ако никое от числата n, $n+2$, $n+3$ и $n+5$ не се дели на 3, то двете нечетни са степени на различни нечетни прости числа, а тогава двете четни са степени на 2, с евентуално изключение на случая, когато $5|n$. Получаваме $n = 2$ и съответно $A = 2.4.5.7$, което има исканите свойства, или $n = 2^x.5$, $n + 2 = 2^y > 2$ (и $n + 5 = 5^z$), което означава, че $x = 1$ и тогава $n + 2$ се дели на 3 (противоречие), или $n = 5^x$, $n + 3 = 2^y > 2$ и $n + 5 = 2.5^z$), при това $x = 1$ или $z = 1$, като и двете водят до решението $n = 5$ ($A = 5.7.8.10$ има исканото свойство).

По-надолу ще използваме следните две добре известни леми.

Лема 1. Всички решения на уравнението $2^x - 3^y = 1$ в цели неотрицателни числа са $(x, y) = (1, 0)$ и $(2, 1)$.

Доказателство. Ако $y > 0$, по модул 3 заключаваме, че x е четно число, $x = 2x_1$, $x_1 \in \mathbb{N}$, и разлагаме $(2^{x_1}-1)(2^{x_1}+1) = 3^y$. Последното е възможно само при $2^{x_1}-1 = 1$, т.е. $x_1 = 1$, $x = 2$ и $y = 1$.

Лема 2. Всички решения на уравнението $3^x - 2^y = 1$ в цели неотрицателни числа са $(x, y) = (1, 1)$ и $(2, 3)$.

Доказателство. Ако $y > 2$, по модул 4 заключаваме, че x е четно число, $x = 2x_1$, $x_1 \in \mathbb{N}$, и разлагаме $(3^{x_1}-1)(3^{x_1}+1) = 2^y$. Последното е възможно само при $3^{x_1}-1 = 2$, т.е. $x_1 = 1$, $x = 2$ и $y = 3$.

Нека две от числата n, $n + 2$, $n + 3$ и $n + 5$ се делят на 3. Точно едно от тези две числа е четно, а другото е степен на 3 (Защо?) и имаме два случая.

Случай 1. Ако двете кратни на 3 са n и $n + 3$, то $n = 3.2^u$ и $n + 3 = 3^v$ или $n = 3^u$ и $n + 3 = 3.2^v$. Получаваме $3 = 3^v - 3.2^u \iff 3^{v-1} - 2^u = 1$ или $3 = 3.2^v - 3^u \iff 2^v - 3^{u-1} = 1$. Сега съответно на Лема 1 или Лема 2 намираме $n = 6$ ($A = 6.8.9.11$ има исканото свойство), $n = 24$ ($A = 24.26.27.29$ не дава решение), $n = 3$ ($A = 3.5.6.8$ има исканото свойство) и $n = 9$ ($A = 9.11.12.14$ не дава решение).

Случай 2. Ако двете кратни на 3 са $n + 2$ и $n + 5$, разсъждаваме аналогично и получаваме още едно решение $n = 4$ ($A = 4.6.7.9$ има исканото свойство).

Инструкции за оценяване. (7 точки) 1 т. за случая, когато A не се дели на 3, по 3 т. за двата случая след това. Отнема се една точка, ако фактите от лемите са използвани без коректно доказателство.

Задача 9.4. За дадено множество S от 2014 точки в равнината нека ℓ е минималното естествено число, за което съществуват ℓ прави, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Нека c е минималното естествено число, за което съществуват c окръжности, такива, че всяка точка от S лежи върху някоя от тях. Съществува ли множество S, за което:

а) $\ell = 15$ и $c = 67$;

б) $\ell = 19$ и $c = 53$?

Решение. а) Отговор: Не. Да разгледаме едно покриване на S със c окръжности.

Тогава върху окръжността с най-много точки от S има поне $\frac{2014}{c}$ точки и за да покрием тези точки с прави, са ни необходими поне $\frac{2014}{2c} = \frac{1007}{c}$ прави (защото всяка права покрива най-много две от точките). Следователно $\ell \geq \frac{1007}{c} \iff c\ell \geq 1007$, докато за дадените стойности на c и ℓ имаме $c\ell = 15.67 = 1005$.

б) Отговор: Да. Да разгледаме 19 успоредни прави и 53 окръжности, всяка от които пресича всяка от деветнадесетте прави в по 2 различни точки (и никои две окръжности не се пресичат върху правите). Получаваме множество S от общо $19.53.2 = 2014$ точки, за което ще докажем, че има исканото свойство. Да допуснем, че $c < 30$. Тогава ще има окръжност, върху която лежат повече от 20 точки и някоя от 19-те успоредни трябва да пресича тази окръжност поне в 3 точки, противоречие. Аналогично, ако допуснем, че $\ell < 10$, то в съответното покриване има права на която лежат повече от 60 точки и тогава върху някоя от 30-те окръжности от конструкцията има поне 3 точки от тази права, пак противоречие.

Инструкции за оценяване. (7 точки) 3 т. за а) и 4 т. за пример за б), в това число 2 т. за посочване на работещ пример и по 1 т. за доказване на $\ell = 19$ и $c = 53$. Правилни отговори без смислена обосновка се оценяват с 0 т.

Задача 10.1. Да се намерят стойностите на параметъра a, при които системата

$$\left| \begin{array}{l} 4^x + 9^y \leqq a, \\ 2^x - 3^y \geqq 1 \quad \text{има решение.} \end{array} \right.$$

Решение. От второто неравенство получаваме $2^x \geqq 3^y + 1$ и следователно $4^x \geqq 3^{2y} + 2.3^y + 1$. От друга страна, от първото неравенство $4^x \leqq a - 9^y$ и така достигаме до неравенството

$$2.(3^y)^2 + 2.3^y + 1 - a \leqq 0.$$

Тъй като $3^y > 0$ за всяко y, следва, че $a \geqq 2.(3^y)^2 + 2.3^y + 1 > 1$. Ще докажем, че $a > 1$ е и достатъчно условие дадената система да има решение. Действително, ако $a > 1$, $3^y = \dfrac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2}$, $2^x = 3^y + 1 = \dfrac{1 + \sqrt{2a-1}}{2}$, то дадената система неравенства очевидно се удовлетворява и така достигаме до една възможна двойка решения

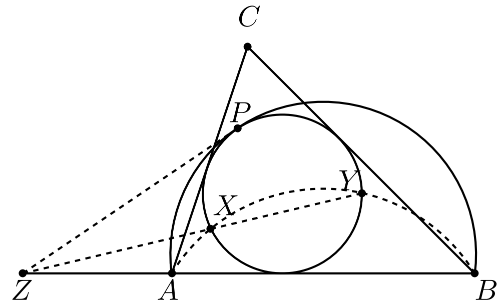
$$x = \log_2 \left(\frac{1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right), \ y = \log_3 \left(\frac{-1 + \sqrt{2a-1}}{2} \right).$$

Окончателно, търсените стойности за a са в интервала $(1, +\infty)$.

Инструкции за оценяване. 3 т. за намиране на необходимото условие $a > 1$; 4 т. за доказване на достатъчност на условието.

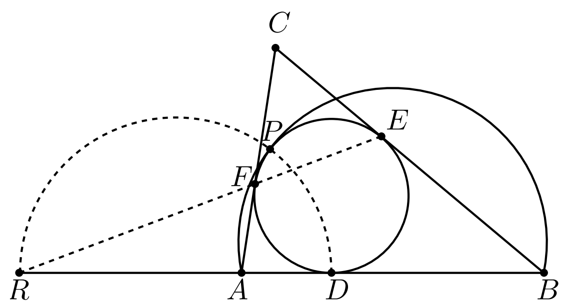
Задача 10.2. Даден е $\triangle ABC$. Да се построи с линийка и пергел окръжност, която минава през върховете A и B и се допира до вписаната в $\triangle ABC$ окръжност.

Решение. Построяваме вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k нека X е проиволна точка от нея. Построяваме описаната около $\triangle ABX$ окръжност и нека тя пресича за втори път k в точка Y, а правата XY пресича правата AB в точка Z. През Z построяваме допирателна към k, която пресича k в точка P. (В случай, че $XY \parallel AB$, $\triangle ABC$ е равнобедрен и построяваме точка P като втората пресечна точка на симетралата на AB с k.).



Ще докажем, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност ω е търсената. Наистина, от свойството на секущите имаме $ZP^2 = ZX.ZY = ZA.ZB$ и следователно $\triangle ZPA \sim \triangle ZBP$, т.е. $\sphericalangle ZPA = \sphericalangle ZBP$ и ω се допира вътрешно до k.

Забележка. Задачата има няколко възможни подхода за решение, включително и с инверсия. Един такъв е илюстриран на фигурата вдясно. Построяваме вписаната в $\triangle ABC$ окръжност k и нека D, E и F са допирните точки на k със страните AB, BC и CA съответно. Нека $\triangle ABC$ е неравнобедрен и правата EF пресича правата AB в точка R. Построяваме окръжност с диаметър RD, която пресича k за втори път



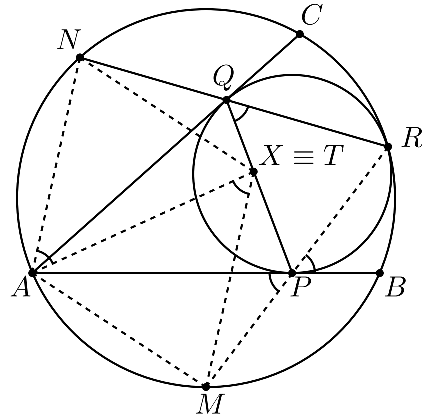
в точка P. Оказва се, че описаната около $\triangle ABP$ окръжност е търсената (Защо?).

Едно много характерно, но нетривиално за доказателство свойство на тази конфигурация е, че PD разполовава височината от върха C в $\triangle ABC$. Това ни води и до нова възможност за построение на точката P.

Инструкции за оценяване. 1 т. за разглеждане на тривиалния случай, когато $\triangle ABC$ е равнобедрен; 3 т. за построяване на търсената окръжност; 3 т. за доказателство на коректност на построението.

Задача 10.3. Върху дадена окръжност k са избрани точките A, B и C. Построена е окръжност ω, която се допира до хордите AB, AC и вътрешно до окръжността k в точките P, Q и R съответно. Нека правите PR и QR пресичат за втори път k в точките M и N съответно, а точка T е такава, че $AMTN$ е успоредник. Да се докаже, че точките P, Q и T лежат на една права.

Решение. Нека описаните окръжности около $\triangle AMP$ и $\triangle ANQ$ се пресичат за втори път точка X. Тогава $\sphericalangle AXP + \sphericalangle AXQ = (180^\circ - \sphericalangle AMP) + (180^\circ - \sphericalangle ANQ) = 180^\circ$ и следователно $X \in PQ$. Нещо повече, $\sphericalangle AXM = \sphericalangle APM = \sphericalangle BPR = \sphericalangle PQR = \sphericalangle XAN$ и следователно $MX \parallel AN$. Аналогично $NX \parallel AM$, т.е. $AMXN$ е успоредник и $X \equiv T$. С това доказателството е завършено.



Инструкции за оценяване. 3 т. за построяване на точката X и доказателство, че $X \in PQ$; 4 т. за доказателство, че $X \equiv T$.

Задача 10.4. Виж задача 9.4.

Задача 11.1. Да се намерят всички стойности на параметъра a, при които уравнението $2^{2x+1} - (a+8)2^x + a^2 + 4 = 0$ има един положителен и един отрицателен корен.

Решение. Плагаме: $y = 2^x$ и разглеждаме функцията $f(y) = 2y^2 - (a+8)y + a^2 + 4$. За да има уравнението от условието един положителен и един отрицателен корен, то $f(y) = 0$ трябва да има по един корен във всеки от интервалите $(0,1)$ и $(1,+\infty)$. Понеже $f(0) = a^2+4 > 0$, то достатъчно е да е изпълнено $f(1) < 0$. Това е еквивалентно на $a^2 - a - 2 < 0$, откъдето $a \in (-1,2)$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за полагането; 2 т. за заключението, че квадратното уравнение трябва да има по един корен във всеки от интервалите $(0,1)$ и $(1,+\infty)$; 4 т. за намиране на $a \in (-1,2)$.

Задача 11.2. Даден е триъгълник ABC, за който $BC^2+AC^2 = AC.AB$. Да се докаже, че допирната точка на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност със страната BC, средата на страната AB и средата на ъглополовящата през върха C лежат на една права.

Решение. Ще използваме стандартните означения за елементите на $\triangle ABC$. Нека CL, $L \in AB$, е ъглополовящата на $\sphericalangle ACB$, а P и Q са съответно средите на AB и CL. Тъй като $a^2 + b^2 = bc < b(a+b) = ab + b^2$, то $a < b$, което означава, че $AL > BL$, т.е. точката P е между A и L. Следователно $PL = \dfrac{c}{2} - \dfrac{ca}{a+b} = \dfrac{c(b-a)}{2(b+a)}$. Нека правата PQ пресича страната BC в точка X. От теоремата на Менелай за $\triangle LBC$ и правата PQ имаме

$$\frac{BP}{PL} \cdot \frac{LQ}{QC} \cdot \frac{CX}{XB} = 1,$$

откъдето $\dfrac{XB}{CX} = \dfrac{BP}{PL} = \dfrac{b+a}{b-a}$. От $CX + XB = a$ намираме $CX = \dfrac{a(b-a)}{2b}$.

Ако T е допирната точка на вписаната окръжност със страната BC, то $CT = \dfrac{a+b-c}{2}$. Равенството $CT = CX$ е еквивалентно на

$$\frac{a+b-c}{2} = \frac{a(b-a)}{2b} \iff a^2 + b^2 = bc.$$

Инструкции за оценяване. 2 т. за разглеждане на правата през две от дадените точки и опит да се докаже, че тя пресича третата отсечка в желаната точка; 2 т. за прилагане на теоремата на Менелай за подходящ триъгълник; 3 т. за довършване нарешението; за необосноваване на факта, че P е между A и L (само в решение, в което това е необходимо) да се отнема 1 т.

Задача 11.3. Съществува ли просто число $p \geq 5$, за което уравнението

$$2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0$$

има рационален корен?

Решение. Нека $\dfrac{m}{n}$ е рационален корен на

$$f(x) = 2(p+1)x^3 - 2(p-1)x^2 - (p+3)x + 3p - 1 = 0,$$

където $(m,n) = 1$, $m > 0, n \neq 0$ и m дели $3p-1$. Тогава $f(x) = (mx-n)g(x)$, където $g(x)$ е полином с цели коефициенти. Тъй като $f(1) = 2p$ и $f(-1) = 2$, то $m-n$ дели $2p$, а $m+n$ дели 2. Следователно $m-n = \pm1, \pm2, \pm p, \pm 2p$, $m+n = \pm1, \pm2$, като $m-n$ и $m+n$ са от една и съща четност.

Ако $m-n = x$ и $m+n = y$, то $m = \dfrac{x+y}{2}$ и $n = \dfrac{y-x}{2}$ за $x = \pm1, \pm2, \pm p, \pm 2p$, $y = \pm1, \pm2$. От $m, n \neq 0$ следва, че $x \neq \pm1, \pm2$. Остават случаите $x = \pm p, y = \pm1$ и $x = \pm 2p, y = \pm 2$. От $m > 0$ следва, че $x = p, y = \pm1$ или $x = 2p, y = \pm2$. Възможните стойности на m са $m = \dfrac{p\pm1}{2}$ и $m = p \pm 1$, като във всички случаи $\frac{p\pm1}{2}$ дели $3p-1$. От $3p - 1 = 6.\left(\dfrac{p-1}{2}\right) + 2 = 6.\left(\dfrac{p+1}{2}\right) - 4$, откъдето $\dfrac{p-1}{2}$ дели 2 (което е невъзможно при $p \geq 5$) или $\dfrac{p+1}{2}$ дели 4 (което е възможно само при $p = 7$). Директно се проверява, че при $p = 7$ съответните стойности на m и n не дават корен на уравнението. Следователно такова p не съществува.

Инструкции за оценяване. 2 т. за допускане, че има рационален корен и разлагането $f(x) = (mx-n)g(x)$; 2 т. за $f(1) = 2p$ и $f(-1) = 2$ или еквивалентни на тях, които водят до решение; 3 т. за довършване на решението.

Задача 11.4. Някои от градовете на една държава са свързани с пътища, като от всеки град излизат точно три пътя и във всеки два града, свързани с път, живеят различен брой жители. На всеки път е записано най-малкото общо кратно на броя на жителите на двата града, които са свързани с този път. Известно е, че сборът на числата върху всички пътища е два пъти по-голям от броя на жителите в държавата. Да се докаже, че градовете в държавата могат да се разделят на две групи така, че няма път, който да свързва два града от една и съща група.

Решение. Ако X е сборът на числата върху всички пътища, а Y е броят на жителите на всички градове, то от условието имаме $X = 2Y$. Нека x е най-малкото общо кратно на различните числа a и b, като $a > b$. Тогава $x \geq a$ и $x \geq 2b$, откъдето $3x \geq 2(a+b)$. Събираме съответните неравенства за всеки от пътищата в държавата и като използваме, че от всеки град излизат точно три пътя получаваме, че $3X \geq 6Y$, т.е. $X \geq 2Y$. Това означава, че за всеки път е изпълнено $3x = 2(a+b)$, т.е. $x = a$ и $x = 2b$ или $a = 2b$.

Получихме, че ако два града са свъзрани с път, то жителите на единия са два пъти повече от жителите на другия. Това означава, че ако от град с a жители може да се стигне до град с $b < a$ жители, минавайки по t пътя, то $a = 2^k b$, където t и k имат една и съща четност. Следователно в държавата няма затворен маршрут с нечетен брой пътища. Тогава градовете могат да се разделят в две групи без пътища във всяка от тях (това следва от добре известния факт, че граф без нечетни цикли е двуделен).

Инструкции за оценяване. 3 т. за доказване на $3x \geq 2(a+b)$; 1 т. за факта, че ако два града с a и $b < a$ жители са свързани с път, то $a = 2b$; 2 т. за доказване, че няма цикъл с нечетна дължина; 1 т. за довършване на решението.

Задача 12.1. За кои стойности на параметъра a системата

$$\left| \begin{array}{l} y \geq x^2 + ay + 1 \\ x \geq y^2 + ax + 1 \end{array} \right.$$

има единствено решение?

Решение. Да забележим, че ако (x, y) е решение, то и (y, x) също е решение. Следователно ако системата има единствено решение (x_0, y_0), то $x_0 = y_0$. При $x = y$ системата е еквивалентна на квадратното неравенство $x^2 + (a-1)x + 1 \leq 0$. Това квадратно неравенство има единствено решение, ако дискриминантата му $a^2 - 2a - 3$ е равна на нула, т. е. $a = 3, -1$. Обратно, при $a = 3$ като съберем двете неравенства на системата, получаваме неравенството $(x+1)^2 + (y+1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = -1$ е единственото решение на системата. При $a = -1$ като съберем двете неравенства на системата, получаваме неравенството $(x-1)^2 + (y-1)^2 \leq 0$, т.е. $x = y = 1$ е единственото решение на системата. Търсените стойности са $a = 3, -1$.

Инструкции за оценяване. 2 т. за наблюдението, че ако (x, y) е решение, то и (y, x) също е решение; 2 т. за намиране, че при единствено решение и $x = y$ имаме $a = 3, -1$; 2 т. за доказателство, че при $a = 3, -1$ системата има единствено решение.

Задача 12.2. Да се намери най-малката възможна стойност на страната на равностранен триъгълник с върхове върху параболата $y = x^2$.

Решение. Нека $A_1(x_1, x_1^2)$, $A_2(x_2, x_2^2)$, $A_3(x_3, x_3^2)$ са върхове на на равностранен триъгълник. Можем да считаме, че $x_1 < 0 \leq x_2 \leq x_3$. Нека α е острият ъгъл между правата A_2A_3 и абсцисната ос, а β е острият ъгъл между правата A_2A_3 и тази ос. Тогава

$$\alpha + \beta = 120^\circ, \quad \tan\alpha = \frac{x_3^2 - x_2^2}{x_3 - x_2} = x_3 + x_2, \quad \tan\beta = \frac{x_1^2 - x_2^2}{x_2 - x_1} = -x_1 - x_2,$$

откъдето

$$-\sqrt{3} = \tan 120^\circ = \frac{x_3 - x_1}{1 - \tan\alpha\tan\beta}.$$

Понеже

$$0 < \tan\alpha\tan\beta - 1 = -\frac{2\cos(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)} = \frac{2}{2\cos(\alpha-\beta) - 1} \geq 2,$$

то $A_1A_3 \geq x_3 - x_1 \geq 2\sqrt{3}$, като равенство се достига само при $x_3 = -x_1 = \sqrt{3}$ и $x_2 = 0$.

Забележка. Всъщност доказахме, че ако A_1, A_2, A_3 са три точки върху параболата с растящи абциси и $\sphericalangle A_1A_2A_3 = 60^\circ$, то дължината на проекцията на A_1A_3 върху абсцисната ос е поне $2\sqrt{3}$.

Инструкции за оценяване. 1 т. за наблюдението, че можем да разглеждаме $f(x) = x^2$; 1 т. за разглеждане на трите върха на равностранния триъгълник и изразяване на разстоянията между тях; 5 т. за довършване на решението.

Задача 12.3. Даден е $\triangle ABC$. За точка X от равнината на триъгълника, различна от върховете му, с A_X и B_X са означени пресечните точки на ъглополовящите на $\sphericalangle AXC$ и $\sphericalangle BXC$ съответно със страните AC и BC. За кои точки X изразът $\frac{1}{A_XC} + \frac{1}{B_XC}$ приема минимална стойност?

Решение. От свойството на ъглополовящите и неравенството на Птолемей имаме, че

$$\frac{1}{A_XC} + \frac{1}{B_XC} = \frac{AX + CX}{AC.CX} + \frac{BX + CX}{BC.CX} = \frac{AX.BC + BX.AC + CX(AC + BC)}{AC.BC.CX}$$

$$\geq \frac{CX.AB + CX(AC + BC)}{AC.BC.CX} = \frac{AB + AC + BC}{AC.BC}.$$

Равенство се достига само когато X лежи на дъгата от описаната около $\triangle ABC$ окръжност, която не съдържа C.

Забележка. Ако I е центърът на вписаната в $\triangle ABC$ окръжност, то

$$\frac{1}{A_XC}+\frac{1}{B_XC}=\frac{S_{CIA_X}+S_{CIB_X}}{S_{CA_XB_X}}.\frac{AB+AC+BC}{AC.BC}.$$

Оттук и доказаното следва, че A_XB_X пресича отсечката CI, като $I \in A_XB_X$ само когато $X \in s$.

Инструкции за оценяване. 5 т. за неравенството

$$\frac{1}{A_XC}+\frac{1}{B_XC}\geq\frac{AB+AC+BC}{AC.BC};$$

2 т. за верен отговор.

Задача 12.4. Виж задача 11.4.

Задачите са предложени от: Петър Бойваленков – 9.1, 9.2, 9.3; Александър Макелов – 9.4 (10.4); Стоян Боев – 10.1, 10.2, 10.3; Динко Раднев – 11.1; Емил Колев – 11.2; Александър Иванов – 11.3, 11.4 (12.4); Динко Раднев, Емил Колев – 12.1; Николай Николов – 12.2, 12.3.