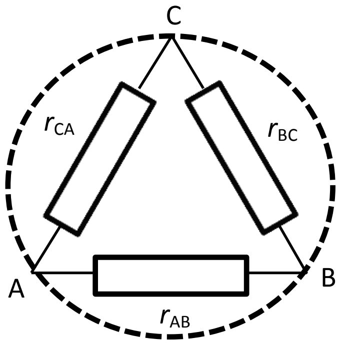
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 7. клас

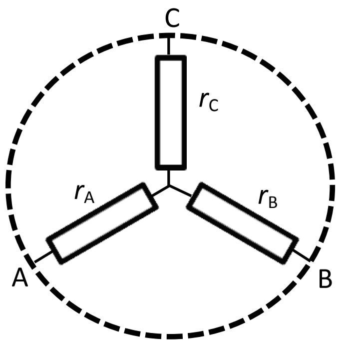
Задача 1. “Черни кутии“ с електрически схеми.

Целта на някои задачи по физика е да разберем какво има в някаква „черна кутия“ (кутия с неизвестно съдържание), като за да решим задачата, трябва да направим някакви наблюдения или измервания. В задачите за електрически черни кутии трябва да разберем вида, броя, разположението и стойностите на конкретни елементи на електрически схеми. Тук ще разгледаме задача за „черна кутия“, съдържаща 3 резистора.

а) На Фиг. 1а е показана черна кутия, от която излизат три проводника – A, B, и C. Знаем, че вътре в нея има 3 резистора, свързани по начина, показан на фигурата (който се нарича „триъгълник“). Техните електрични съпротивления са съответно r_{AB} = 20 Ω, r_{BC} = 30 Ω и r_{CA} = 50 Ω. Какво електрично съпротивление бихме измерили с омметър между всяка една двойка проводници, т.е. R_{AB} = ?, R_{BC} = ?, R_{CA} = ? **[3 т.]**



Фиг. 1а



Фиг. 1б

б) На Фиг. 1б е показана друга черна кутия, от която също излизат три проводника – A, B, и C. Знаем, че вътре в нея има 3 резистора, свързани по начина, показан на фигурата (който се нарича „звезда“). Измерили сме с омметър електричното съпротивление между всяка една двойка точки, съответно X_{AB} = 16 Ω, X_{BC} = 21 Ω, X_{CA} = 25 Ω. Изчислете големината на електричното съпротивление на трите резистора, r_A = ?, r_B = ?, r_C = ? **[4 т.]**

в) Какво съпротивление Y_{AB} бихме измерили между проводниците A и B в схемата „триъгълник“ от Фиг. 1а (и подусловие а)), ако по време на измерването дадем „накъсо“ (допълнително свържем с проводник с пренебрежимо малко, „нулево“ съпротивление) точките A и C? **[1 т.]**

г) Какво съпротивление Z_{AB} бихме измерили между точките A и B в схемата „звезда“ от Фиг. 1б (и подусловие б)), ако по време на измерването дадем „накъсо“ (допълнително свържем с проводник с пренебрежимо малко, „нулево“ съпротивление) точките A и C? **[2 т.]**

<u>Задача 2.</u> Колона от слоеве течности.

Разполагате с висок стъклен цилиндър, 7 течности (наредени по азбучен ред те са веро, вода, глицерин, кленов сироп, олио, пчелен мед и спирт за горене) и 4 малки тела (наредени по азбучен ред те са гумено топче, парче дърво, пластмасово зарче и стоманена гайка). Техните плътности са дадени в таблицата:

	Вид течност	Плътност, g/cm^3		Вид тяло	Плътност, g/cm^3
1	веро	1,06	1	гумено топче	1,40
2	вода	1,00	2	парче дърво	0,71
3	глицерин	1,26	3	пластмасово зарче	1,17
4	кленов сироп	1,37	4	стоманена гайка	7,81
5	олио	0,92			
6	пчелен мед	1,42			
7	спирт за горене	0,79			

Оказва се, че ако наливаме внимателно течностите една по една в подходяща последователност в цилиндъра, те ще образуват слоеве, лежащи един над друг и дълго време няма да се смесят една с друга.

а) Как трябва да наредим течностите (ако ги изброяваме отдолу нагоре)? **[3 т.]**

б) Ако всяка една от течностите, която наливаме, има обем 100 ml, колко ще е масата на цялото количество течност в цилиндъра? **[3 т.]**

в) Ако пускаме внимателно четирите тела последователно в така образуваната колона от слоеве течности, на какви места в колоната те ще останат в равновесие? **[4 т.]**

<u>Задача 3.</u> Движение по река. (Две независими подзадачи)

А. Първа подзадача

Разстоянието между Видин и Русе по река Дунав е 300 км. Реката влачи плаващо дърво от Видин до Русе за 4 денонощия и 4 часа.

а) Колко е скоростта $v_{\text{Т}}$ на течението на реката (в km\h)? **[1 т.]**

Кораб се придвижва от Видин до Русе за 12 ч и 30 мин.

б) Колко е скоростта $v_{\text{К}}$ на кораба спрямо водата (в km\h)? **[3 т.]**

в) Колко време $t_{\text{Р-В}}$ ще пътува корабът от Русе до Видин? ((в h и min)) **[2 т.]**

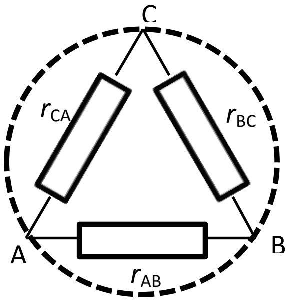
Б. Втора подзадача

г) Между два града А и Б, разстоянието l между които е неизвестно, тече река с неизвестна скорост на течението $v_{\text{Р}}$. Кораб се движи спрямо водата с неизвестна скорост $v_{\text{Н}}$. От град А до град Б корабът пътува време t_1, а от град Б до град А корабът пътува време t_2 ($t_2 > t_1$). Намерете формула за отношението на скоростта на кораба към скоростта на реката $\frac{v_{\text{Н}}}{v_{\text{Р}}}$, изразено чрез времената t_2 и t_1. **[3 т.]**

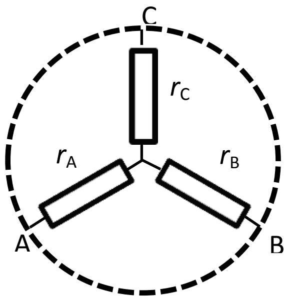
д) Проверете формулата, получена в подусловие г), използвайки числените резултати от първите три подусловия. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 7. клас, решения и указания

<u>Задача 1.</u> "Черни кутии" с електрически схеми.



Фиг. 1а



Фиг. 1б

а) За да намерим съпротивлението R_{AB}, разсъждаваме така: r_{CA} и r_{BC} са последователно свързани. Тяхното общо („еквивалентно") съпротивление е $r_{ACB} = r_{CA} + r_{BC}$ = 50 Ω + 30 Ω = 80 Ω. **[0.5 т.]** Това общо съпротивление r_{ACB} и резисторът r_{AB} са успоредно свързани. Следователно омметърът ще измери съпротивление $R_{AB} = \frac{r_{ACB}.r_{AB}}{r_{ACB}+r_{AB}} = \frac{80\Omega.20\Omega}{80\Omega+20\Omega}$ = 16 Ω. **[0.5 т.]** Аналогично за втория случай, $r_{BAC} = r_{AB} + r_{CA}$ = 20 Ω + 50 Ω = 70 Ω. **[0.5 т.],** $R_{BC} = \frac{r_{BAC}.r_{BC}}{r_{BAC}+r_{BC}} = \frac{70\Omega.30\Omega}{70\Omega+30\Omega}$ = 21 Ω. **[0.5 т.]** За третия случай, $r_{CBA} = r_{AB} + r_{BC}$ = 20 Ω + 30 Ω = 50 Ω. **[0.5 т.],** $R_{CA} = \frac{r_{CBA}.r_{CA}}{r_{CBA}+r_{CA}} = \frac{50\Omega.50\Omega}{50\Omega+50\Omega}$ = 25 Ω. **[0.5 т.]**

б) Тъй като между всеки два извода на схемата има по два последователно свързани резистора, то: $r_A + r_B = X_{AB}$, $r_B + r_C = X_{BC}$, $r_C + r_A = X_{CA}$. **[1 т.]** Ако съберем първото и третото равенство и от полученото ново равенство извадим второто, получаваме $r_A = \frac{X_{AB}+X_{CA}-X_{BC}}{2} = \frac{16\ \Omega+25\ \Omega-21\ \Omega}{2}$ = 10 Ω. **[1 т.]** По същия начин $r_B = \frac{X_{BC}+X_{AB}-X_{CA}}{2} = \frac{21\ \Omega+16\ \Omega-25\ \Omega}{2}$ = 6 Ω. **[1 т.]** и $r_C = \frac{X_{CA}+X_{BC}-X_{AB}}{2} = \frac{25\ \Omega+21\ \Omega-16\ \Omega}{2}$ = 15 Ω. **[1 т.]**

в) При даване "накъсо" на точките A и C в схемата „триъгълник" от Фиг. 1а, съпротивлението Y_{AB} ще е това, което се получава от успоредното свързване на r_{AB} и r_{BC}, т.е. $Y_{AB} = \frac{r_{AB}.r_{BC}}{r_{AB}+r_{BC}} = \frac{20\Omega.30\Omega}{20\Omega+30\Omega}$ = 12 Ω. **[1 т.]**

г) При даване "накъсо" на точките A и C в схемата „звезда" от Фиг. 1б, съпротивлението Z_{AB} ще е това, което се получава от успоредното свързване на r_A и r_C, и последователното на тях r_B , **[1 т.]** т.е. $Z_{AB} = \frac{r_A.r_C}{r_A+r_C} + r_B = \frac{10\Omega.15\Omega}{10\Omega+15\Omega} + 6\ \Omega = 12\ \Omega$. **[1 т.]**

<u>Задача 2.</u> Колона от слоеве течности.

а) Течностите трябва да се наредят така, че всяка една да има по-малка плътност от тази под нея и по-голяма плътност от тази над нея. Отдолу нагоре те ще се наредят така: пчелен мед, кленов сироп, глицерин, веро, вода, олио, спирт за горене. **[3 т.]** (отнема се по 0.5 т. за всяка течност, която не е поставена „на мястото си")

б) Масата на цялото количество течност в цилиндъра е равна на сумата от масите на отделните слоеве: $M = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_6 + m_7 = \rho_1 V + \rho_2 V + \rho_3 V + \rho_4 V + \rho_5 V + \rho_6 V + \rho_7 V = (\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 + \rho_4 + \rho_5 + \rho_6 + \rho_7)V$ **[1 т.]** = (1,42 + 1,37 + 1,26 + 1,06 + 1,00 + 0,92 + 0,71) $\frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ 100 cm^3 = 782 g. **[2 т.]**

в) Телата ще застанат в такова положение, че да плават в течност с плътност, по-голяма от тази на тялото, но да са потънали в течност с плътност, по-малка от тази на тялото. Сравнявайки плътностите на телата и течностите можем да заключим, че:
стоманената гайка ще потъне на дъното на цилиндъра, **[1 т.]**
гуменото топче ще плава на границата между пчелния мед и кленовия сироп **[1 т.]**,
пластмасовото зарче ще плава на границата между глицерина и верото **[1 т.]**,
а парчето дърво ще плава на горната повърхност на спирта за горене. **[1 т.]**

<u>Задача 3.</u> Движение по река. (Две независими подзадачи)

А. Първа подзадача

а) Скоростта $v_{\text{Т}}$ на течението на реката е $v_{\text{Т}} = \frac{s}{t} = \frac{300\ km}{100\ h}$ = 3 km/h. **[1 т.]**

б) Скоростта на кораба спрямо брега, когато се движи по течението, е сума на скоростта му спрямо повърхността на реката и скоростта на течението. **[1 т.]** Следователно $v_{\text{К}} + v_{\text{Т}} = v_{\text{К}} + 3\,\frac{\text{km}}{\text{h}} = \frac{300\text{km}}{12\frac{1}{2}\text{h}}$ = 24 km/h. **[1 т.]** $v_{\text{К}} = 21$ km/h. **[1 т.]**

в) Скоростта на кораба спрямо брега, когато се движи срещу течението, е разлика на скоростта му спрямо повърхността на реката и скоростта на течението. **[1 т.]** Следователно корабът ще пътува от Русе до Видин за време $t_{\text{Р-В}} = \frac{300\text{km}}{21\frac{\text{km}}{\text{h}} - 3\frac{\text{km}}{\text{h}}} = 16$ h 40 min **[1 т.]**

Б. Втора подзадача

г) Връзките между разстояние, скорост и време в двете посоки са $v_{\text{Н}} + v_{\text{Р}} = \frac{l}{t_1}$ (1), $v_{\text{Н}} - v_{\text{Р}} = \frac{l}{t_2}$ (2). **[1 т.]** Ако веднъж съберем, а после извадим уравнения (1) и (2), получаваме $v_{\text{Н}} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} + \frac{1}{t_2}\right)$, $v_{\text{Р}} = \frac{l}{2}\left(\frac{1}{t_1} - \frac{1}{t_2}\right)$. **[1 т.]** За отношението им получаваме $\frac{v_{\text{Н}}}{v_{\text{Р}}} = \frac{t_2+t_1}{t_2-t_1}$. **[1 т.]**

д) Замествайки числените резултати, получени в първите 3 подусловия, във формулата, получена в предното подусловие, получаваме $\frac{v_{\text{Н}}}{v_{\text{Р}}} = \frac{21\text{km/h}}{3\text{km/h}} = 7 = \frac{t_2+t_1}{t_2-t_1} = \frac{16\frac{2}{3}\text{h}+12\frac{1}{2}\text{h}}{16\frac{2}{3}\text{h}-12\frac{1}{2}\text{h}}$ = 7. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика
гр. Бургас, 12-13 март 2016 г.

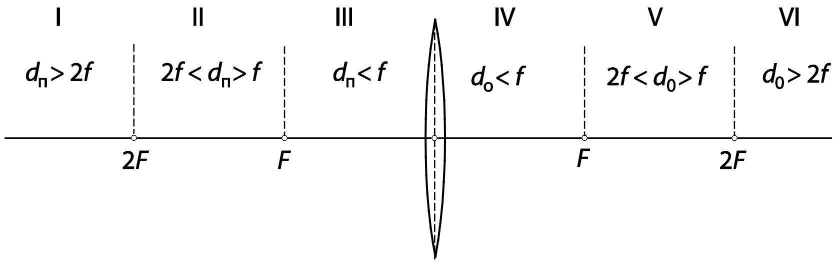
ТЕМА

за 8. клас

Задача 1. Лещи (задачи за построение – без формули)

Част I. Събирателна леща. 1. На *фиг.*1 са отделени области пред и зад събирателна леща с фокусно разстояние *f*. Чрез построение определете в коя област ($d_о$ – разстояние от образа до лещата) се намира образът на предмет, ако самият предмет е на разстояние $d_п$ пред лещата:

а) $d_п > 2f$; б) $d_п = 2f$; в) $2f > d_п > f$.



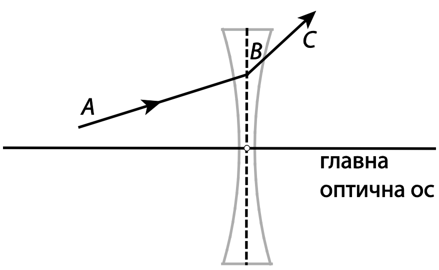
Фиг. 1.

2. Точков източник на светлина е поставен върху главната оптична ос на събирателна леща.

а) В коя от означените на *фиг.*1 области трябва да се намира източникът, за да съществуват точки (зони), от които да можем да наблюдаваме едновременно източника и неговия действителен образ? Направете чертеж, на който да се виждат тези зони.

б) При какво положение на източника няма нито една точка, от която да се наблюдават едновременно източникът и неговият образ? Направете чертеж.

Част II. Разсейвателна леща. На *фиг.* 2. е показан ходът на лъча *ABC* през разсейвателна леща. Чрез построение определете фокуса на лещата.



Фиг. 2.

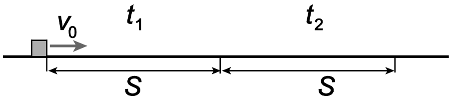
Полезна теория. Когато върху разсейвателна леща пада успореден сноп лъчи, който обаче не е успореден на главната оптична ос, продълженията на пречупените от лещата лъчи се събират в точка от фокалната равнина на лещата. Фокалната равнина е равнина, която преминава през фокуса на лещата и е перпендикулярна на главната оптична ос.

Задача 2. Праволинейно движение с постоянно ускорение

Част I. Камък е пуснат да пада свободно без начална скорост. Определете височината h, от която е пуснат камъкът, ако той изминава втората половина от пътя си ($h/2$) за време t_2 = 0,41 s. Земното ускорение е g = 10 m/s^2. Съпротивлението на въздуха се пренебрегва.

Част II. Тяло се движи праволинейно с постоянно ускорение и преминава последователно два съседни участъка от пътя с еднаква дължина S (*фиг.* 3).

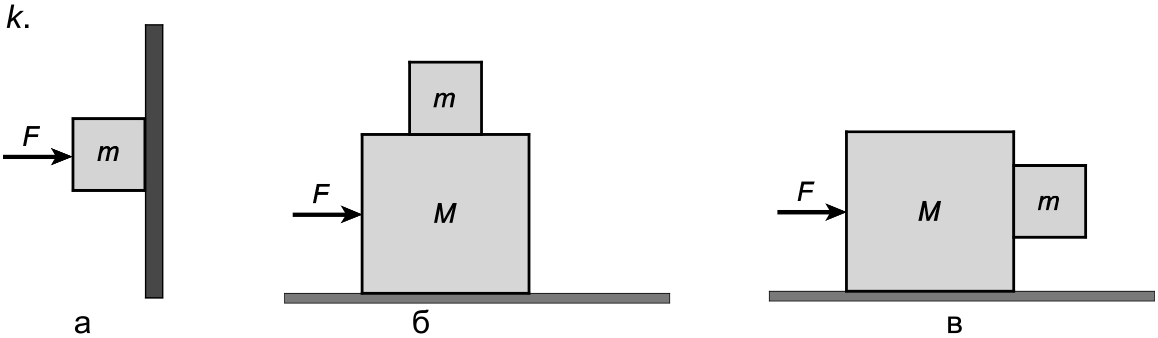
Фиг. 3.



Тялото изминава първия участък за време t_1, а втория за време t_2 ($t_2 > t_1$). Определете ускорението a на тялото

Задача 3. Движение и покой

а) Тяло с маса m се притиска към вертикална стена от хоризонтална сила F (*фиг*. 4а). При какви стойности на големината на силата F тялото няма да се хлъзга по стената? Коефициентът на триене при покой между тялото и стената е k.



Фиг. 4.

б) Тяло с маса m е поставено върху блок с маса M, чиято повърхност е хоризонтална. Блокът може да се хлъзга без триене по хоризонтална равнина. Към блока е приложена хоризонтална сила F (*фиг.* 4б). При какви стойности на големината на силата F тялото и блокът ще се движат като едно цяло (тялото няма да се хлъзга по повърхността на блока)? Коефициентът на триене при покой между тялото и блока е k.

в) Нека сега тялото да е поставено, както е показано на *фиг*. 4в. Стената на блока, към която се допира тялото, е вертикална. При какви стойности на големината на хоризонталната сила F тялото ще бъде в покой спрямо блока? Блокът се хлъзга без триене по хоризонталната равнина. Коефициентът на триене при покой между тялото и блока е k.

Земното ускорение е g.

Полезна формула: максимална сила на триене при покой $F_{max} = kN$, където k е коефициентът на триене при покой, а N е силата на нормална реакция на опората.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

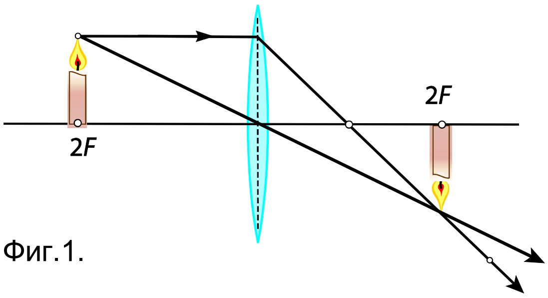
Национално пролетно състезание по физика
гр. Бургас, 12-13 март 2016 г.

Решения и указания
към темата за 8. клас

Зад. 1. Част I. 1. Когато предметът е в област I, образът е в област V……………………………………………………………………………… 1 точка

Когато предметът е в област II, образът е в област VI .... 1 точка

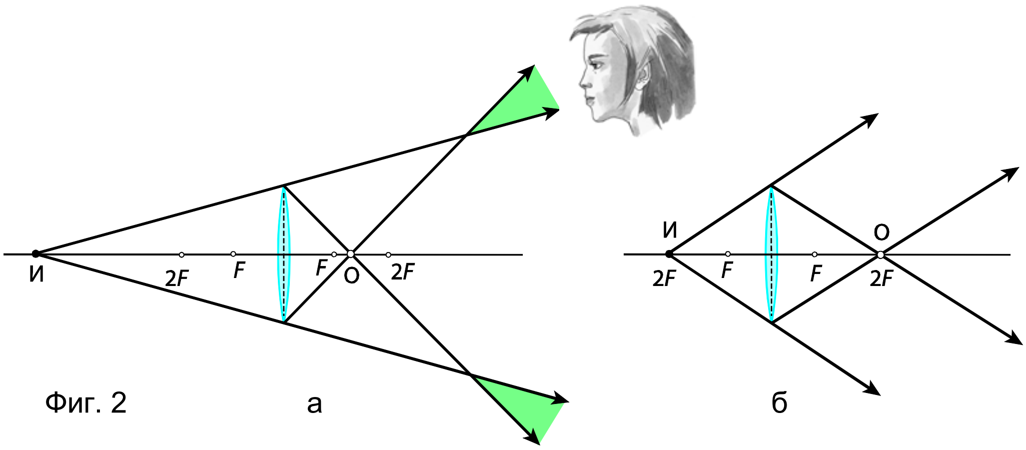
При $d_п = 2f$, $d_0 = 2f$ (*фиг.* 1) ……………………………………………………1 точка



Фиг.1.

2. а) Нека точковият източник И се намира на разстояние $d_п > 2f$ от лещата. Тогава $2f > d_о > f$. Разходящият сноп от лъчи, излизащ от образа О, е по-широк от снопа лъчи, преминал през лещата. Затова в пространството има област, в която лъчите от образа се пресичат от лъчите, които излизат от предмета и преминават извън лещата (защрихованите участъци на *фиг.* 2а). Ако окото на наблюдателя се намира в тази област, той ще вижда едновременно и източника, и неговия образ.

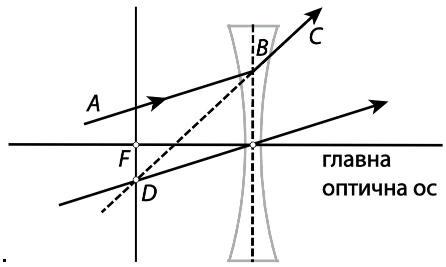
………………………………………………………………………………… … 2 точки



Фиг. 2 а б

б) Когато източникът е на разстояние $d_п = 2f$ от лещата, неговият образ е на същото разстояние от другата страна на лещата ($d_о = 2f$). Тогава крайните лъчи на двата снопа са успоредни и няма област, в която лъчи, излизащи от източника и преминаващи извън лещата, да се пресичат с лъчи, излизащи от образа (*фиг.* 2б). Ако $2f > d_п > f$, излизащият от образа сноп лъчи става още по-тесен и също не се пресича с лъчите от източника, преминаващи извън лещата. Следователно при $2f \geq d_п > f$ няма нито една точка, от която точковият източник и неговият действителен образ да се наблюдават едновременно…..…………………………………………….. 2 точки

Част II. Построяваме лъч, успореден на лъча *AB*, който преминава през центъра на лещата и не се пречупва (*фиг.* 3). Този лъч се пресича с продължението на пречупения лъч *BC* в точка *D* от фокалната равнина на лещата. Спускаме перпендикуляр от точка *D* към главната оптична ос. Той пресича оста в търсения фокус *F* на лещата.. 3 точки



Фиг. 3.

Зад. 2. Част I. От закона за пътя при свободно падане $h = \frac{1}{2}gt^2$ ……. 0,5 точки

изразяваме цялото време на свободното падане $t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$ …………… 0,5 точки

и времето за изминаване на първата половина от пътя $t_1 = \sqrt{\frac{h}{g}}$ …….. 1 точка

Времето за изминаване на втората половина от пътя е

$$t_2 = t - t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} - \sqrt{\frac{h}{g}}$$ ……………………………………………….. 0,5 точки

От горното равенство определяме височината *h*:

$h = \frac{gt_2^2}{(\sqrt{2}-1)^2}$ или ($h = gt_2^2(3+2\sqrt{2})$) …………………………………..2 точки

$h = 10$ m……………………………………………………………………….0,5 точки

Част II. Тъй като вторият участък е изминат за по-голямо време, правим извода, че движението е равнозакъснително…………………………..……..…….. 1 точка

Да означим с v_0 скоростта на тялото в началото на първия участък. От закона за пътя при равнозакъснително движение следват равенствата:

$S = v_0t_1 - \frac{1}{2}at_1^2;\;\; 2S = v_0(t_1+t_2) - \frac{1}{2}a(t_1+t_2)^2$ ………………….....…..…2 точки

От първото равенство изразяваме скоростта v_0 и я заместваме във второто равенство. След съответните алгебрични преобразования за ускорението получаваме

$a = \frac{2S(t_2 - t_1)}{t_1t_2(t_1+t_2)}$ .... 2 точки

Задача 3. а) На *фиг.* 4а са показани силите, които действат на тялото. Тялото е в покой. Следователно силата на реакция на стената уравновесява силата F:

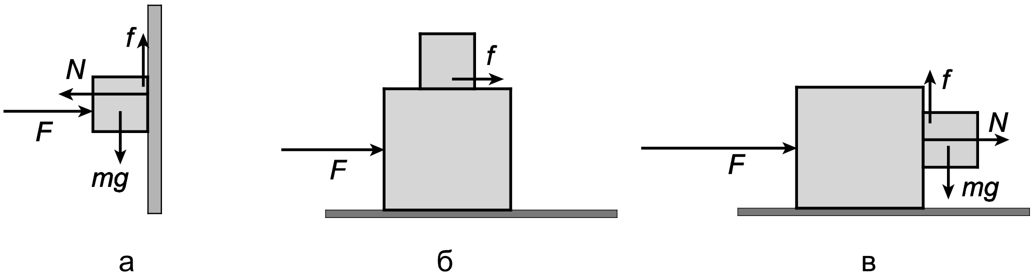
$N = F$... 0,5 точки

Силата на тежестта се уравновесява от силата на триене при покой:

$mg = f$ …………………………………………………………………….... 0,5 точки

Максималната сила на триене при покой е $f_{max} = kN = kF$…………………. 1 точка

Тялото няма да се хлъзга, ако $f_{max} > mg$ или $F > \dfrac{mg}{k}$ ……………………….. 1 точка



Фиг. 4

б) Тялото и блокът се движат като едно цяло с ускорение $a = \dfrac{F}{M+m}$ .... 1 точка

Разглеждаме отделно движението на тялото. То се движи под действие на силата на триене f, с която му действа блокът (*фиг.* 4б): $f = ma = \dfrac{mF}{M+m}$ .... 1 точка

Тялото няма да се хлъзга по повърхността на блока, ако $f < f_{max} = kmg$ …..... 1 точка

Това условие се изпълнява при $F < k(M+m)g$ ....1 точка

в) Тялото се движи с ускорение $a = \dfrac{F}{M+m}$ под действие на силата на реакция N, с която му действа блокът: $N = ma = \dfrac{m}{M+m}F$ ……………………………..……..1 точка

Силата на тежестта се уравновесява от силата на триене при покой: $mg = f$.

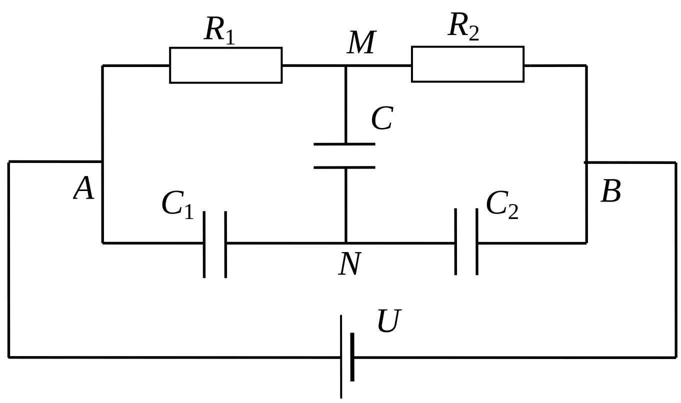
Максималната сила на триене при покой е $f_{max} = kN = \dfrac{km}{M+m}F$ …....…….. 1 точка

Тялото няма да се хлъзга, ако $f_{max} > mg$ или $F > \dfrac{(M+m)g}{k}$ ………………….. 1 точка

Министерство на образованието и науката
Национално пролетно състезание по физика
Бургас, 12 – 13 март 2016 г.
Тема 9. клас

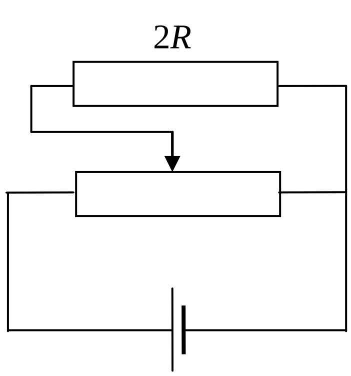
Задача 1. Електрически вериги

Част А: Заряд на кондензатор. На фиг.1 е показана електрическа верига, в която кондензаторите 1 и 2 имат капацитети съответно $C_1 = 2C$ и $C_2 = 3C$. Напрежението на източника е U, а съпротивленията на резисторите 1 и 2 удовлетворяват равенството $R_1 = 2R_2$. Намерете заряда q на кондензатора, включен между точките M и N, при условие, че във веригата се е установил постоянен ток.



Фиг. 1

Част Б: Потенциометър. Регулирането на напрежението между краищата на резистор със съпротивление $2R$ става чрез потенциометър със съпротивление R (фиг. 2). В началото резисторът е свързан към половината съпротивление на потенциометъра. Към каква част R_x от съпротивлението на потенциометъра трябва да се свърже резисторът, за да нарасне напрежението му един път и половина? Начертайте схемата на електрическата верига във всеки един от случаите.



Фиг. 2

Задача 2. Потопено тяло

Дървено кълбо се намира в съд с вода, като половината от него е потопено във водата и то се допира до дъното на съда. Натискът на кълбото върху дъното на съда е $F = 6\ \mathrm{N}$, теглото на кълбото във въздух е $P = 16\ \mathrm{N}$, а плътността на водата е $\rho_0 = 1.10^3\ \mathrm{kg/m^3}$.

а) Намерете плътността ρ на дървото, от което е направено кълбото.

б) Какъв допълнителен обем ΔV от кълбото трябва да се потопи чрез наливане на минимално количество вода в съда, за да се анулира натискът на кълбото върху дъното на съда. Приемете земното ускорение $g \approx 10\ \mathrm{m/s^2}$.

Задача 3. Топлина

Част А: Смес от лед с маса $m = 2{,}1\ \mathrm{kg}$ и неизвестно количество вода се намират в топлинно равновесие в топлинноизолиран съд. След започване на нагряване на сместа температурата й остава постоянна в продължение на време $t_1 = 11\ \mathrm{min}$, а след това за време $t_2 = 6\ \mathrm{min}$ тя се повишава с $\Delta T = 30\ \mathrm{K}$. Определете масата M на сместа, ако количеството топлина, получавано от сместа за единица време, е постоянно. Специфичната топлина на топене на леда е $\lambda = 330\ \mathrm{kJ/kg}$, а специфичният топлинен капацитет на водата е $c = 4{,}2\ \mathrm{kJ/kg.K}$. Топлинният капацитет на съда е пренебрежим.

Част Б: Лек автомобил се движи с постоянна скорост. Разходът на гориво при тази скорост е $V = 8\ \mathrm{l}$ бензин за изминато разстояние $s = 100\ \mathrm{km}$. Намерете силата на съпротивление f (съпротивление на въздуха, съпротивление поради триенето в осите на автомобила, както и деформацията на гумите) при движението на автомобила. КПД на двигателя на автомобила е $\eta = 30\%$, специфичната топлина на изгаряне на горивото е $q = 4{,}6.10^7\ \mathrm{J/kg}$, а плътността на бензина е $\rho = 700\ \mathrm{kg/m^3}$.

Министерство на образованието и науката
Национално пролетно състезание по физика
Бургас, 12 – 13 март 2016 г.
Тема 9. Клас
Решения и указания за оценяване

Задача 1. Електрически вериги

Част А: Заряд на кондензатор. Токът, който тече във веригата, е

$$I = \frac{U}{R_1 + R_2} = \frac{U}{3R_2}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тогава напреженията между краищата на всеки от резисторите са съответно

$$U_1 = IR_1 = \frac{2}{3}U, \qquad U_2 = IR_2 = \frac{1}{3}U. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Нека приемем, че електродът на кондензатора с капацитет C, свързан с т. N, има положителен заряд. (Ако зарядът на този електрод се окаже отрицателен, във всички уравнения трябва да заменим $q \to -q$, при което електродите на този кондензатор ще сменят знаците на зарядите си.) Напрежението между точките A и M е сума от напреженията на кондензаторите с капацитет C_1 и C. Тогава имаме

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q}{C} = \frac{2}{3}U. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Аналогично напрежението между точките A и B е

$$\frac{q_1}{C_1} + \frac{q_2}{C_2} = U, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

а от закона за запазване на електричния заряд в т. N намираме

$$q_1 = q + q_2. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Решаването на тази система уравнения дава

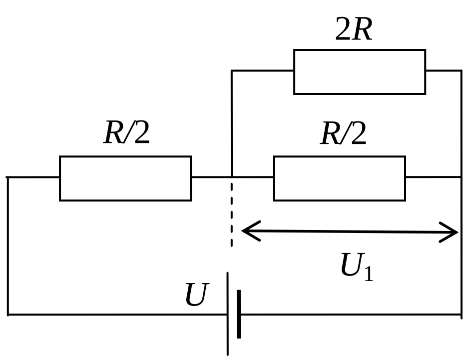
$$q = \frac{1}{18}CU. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б: Потенциометър. На фиг. 1, а е показана еквивалентната схема на свързване в първия случай**. [0,5 т.]** Нека означим напрежението на източника с U. Тогава за еквивалентното съпротивление на успоредно свързаните резистор и половината от потенциометъра имаме

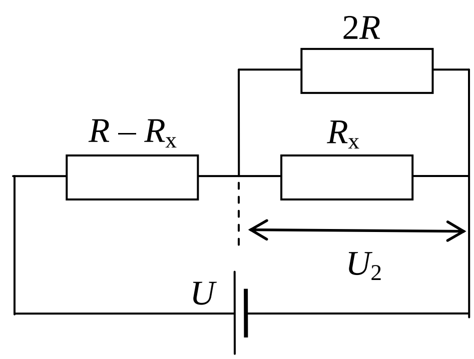
$$R_1 = \frac{2R.(R/2)}{2R + R/2} = \frac{2}{5}R.$$ **[0,5 т.]**

Тогава напрежението върху резистора е

$$U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R/2}U = \frac{4}{9}U.$$ **[0,5 т.]**



Фиг. 1, а



Фиг. 1, б

Във втория случай (фиг. 1, б) **[0,5 т.]** резисторът се свързва успоредно на съпротивлението R_x на част от потенциометъра. Тогава еквивалентното им съпротивление е

$$R_2 = \frac{2RR_x}{2R + R_x}$$ **[0,5 т.]**

а напрежението между краищата на резистора е

$$U_2 = \frac{R_2}{R - R_x + R_2}U = \frac{2RR_x}{RR_x - R_x^2 + 2R^2}U = \frac{2}{3}U.$$ **[1 т.]**

Търсеното съпротивление R_x се определя от квадратното уравнение

$$R_x^2 + 2RR_x - 2R^2 = 0.$$ **[0,5 т.]**

Следователно търсеното съпротивление е

$$R_x = (\sqrt{3} - 1)R \approx 0{,}73R \approx \frac{3}{4}R.$$ **[1 т.]**

Задача 2. Потопено тяло

а) На кълбото действат три сили: сила на тежестта mg, насочена надолу **[0,5 т.],** сила на Архимед F_{A} **[0,5 т.]** и реакцията на опората (дъното) R **[0,5 т.]**, насочени нагоре. При равновесие имаме

$$mg - F_{\text{A}} - R = 0. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

В дадения случай

$$F_{\text{A}} = \rho_0 g \frac{V}{2}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където V е обемът на кълбото. По третия принцип на механиката $R = F$ **[0,5 т.]** и $mg = P$ **[0,5 т.]**. Освен това имаме

$$m = \rho V, \qquad V = \frac{P}{\rho g}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

След заместване в условието за равновесие на потопеното кълбо намираме

$$P - \frac{\rho_0}{2\rho} P - F = 0, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

откъдето следва

$$\rho = \frac{P}{2(P-F)} \rho_0 = 800 \text{ kg/m}^3. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) Натискът върху дъното на съда става нула, когато се изравнят силата на тежестта и Архимедовата сила, т.е. $mg = F_{\text{A}}$ **[0,5 т.]**. В този случай

$$F_{\text{A}} = \rho_0 g \left(\frac{V}{2} + \Delta V \right). \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Тогава от уравнението

$$\rho V = \rho_0 \left(\frac{V}{2} + \Delta V \right) \qquad \textbf{[1 т.]}$$

намираме

$$\Delta V = \frac{1}{2} \left(\frac{2\rho}{\rho_0} - 1 \right) V = \frac{1}{2} \left(\frac{2\rho}{\rho_0} - 1 \right) \frac{P}{\rho g} = 0{,}6 \text{ l}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Задача 3. Топлина

Част А: Началната температура на сместа е $0^\circ\mathrm{C}$, която остава постоянна до пълното разтопяване на леда **[0,5 т.]**. За това е необходимо количество топлина

$$Q_1 = m\lambda . \qquad \textbf{[1 т.]}$$

След като в съда има само вода с маса M, започва нейното нагряване. Количеството топлина Q_2, което отива за повишаване на температурата на водата с ΔT, е

$$Q_2 = Mc\Delta T . \qquad \textbf{[1 т.]}$$

От друга страна имаме

$$Q_1 = Pt_1, \qquad Q_2 = Pt_2, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където P е постъпилото количество топлина за единица време. От тези равенства следва

$$\frac{m\lambda}{Mc\Delta T} = \frac{t_1}{t_2}, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

откъдето намираме

$$M = \frac{\lambda}{c\Delta T}\frac{t_2}{t_1}m = 3\ \mathrm{kg}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Част Б: Нека лекият автомобил изминава разстояние s **[0,5 т.]**. Автомобилът ще изразходва бензин с маса $m = \rho V$ **[0,5 т.]**, при изгарянето на който в двигателя се получава количество топлина

$$Q = mq = \rho V q . \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Разглеждайки двигателя на автомобила като топлинна машина, можем да определим извършената от него работа

$$A = \eta Q = \eta\rho V q . \qquad \textbf{[1 т.]}$$

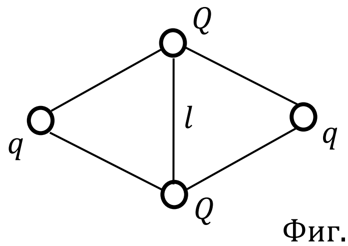
От друга страна, поради движението на автомобила с постоянна скорост, силата на съпротивление извършва работа по големина

$$A_f = fs = A. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

След заместване намираме $f = \dfrac{\eta\rho V q}{s} \approx 773\ \mathrm{N}$. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА,
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 10. клас

Задача 1. Електростатика.



Фиг. 1

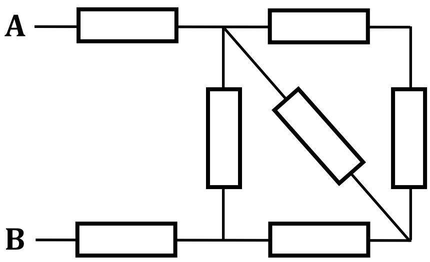
Четири положително заредени малки топчета са свързани с еднакви непроводящи неразтегливи нишки, както е показано на Фиг. 1. Големините на зарядите са указани на фигурата, а дължината на всяка една от нишките е l. Константата в закона на Кулон е k. Силата на тежестта да не се отчита.

а) Намерете силата на опън T на нишката, свързваща централните два заряда. **[7 т.]**

б) На колко е равен електричният потенциал U в средата на нишката, свързваща централните два заряда? **[2 т.]**

в) Намерете приближен израз за големината на интензитета $\vec{E}$, който създава системата от заряди в точка, която е отдалечена на много голямо разстояние d от центъра на системата от заряди. **[1 т.]**

Задача 2. Електрическа верига.



Фиг. 2

Резисторите в електрическата верига, показана на Фиг. 2, са с еднакво съпротивление R.

а) Намерете съпротивлението $R_{\mathbf{AB}}$ между точките **A** и **B**. Начертайте еквивалентната схема, от която сте определили съпротивлението. **[3 т.]**

б) Към двата края на веригата е свързан източник на електродвижещо напрежение $\mathcal{E} = 7\,\mathrm{V}$. Ако през резистора, който е най-отдалечен от краищата на веригата, протича ток $I = 0{,}2\,\mathrm{A}$, намерете на колко е равно съпротивлението R. **[4 т.]**

в) Нека да откачим диагонално разположения резистор от веригата. На колко е равна електричната мощност P, която се отделя в получената верига, ако към нея е свързан източника на електродвижещо напрежение от предната подточка? **[3 т.]**

Задача 3. Равнозакъснително движение.

Два автомобила се движат по прав път с една и съща неизвестна постоянна скорост v_0. Първоначално разстоянието между тях е неизвестно l_0. В един момент предният автомобил започва да се движи равнозакъснително с ускорение $a_1 = 0{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. След време $t_0 = 10\,\mathrm{s}$ задният автомобил също започва да намалява своята скорост, но с ускорение $a_2 = 1{,}5\,\mathrm{m/s^2}$. При решаването на задачата размерите на автомобилите се пренебрегват.

а) Най-малкото разстояние между автомобилите по време на тяхното движение е $l_{\min} = 0{,}2\,\mathrm{km}$. Намерете първоначалното разстояние между тях l_0. **[5 т.]**

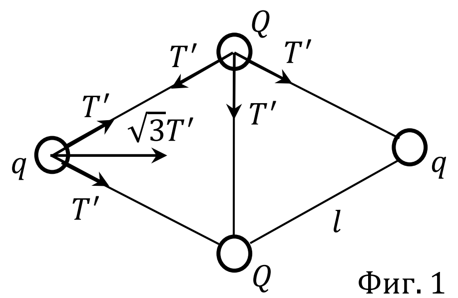
б) След какво време от момента на най-голямо доближаване автомобилите ще се намират отново на разстояние l_0 един от друг? **[2 т.]**

в) След като единият от автомобилите е спрял да се движи, другият автомобил е продължил да се движи за време $2t_0$. На колко е равна скоростта v_0? **[2 т.]**

г) Намерете разстоянието между автомобилите, след като са спрели да се движат. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА,
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 10. клас, Решения и указания

Задача 1. Електростатика.



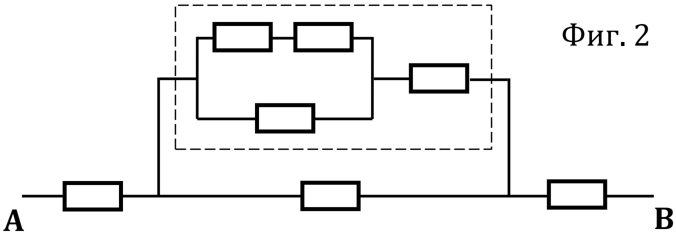
Фиг. 1

а) Системата е симетрична спрямо вертикалната права, минаваща през средните заряди, и хоризонталната права, минаваща през крайните два заряда. Търсената сила на опън означаваме с T. Силата на опън на останалите четири нишки е с една и съща големина T'. **[0,5 т.]** От условието за равновесие на системата следват две независими уравнения, които свързват големините на силите на опън с големините на Кулоновите сили, които действат на зарядите. На левия заряд действат две сили на опън с големина T', които сключват ъгъл 60° помежду си, както е показано на фиг. 1. Тяхната геометрична сума е вектор, насочен хоризонтално надясно, с големина $\sqrt{3}T'$, което може да се получи, като се използва Питагоровата теорема. **[0,5 т.]** По аналогичен начин векторната сума на силите, с които горният и долният заряди действат на левия заряд, дава сила с големина $\frac{\sqrt{3}kqQ}{l^2}$, насочена хоризонтално наляво. **[1 т.]** На левия заряд действа също така и десният заряд със сила с големина $\frac{kq^2}{3l^2}$, насочена хоризонтално наляво. **[0,5 т.]** За получаване на тази сила използваме, че разстоянието между крайните заряди е $2\sqrt{l^2 - l^2/4} = \sqrt{3}l$. **[0,5 т.]** От условието за равновесие на левия заряд имаме, че $\frac{kq^2}{3l^2} + \frac{\sqrt{3}kqQ}{l^2} = \sqrt{3}T'$. **[0,5 т.]** На горния заряд действа силата на опън на централната нишка с големина T, насочена вертикално надолу, и две сили на опън с големина T', които сключват ъгъл 120° помежду си, както е показано на фиг. 1. Тяхната геометрична сума е вектор, насочен вертикално надолу, с големина T'. **[0,5 т.]** По аналогичен начин векторната сума на силите, с които левият и десният заряди действат на горния заряд, дава сила с големина $\frac{kqQ}{l^2}$, насочена вертикално нагоре. **[1 т.]** На горния заряд действа също така и долният заряд със сила с големина $\frac{kQ^2}{l^2}$, насочена вертикално нагоре. **[0,5 т.]** От условието за равновесие на горния заряд следва, че $\frac{kQ^2}{l^2} + \frac{kqQ}{l^2} = T + T'$. **[0,5 т.]** Като изразим T' от уравнението, което дава условието за равновесие на левия заряд, и го заместим в последното уравнение, получаваме $T = \frac{kQ^2}{l^2} - \frac{\sqrt{3}kq^2}{9l^2}$. **[1 т.]**

б) Потенциалът в средата на централната нишка е алгебрична сума от потенциалите на четирите заряда в тази точка: $U = \frac{4kQ}{l} + \frac{4\sqrt{3}kq}{3l}$. **[2 т.]**

в) Интензитетът на много голямо разстояние от центъра на системата от заряди ще приеме вида на интензитета, създаван от един заряд с големина, равна на сумата от големините на зарядите на системата, т.е. $E \approx \frac{2k(q+Q)}{d^2}$. **[1 т.]**

<u>Задача 2</u>. Електрическа верига.



Фиг. 2

а) Еквивалентната схема на свързване е представена на фиг. 2. **[1 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **B**, е $R_{\mathbf{AB}} = \frac{21R}{8}$. **[2 т.]**

б) Даденият в условието ток I протича през двата най-горни резистора на еквивалентната схема. **[0,5 т.]** Токът през цялата схема е $I_{\mathbf{AB}} = \frac{\mathcal{E}}{R_{\mathbf{AB}}} = \frac{8\mathcal{E}}{21R}$. **[0,5 т.]** Съпротивлението на оградената с пунктирна линия част от схемата е $R' = \frac{5R}{3}$. Следователно през тази част от схемата протича ток $I' = \frac{R}{R+R'} I_{\mathbf{AB}} = \frac{3}{8} I_{\mathbf{AB}}$. **[1 т.]** Съпротивлението на успоредно свързаните резистори в частта оградена с пунктирна линия е $R'' = \frac{2R}{3}$. Напрежението върху тези успоредно свързани резистори е $I'R'' = 2IR$. **[1 т.]** От последното уравнение следва, че $R = \frac{\mathcal{E}}{21I} \approx 1{,}7\ \Omega$. **[1 т.]**

в) В този случай съпротивлението между точките **A** и **B** ще бъде $R'_{\mathbf{AB}} = \frac{11R}{4}$. **[1,5 т.]** Мощността, която се отделя във веригата, е $P = \frac{\mathcal{E}^2}{R'_{\mathbf{AB}}} = \frac{4\mathcal{E}^2}{11R} = \frac{84I\mathcal{E}}{11} \approx 11$ W. **[1,5 т.]**

<u>Задача 3</u>. Равнозакъснително движение.

а) Нека да отчитаме разстоянията спрямо положението на задния автомобил в момента, когато предният автомобил започва да се движи равнозакъснително. Скоростта на предния автомобил като функция на изминалото време от този момент е $v_1 = v_0 - a_1 t$ **[0,5 т.]**, а скоростта на задния автомобил е $v_2 = v_0 - a_2(t - t_0)$. **[0,5 т.]** Автомобилите се намират най-близо един от друг, когато относителната скорост на предния автомобил спрямо задния стане равна на нула, т.е. $v_1 - v_2 = a_2(t - t_0) - a_1 t = 0$. **[0,5 т.]** Това става при време $t_{\min} = \frac{a_2 t_0}{a_2 - a_1}$. **[0,5 т.]** Положението на предния автомобил като функция на изминалото време е $x_1 = l_0 + v_0 t - a_1 t^2/2$. **[0,5 т.]** Задният автомобил се движи равномерно за време t_0 и след това започва да се движи равнозакъснително. Следователно неговото положение се дава с $x_2 = v_0 t_0 + v_0(t - t_0) - a_2(t - t_0)^2/2 = v_0 t - a_2(t - t_0)^2/2$. **[1 т.]** Разстоянието между автомобилите по време на тяхното движение е $l = x_1 - x_2 = l_0 - a_1 t^2/2 + a_2(t - t_0)^2/2$. **[0,5 т.]** Минималното разстояние между тях се реализира при $t = t_{\min}$, т.е. $l_{\min} = l_0 - a_1 t_{\min}^2/2 + a_2(t_{\min} - t_0)^2/2 = l_0 - \frac{a_1 a_2 t_0^2}{2(a_2 - a_1)}$. **[0,5 т.]** Следователно $l_0 = l_{\min} + \frac{a_1 a_2 t_0^2}{2(a_2 - a_1)} = 237{,}5$ m. **[0,5 т.]**

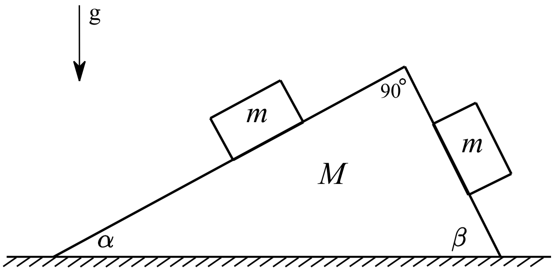
б) Автомобилите ще се намират отново на разстояние l_0 един от друг, когато $a_1 t^2 = a_2(t - t_0)^2$ **[0,5 т.]**, т.е. при $t = \frac{\sqrt{a_2}}{\sqrt{a_2} - \sqrt{a_1}} t_0$. **[0,5 т.]** Търсеното време е $t - t_{\min} = \frac{\sqrt{a_1 a_2}}{a_2 - a_1} t_0 \approx 8{,}7$ s. **[1 т.]**

в) Предният автомобил спира да се движи при $t_1 = \frac{v_0}{a_1}$, а задният автомобил спира при $t_2 = t_0 + \frac{v_0}{a_2}$. **[0,5 т.]** Следователно $2t_0 = |t_1 - t_2| = \left|\frac{v_0}{a_1} - \frac{v_0}{a_2} - t_0\right|$. **[0,5 т.]** От това уравнение получаваме, че $v_0 = \frac{3a_1 a_2 t_0}{a_2 - a_1} = 22{,}5$ m/s. **[1 т.]**

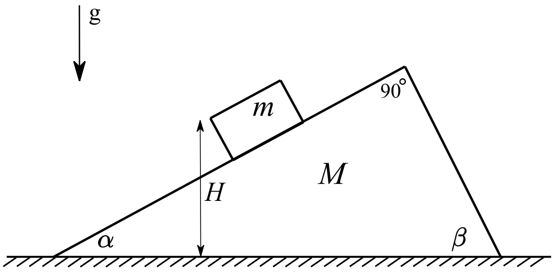
г) Разстоянието между автомобилите след тяхното спиране е $x_1(t_1) - x_2(t_2) = l_0 + \frac{v_0^2}{2a_1} - v_0 t_0 - \frac{v_0^2}{2a_2} = l_0 + \frac{3a_1 a_2 t_0^2}{2(a_2 - a_1)} = l_{\min} + \frac{2a_1 a_2 t_0^2}{a_2 - a_1} = 350$ m. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 11-12. клас

Задача 1. *Механика*



Фиг. 1 а



Фиг. 1 б

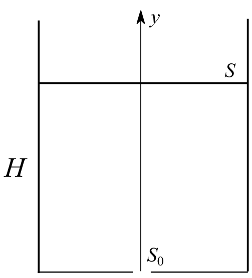
Клин с маса M и с форма на правоъгълен триъгълник е поставен върху равнина, както е показано на фиг. 1 а и б. Всички повърхности по-долу са гладки, т.е. отсъства сила на триене.

а) Клинът се захваща неподвижно за равнината. Две малки тела с маси m са поставени неподвижно върху клина, при което започват да се пързалят по него (фиг. 1 а). Определете нормалната сила N, с която системата от трите тела действа върху равнината. **[3т]**

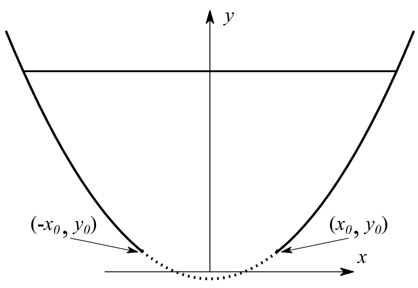
б) Клинът вече може да се движи свободно без триене по равнината. Определете ускорението a, с което се движи той, докато телата се пързалят по него. **[3т]** Намерете силата N, с която системата от трите тела действа върху равнината. **[1т]**

в) Нека в началото е поставено неподвижно само едно тяло с маса m на височина H (фиг. 1 б). Намерете скоростите на тялото и клина в момента, когато тялото достига основата на клина. Намерете числен резултат за стойностите $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$, $H = 3\,\mathrm{m}$, $\alpha = 45^\circ$, $m = 1\,\mathrm{kg}$, $M = 2\,\mathrm{kg}$. Приемете, че малкото тяло е с пренебрежими размери. **[3т]**

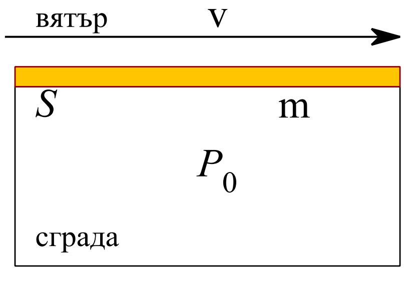
Задача 2. *Флуиди*



Фиг. 2 а



Фиг. 2 б



Фиг. 2 в

а) В правоъгълен съд с площ S е налята вода до височина H, както е показано на фиг. 2 а. Водата изтича през дупчица с площ S_0, намираща се на дъното на съда. Нека с v_y означим скоростта, с която спада нивото на водата, а с v_0 – скоростта на водната струя, изтичаща през дупчицата. Намерете v_y и v_0 като функция на нивото на водата y. **[3т]**

б) В съд с ротационна форма е налята вода, която изтича през дупка на дъното на съда (фиг. 2б). Дупката е симетрична, като краищата ѝ са с координати $(-x_0,y_0)$ и (x_0,y_0). Формата на съда е такава, че нивото на водата y спада равномерно с времето. Следователно тази система може да се използва за измерване на времето. Намерете формата на съда $y = f(x)$. **[4т]**

Упътване за а) и б): Водата да се разгледа като течност с пренебрежим вискозитет.

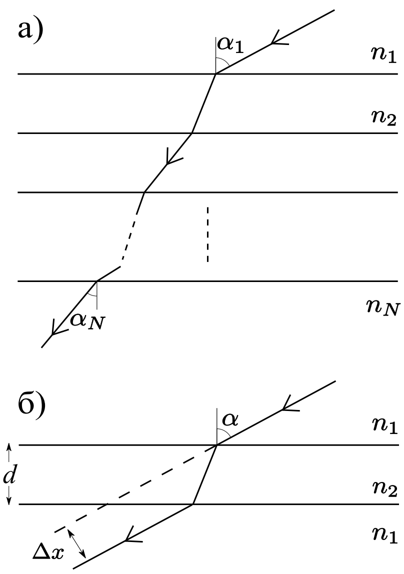
в) На фиг. 2 в е показана сграда, която е изложена на вятър със скорост v. Пресметнете минималната скорост v_0, при която вятърът ще отдели покрива от сградата. Максималната допустима сила на опън на конструкцията, поддържаща покрива, е F_0, площта и масата на покрива са съответно S и m, а плътността на въздуха е ρ. **[3т]**

Задача 3. *Оптика*

Част А

а) Светлинен лъч преминава последователно през среди с различни показатели на пречупване $n_1, n_2, ..., n_N$, както е показано на фиг. 3 а). Границите на средите, N-1 на брой, са успоредни една на друга. Намерете изходния ъгъл α_N при даден входен ъгъл α_1. **[1т]**

б) Лъч пада под ъгъл α върху плоско-паралелна пластинка с дебелина d. Показателите на пречупване на средите са показани на фиг. 3 б). Намерете отместването на лъча Δx. Намерете числен резултат за стойностите $\alpha = 45^{\circ}$, $n_1 = 1$, $n_2 = 1.5$, $d = 1$см. **[3т]**



Фиг. 3

Част Б

Фотоапарат има прост обектив, който се състои от една леща с фокусно разстояние $f = 1$ см и диаметър $d = 1$см. Сензорът, върху който се проектира изображението от обектива, представлява квадрат със страна $L = 20$ mm.

а) Апаратът е фокусирал обект на разстояние $a = 1$ m. Намерете зрителното поле ϕ на фотоапарата. Зрително поле е максималният ъглов диаметър, който може да се заснеме с дадения фотоапарат. **[2т]**

б) Фотографът насочва фотоапарата към Слънцето и го оставя с отворена бленда, така че то да осветява сензора за продължително време. Слънчевата светлина преминава през филтър, така че интензитетът ѝ е $I_0 = 0.1$W/m^2, а ъгловият диаметър на Слънцето е приблизително $\alpha = 0.5^{\mathrm{O}}$. Намерете равновесната температура T_0 на осветената част от сензора. **[4т]**

Упътване б): Равновесна температура се постига, когато за единица време тялото поглъща и излъчва еднакво количество енергия.

Приемете, че сензорът поглъща целия светлинен поток и че е с нулева топлинна проводимост (не провежда топлина към неосветената си част и към останалата част от фотоапарата). Сензорът излъчва топлина единствено от осветената от Слънцето страна.

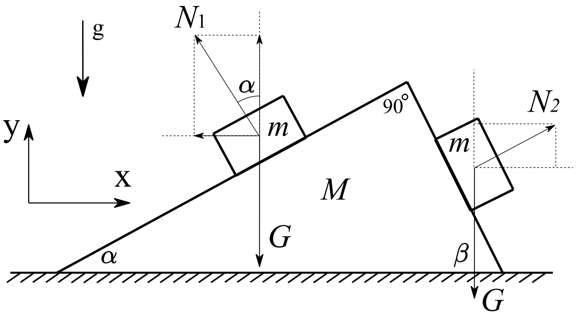
Константа на Стефан-Болцман $\sigma = 5.67 \text{x} 10^{-8}$ Wm^{-2}K^{-4}.

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ПРОЛЕТНО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
12 – 13 март 2016 г., Бургас
Тема за 11-12. клас, Решения и указания

Задача 1. *Механика - решение*

а) Работим в инерциална отправна система, т.е. разглеждаме силите в координатна система, която е неподвижна спрямо хоризонталната равнина. Налице са следните сили: върху телата действат реакциите на опората N_1 и N_2 и силите на тежестта G (изобразени на фиг. 1 а). Имаме

$$N_1 = mg\cos\alpha, \qquad N_2 = mg\cos\beta. \quad \textbf{[1т]}$$



Фиг. 1 а

За компонентите по вертикалната ос намираме

$$N_{1y} = mg\cos^2\alpha, \qquad N_{2y} = mg\cos^2\beta. \quad \textbf{[1т]}$$

Така за пълната сила намираме

$$N = mg\left(\cos^2\alpha + \cos^2\beta\right) + Mg = \left(m + M\right)g, \ \textbf{[1т]}$$

където сме отчели, че $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$.

б) Клинът вече може да се движи свободно без триене по равнината. Приемаме, че се движи с ускорение a надясно. Върху клина действат реакциите на опората от страна на телата (3-ти принцип на Нютон), както и силите на тежестта. Следват динамичните уравнения, разложени по координатните оси. За лявото тяло (маса m):

$$-N_1\sin\alpha = ma_{1x}, \qquad N_1\cos\alpha - mg = ma_{1y}. \quad \textbf{[0.5т]}$$

За дясно тяло (маса m):

$$N_2\sin\beta = ma_{2x}, \qquad N_2\cos\beta - mg = ma_{2y}. \quad \textbf{[0.5т]}$$

За клина (маса M):

$$N_1\sin\alpha - N_2\sin\beta = Ma.$$

Телата се движат успоредно на повърхността на клина и затова векторите на ускоренията $\vec{a}_1 - \vec{a}$ и $\vec{a}_2 - \vec{a}$ също сочат успоредно на тези повърхности. Така за компонентите на a_1 и a_2 намираме

$$\frac{a_{1y}}{a_{1x} - a} = \tan\alpha\,, \quad \frac{a_{2y}}{a_{2x} - a} = -\tan\beta\,. \ \textbf{[1т]}$$

Изразяваме всяка от компонентите от динамичните уравнения и ги заместваме в горните две уравнения:

$$\frac{N_1}{m} = g\cos\alpha - a\sin\alpha,$$
$$\frac{N_2}{m} = g\cos\beta + a\sin\beta.$$

Заместваме получените изрази в уравнението за клина, при което получаваме

$$m\left[g(\sin\alpha\cos\alpha - \sin\beta\cos\beta) - a(\sin^2\alpha + \sin^2\beta) \right] = Ma.$$

Налагаме условието $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$, при което получаваме

$$\left(m + M\right)a = 0.$$

Така намираме ускорението на клина

$$a = 0.$$ **[1т]**

Тъй като $a = 0,$ за силата, с която телата действат на равнината, отново получаваме

$$N = \left(m + M\right)g.$$ **[1т]**

в) Запазват се механичната енергия и импулса на системата по *x*:

$$mgH = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv^2}{2},$$ **[1т]**

$$mv_{1x} + Mv = 0.$$

Имаме и връзките

$$\frac{v_{1y}}{v_{1x} - v} = \tan\alpha,$$ **[1т]**

$$v_{1x}^2 + v_{1y}^2 = v_1^2.$$

Намираме

$$2gH = v_{1x}^2 + v_{1y}^2 + \frac{M}{m}v^2,$$
$$v_{1x} = -\frac{M}{m}v,$$
$$v_{1y} = -v\left(1 + \frac{M}{m}\right)\tan\alpha.$$

Така получаваме

$$v = \sqrt{\frac{2gH}{\frac{M}{m} + \left(\frac{M}{m}\right)^2 + \left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 \tan^2\alpha}}$$ **[0.4т]**

и

$$v_1 = \sqrt{2gH - \frac{M}{m}v^2} = \sqrt{2gH\left(1 - \frac{1}{1 + \frac{M}{m} + \frac{m}{M}\left(1 + \frac{M}{m}\right)^2 \tan^2\alpha}\right)}.$$ **[0.4т]**

За съответните стойности намираме $v = 2\,\text{m/s}$ **[0.1т]** и $v_1 = 2\sqrt{13}\ \text{m/s} \approx 7.21\ \text{m/s}.$ **[0.1т]**

Задача 2. ***Флуиди - решение***

а) Прилагаме закона на Бернули за точка от водната повърхност с височина y и за точка от дъното с височина 0:

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \textbf{ [1т]}.$$

В опростен вид изразът приема вида: $2gy + v_y^2 = v_0^2$. В сила е и принципът за непрекъснатостта:

$$v_y S = v_0 S_0 \textbf{ [1т]}.$$

От последните две уравнения получаваме:

$$v_y = S_0\sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \textbf{ [0.5т]} \text{ и } v_0 = S\sqrt{\frac{2gy}{S^2 - S_0^2}} \textbf{ [0.5т]}.$$

б) Отново прилагаме закона на Бернули между повърхността и дъното:

$$P_0 + \rho g y + \frac{\rho v_y^2}{2} = P_0 + \rho g y_0 + \frac{\rho v_0^2}{2} \textbf{ [1т]}.$$

В опростен вид изразът има вида: $2g(y - y_0) + v_y^2 = v_0^2$. Прилагаме и принципа за непрекъснатостта:

$$v_y \pi x^2 = v_0 \pi x_0^2 \textbf{ [1т]},$$

където сме използвали формулата за площ на кръг. Така намираме

$$v_y^2 = 2g\frac{y - y_0}{x^4 - x_0^4} x_0^4 \textbf{ [1т]}.$$

Налагаме условието за постоянна скорост, откъдето намираме формата на съда:

$$y = y_0 - \frac{v_y^2}{2g} + \frac{v_y^2}{2g}\frac{x^4}{x_0^4} \textbf{ [1т]}.$$

в) На покрива действат следните сили: тежестта mg (посока надолу), натиск от страна на въздуха над покрива $P_1 S$ (надолу) и натиск от страна на въздуха под покрива $P_0 S$ (нагоре). Максимално допустимият дисбаланс между тези сили, такъв че покривът да не се отдели от сградата, се компенсира от силата на опън F_0 (надолу). Получаваме следното уравнение

$$P_1 S - P_0 S + mg + F_0 = 0. \textbf{ [1т]}$$

В сила е уравнението на Бернули, свързващо налягането в сградата с налягането непосредствено над покрива (токовата линия „влиза“ в сградата):

$$P_0 = P_1 + \frac{\rho v_0^2}{2}, \textbf{ [1т]}$$

където v_0 е търсената минимална скорост. Така намираме

$$v_0 = \sqrt{\frac{2(mg + F_0)}{\rho S}}. \textbf{[1т]}$$

Задача 3. *Оптика – решение*

Част А

а) Прилагаме закона на Снелиус за всяка една граница:

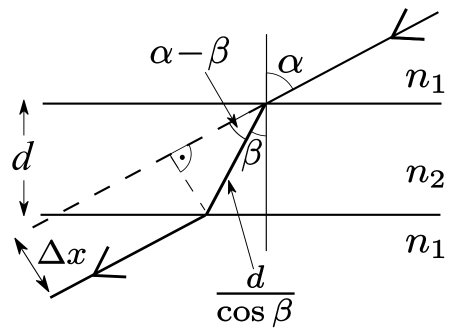
$$\begin{aligned} n_1 \sin\alpha_1 &= n_2 \sin\alpha_2, \\ n_2 \sin\alpha_2 &= n_3 \sin\alpha_3, \\ &\vdots \\ n_{N-1} \sin\alpha_{N-1} &= n_N \sin\alpha_N. \end{aligned} \quad \textbf{[0.5т]}$$

Така намираме уравнението $n_1 \sin\alpha_1 = n_N \sin\alpha_N$, откъдето получаваме

$$\alpha_N = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_N}\sin\alpha_1\right). \textbf{ [0.5т]}$$

б) Законът на Снелиус за първата граница е

$$n_1 \sin\alpha = n_2 \sin\beta . \textbf{[0.25т]}$$



Лъчът в третата среда е успореден на падналия. За отместването намираме

$$\Delta x = d\,\frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\beta} = d\,\frac{\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta}{\cos\beta}, \textbf{[1т]}$$

където сме ползвали, че $\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$.
Така намираме

$$\Delta x = d\left(\sin\alpha - \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\cos\beta}\right) = d\left(\sin\alpha - \cos\alpha\frac{\sin\beta}{\sqrt{1-\sin^2\beta}}\right). \textbf{[0.5т]}$$

Използваме закона на Снелиус:

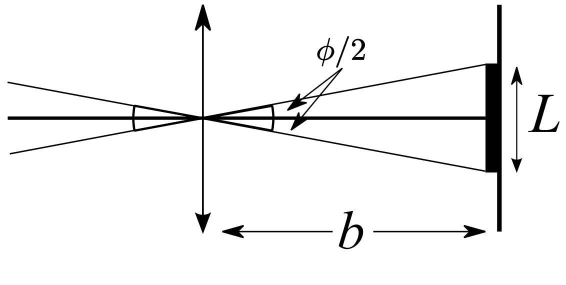
$$\Delta x = d\sin\alpha\left(1 - \frac{\frac{n_1}{n_2}\cos\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{n_1}{n_2}\sin\alpha\right)^2}}\right). \textbf{[1т]}$$

За дадените стойности имаме $\Delta x \approx 0.33$ см. **[0.25т]**

Част Б

а) От фигурата се вижда, че

$\tan\frac{\phi}{2} = \frac{L}{2b}$, откъдето получаваме



$$\phi = 2\arctan\frac{L}{2b}\ \textbf{.[0.5т]}$$

Разстоянието b намираме от формулата $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{f}$:

$$b = \frac{af}{a-f}\ \textbf{.[0.5т]}$$

Така намираме

$$\phi = 2\arctan\frac{L(a-f)}{2af} \approx 89.4^{\circ}\ \textbf{.[1т]}$$

б) Във фотоапарата влиза светлинен поток с мощност

$$P = I_0 S = I_0\frac{\pi d^2}{4}\ \textbf{.[0.75т]}$$

Тази мощност се разпределя върху кръг с приблизителен диаметър αf и площ $S' = \frac{\pi\alpha^2 f^2}{4}$ **[0.75т]**. Така за мощността на единица площ имаме $\frac{P}{S'} = I_0\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2$ **[0.5т]**. За равновесната температура имаме

$$\sigma T_0^4 = \frac{P}{S'} = I_0\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2 \textbf{,[1т]}$$

откъдето получаваме

$$T_0 = \left(\frac{I_0}{\sigma}\left(\frac{d}{\alpha f}\right)^2\right)^{1/4} \approx 390\ \text{K.}\ \textbf{[1т]}$$

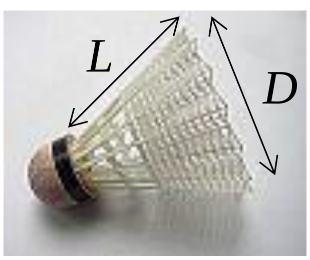
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално пролетно състезание по физика – Бургас, 12 март 2016 г.
Специална тема

Физични константи

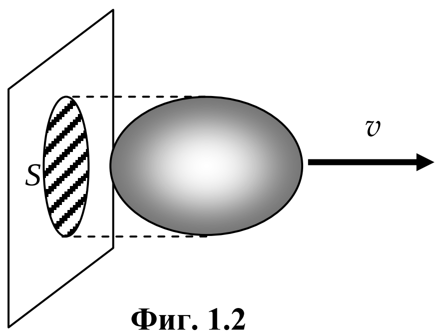
Скорост на светлината във вакуум	$c = 3.00 \times 10^8\ \mathrm{m/s}$
Гравитационна константа	$\gamma = 6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}$
Универсална газова константа	$R = 8.314\ \mathrm{J/(mol \cdot K)}$
Число на Авогадро	$N_\mathrm{A} = 6.02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$
Земно ускорение	$g = 9.81\ \mathrm{m/s^2}$

Задача 1. Механика на бадминтона

Перото за игра на бадминтон (вж. фиг. 1.1) е пример за тяло, при чието движение съществена роля играе силата на съпротивление на въздуха. Означените на фигурата размери на перото са D = 5.8 cm и L = 7.0 cm, а масата му, съсредоточена основно в сферичната глава, е m = 4.80 g. Експерименталните данни в задачата се отнасят за движение на перото във въздух при налягане p = 99.8 kPa и температура T = 297 K. Приемете, че средната моларна маса на въздуха е $\mu = 0.029\ \mathrm{kg/m^3}$.



Фиг. 1.1



Фиг. 1.2

При движение на тяло във флуид с пренебрежим вискозитет, върху тялото действа сила на съпротивление, която се дава с израза:

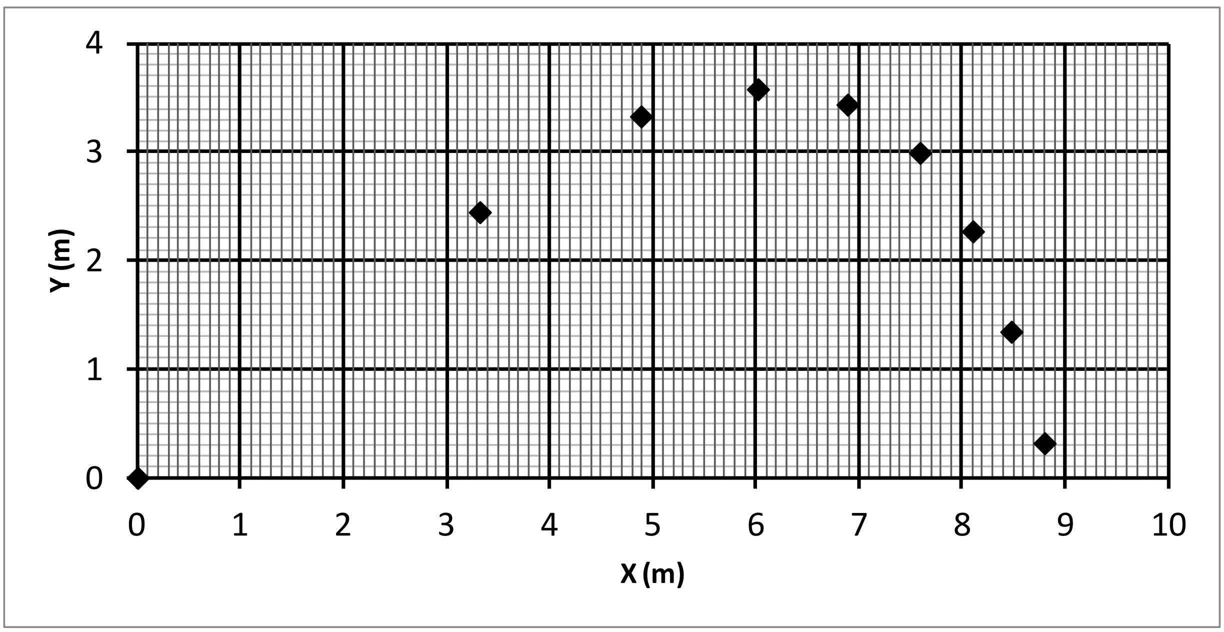
$$f = \frac{1}{2} C_D \rho S v^2$$

където ρ е плътността на флуида, v – скоростта на тялото, S – площта на проекцията на тялото в равнина, перпендикулярна на скоростта му (вж. фиг. 1.2). Безразмерният коефициент C_D се нарича коефициент на челно съпротивление и зависи от формата на тялото. Целта на задачата е да определите коефициента на челно съпротивление на перото за бадминтон въз основа на реални експериментални данни.

А) *Помощни съотношения.* От стробоскопична снимка на движещо се тяло са установени радиус-векторите $\overrightarrow{r_1}, \overrightarrow{r_2}$ и $\overrightarrow{r_3}$ на три негови последователни положения през еднакви интервали от време Δt. Ако приемете, че движението на тялото е равноускорително, получете изрази за ускорението на тялото $\vec{a}$ и за скоростите му $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ и $\overrightarrow{v_3}$ в съответните три момента, изразени само чрез радиус-векторите и интервала време. **[2.5 т]**

Б) В случай, че движението на тялото не е равноускорително, получените в точка А формули дават само приблизителни стойности за скоростта и ускорението в трите момента. За кой от трите момента, според вас, получените формули дават най-точна оценка на скоростта и на ускорението? Не е нужно да се аргументирате. **[0.5 т]**

В) Графиката на фиг. 1.3 изобразява последователните положения на главата на летящо перо за бадминтон, получени от стробоскопична снимка с интервал между кадрите $\Delta t = 200$ ms. Оста X е хоризонтална, а Y – вертикална. Можете да приемете, че: 1) през целия полет оста на перото е успоредна на вектора на скоростта на главата; 2) промяната на ускорението за времето между два кадъра е пренебрежимо малка.



Фиг. 1.3 Последователни положения на главата на перо за бадминтон, получени от стробоскопична снимка с интервал между кадрите $\Delta t = 200$ ms.

В празните полета на таблицата от работния лист нанесете:

- координатите x и y на перото в моментите на дадените кадри (в момента t = 0 перото се намира в центъра на координатната система);

- пресметнатите компоненти v_x и v_y, a_x и a_y съответно на скоростта и ускорението на перото.

Запишете формулите, които използвате, за да получите оценка на скоростта и ускорението в i-тия момент от време (можете да не разглеждате началния и крайния момент). **[3 т]**

Г) Въз основа на дадените и на пресметнатите данни, предложете графичен метод, чрез който да определите коефициента C_D на челно съпротивление на перото. Направете нужните изчисления и оценете грешката на получения резултат. За построяване на графики можете да използвате разграфената координатна система в работния ви лист. **[4 т]**

Внимание! Предайте работния лист заедно с останалите листа от решението.

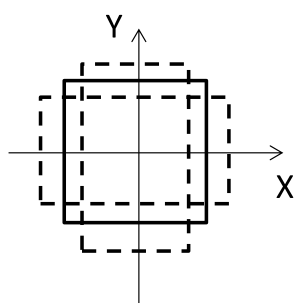
Задача 2. Гравитационна вълна

Гравитационната вълна представлява смущение в геометрията на пространството, което се разпространява с крайна скорост c. От практическа гледна точка гравитационната вълна се проявява като деформация на телата, през които преминава. Гравитационните вълни се излъчват от масивни обекти, които се движат с ускорение, например: въртящо се несиметрично тяло, двойка звезди, обикалящи около общия им център на масата, неизотропен взрив на свръхнова, сблъсък между космически обекти и др.

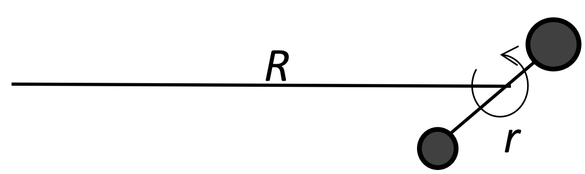
А) Гравитационната вълна предизвиква деформация на телата в равнина, перпендикулярна на посоката на разпространение на вълната. Деформацията се изразява в еднородно разтягане (свиване) на тялото k пъти в дадено направление X и едновременно свиване (разтягане) $1/k$ пъти в перпендикулярното направление Y, както е показано на фиг. 2.1. В случай на слаби гравитационни вълни, породени от далечни космически обекти, коефициентът на разтягане k се мени по хармоничен закон:

$$k(t) = 1 + h\sin(\omega t)$$

където h << 1 е безразмерната амплитуда на вълната. Тя има смисъл на максимална относителна деформация, предизвикана от вълната.



Фиг. 2.1



Фиг. 2.2

Нека означим с I интензитета на вълната, т.е. количеството енергия, което вълната пренася за единица време през единица площ, ориентирана перпендикулярно на посоката на разпространение. Както при механичните вълни, интензитетът на гравитационната вълна е пропорционален на квадрата на нейната амплитуда:

$$I = f(\omega, \gamma, c)h^2$$

където коефициентът на пропорционалност f зависи от кръговата честота на вълната ω и фундаменталните константи γ и c. Определете вида на функцията f с точност до безразмерен множител. **[1.5 т]**

Б) Гравитационна вълна е породена от двойка звезди с маси M_1 и M_2, обикалящи около общия си център на масата на разстояние r една от друга, както е показано на фиг. 2.2. Съгласно с Общата теория на относителността, амплитудата на вълната на разстояние R от звездите ($R >> r$) се дава с израза:

$$h = K(\gamma, c)\frac{E_k}{R}$$

където E_k е кинетичната енергия на звездите, а K е коефициент на пропорционалност, зависещ само от фундаменталните константи γ и c. Получете израз за K с точност до безразмерен множител. **[1.5 т]**

В) За двойната система от фиг. 2.2 получете, с точност до безразмерен множител, израз за пълната мощност P, излъчвана под формата на гравитационни вълни, като функция на масите на звездите, разстоянието между тях и фундаменталните константи γ и c. **[1 т]**

Г) Загубата на енергия под форма на гравитационни вълни води до бавно намаляване на разстоянието между двойката звезди. Получете израз за скоростта $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$, с която се променя разстоянието между звездите, ако приемете, че относителното изменение на разстоянието за една обиколка е много малко. Релативистките ефекти не се отчитат. Всички безразмерни коефициенти от предишните подточки, водят до множител 64/5, който можете да използвате наготово в окончателния израз. **[3 т]**

Д) За колко време t разстоянието между звездите в системата ще се промени от определена начална стойност r_0 до крайна стойност r_1 ($r_1 < r_0$). **[1.5 т]**

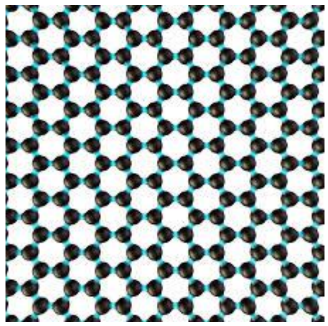
Е) В проведения наскоро експеримент за детектиране на гравитационна вълна е регистрирана вълна от двойка черни дупки, въртящи се около общия си център на масата. Честотата на регистрирания сигнал се изменя от 45 Hz до 360 Hz за време t = 0.15 s, след което се предполага, че двете черни дупки са се сблъскали и сляли.

Ако приемете, че масите на двете черни дупки са еднакви, определете числено тяхната маса M, началното разстояние r_0 между тях и разстоянието r_c, при което е настъпил сблъсъкът. Не е нужно да получавате аналитични изрази за търсените величини. Релативистките ефекти не се отчитат. **[1.5 т]**

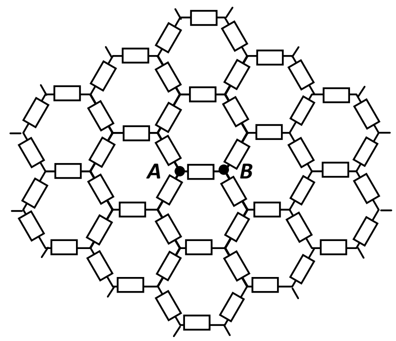
Задача 3. Хексагонална решетка

Много често в природата и в техниката се срещат хексагонални структури, т.е. структури съставени от правилни шестоъгълни елементи, запълващи плътно двумерна равнина (виж например фиг. 3.1). Тук, в три независими подусловия, ще изследвате някои физични свойства на различни такива структури.

Фиг. 3.1



Фиг. 3.2



Фиг.3.3

А) Повърхнинна плътност на графена **[2 т]**

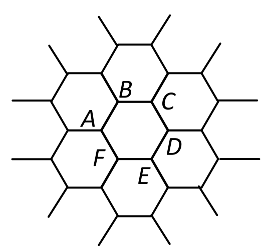
Графенът (фиг. 3.2) е двумерна форма на въглерода. Състои се от въглеродни атоми, заемащи върховете на правилни шестоъгълници, които запълват плътно равнината. Разстоянието между два съседни въглеродни атома е $a = 1.42$ Å. Колко е повърхнинната плътност λ на графена, т.е. колко е масата на единица площ от слой графен. Моларната маса на въглерода е $\mu = 0.012$ kg/mol.

Б) Хексагонална мрежа от резистори **[3 т]**

За безкрайната хексагонална мрежа от еднакви резистори със съпротивление R всеки (фиг. 3.3), определете еквивалентното съпротивление R_{AB} между точките A и B.

В) Дифузия в хексагонален кристал **[5 т]**

В някои кристали пренасянето на електричен ток се дължи на т.нар. „скокова” проводимост. В отсъствие на електрично поле, токовите носители „блуждаят” по кристала, като извършват случайни скокове от атом на атом. В хексагоналния кристал, показан на фиг. 3.4, в даден момент електрон се намира в т. A. Електронът може да прескочи с еднаква вероятност 1/3 на всеки от трите съседни атома, после със същата вероятност на някой от следващата тройка съседни атоми и т.н.

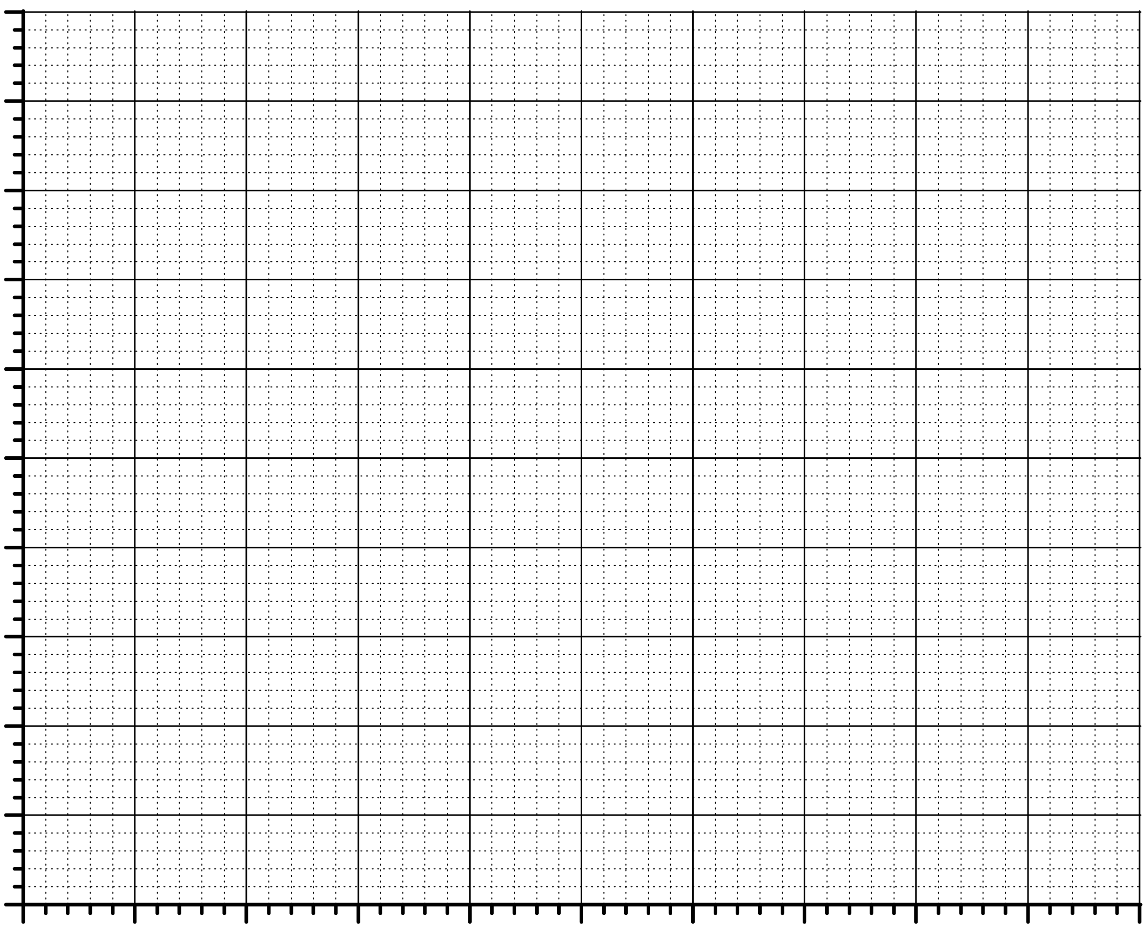


Фиг. 3.4

Пресметнете вероятностите $P(A), P(B), P(C), P(D), P(E)$и $P(F)$ след три случайни скока електронът да се окаже съответно в точките от A до F.

Работен лист към задача 1

Предайте заедно с решението!



МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

Национално пролетно състезание по физика – Бургас, 12 март 2016 г.

Примерни решения на специалната тема

Задача 1. Механика на бадминтона

А) *Помощни съотношения.*

Разглеждаме момента 1 като начален и записваме уравненията за скоростта и преместването при равноускорително движение в моментите 2 и 3.

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_1} + \vec{a}\Delta t$$
$$\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{v_1} + \vec{a}(2\Delta t)$$
$$\overrightarrow{r_2} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{v_1}\Delta t + \frac{1}{2}\vec{a}\Delta t^2$$
$$\overrightarrow{r_3} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{v_1}(2\Delta t) + \frac{1}{2}\vec{a}(2\Delta t)^2$$

От четирите уравнения намираме:

$$\overrightarrow{v_1} = \frac{4\overrightarrow{r_2} - 3\overrightarrow{r_1} - \overrightarrow{r_3}}{2\Delta t};\ \overrightarrow{v_2} = \frac{\overrightarrow{r_3} - \overrightarrow{r_1}}{2\Delta t};\ \overrightarrow{v_3} = \frac{\overrightarrow{r_1} + 3\overrightarrow{r_3} - 4\overrightarrow{r_2}}{2\Delta t}$$
$$\vec{a} = \frac{\overrightarrow{r_1} - 2\,\overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}}{\Delta t^2}$$

Б) Получените формули дават най-точна оценка за скоростта и за ускорението в средния (втория) момент.

В) За определяне на ускорението и скоростта в даден момент i, използваме координатите на перото в същия момент, както и в предходния (i–1), и в следващия (i+1) момент. За компонентите на скоростта имаме:

$$v_{xi} = \frac{x_{i+1} - x_{i-1}}{2\Delta t};\quad v_{yi} = \frac{y_{i+1} - y_{i-1}}{2\Delta t}$$

а за компонентите на ускорението съответно:

$$a_{xi} = \frac{x_{i+1} - 2x_i + x_{i-1}}{\Delta t^2};\quad a_{yi} = \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{\Delta t^2}$$

Така пресметнатите стойности са дадени в таблицата.

№	t (s)	x (m)	y (m)	v_x (m/s)	v_y (m/s)	a_x (m/s^2)	a_y (m/s^2)	v (m/s)	vv_x (m^{2}s^2)	vv_y (m^{2}s^2)
1	0.0	0.0	0.0							
2	0.2	3.3	2.4	12.2	8.3	-43.9	-39.1	14.8	180.4	123.0
3	0.4	4.9	3.3	6.7	2.8	-10.8	-15.8	7.3	49.4	20.7
4	0.6	6.0	3.6	5.0	0.3	-6.6	-9.8	5.0	25.1	1.4
5	0.8	6.9	3.4	3.9	-1.5	-4.1	-7.6	4.2	16.5	-6.2
6	1.0	7.6	3.0	3.0	-2.9	-4.8	-6.9	4.2	12.8	-12.3
7	1.2	8.1	2.3	2.2	-4.1	-3.5	-5.1	4.7	10.4	-19.3
8	1.4	8.5	1.3	1.7	-4.9	-1.2	-2.5	5.2	9.0	-25.3
9	1.6	8.8	0.3							

Г) От II принцип на Нютон имаме:

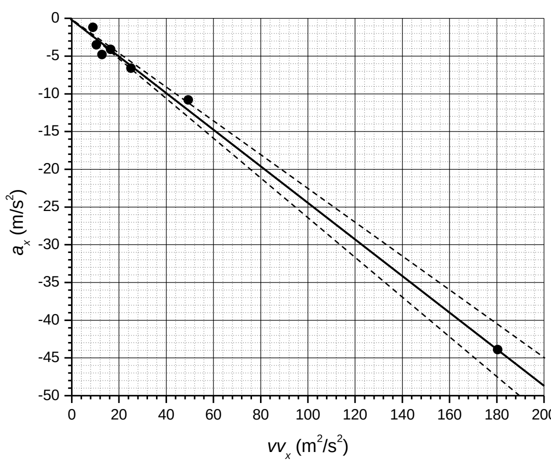
$$m\vec{a} = m\vec{g} - \frac{1}{2}C_D\rho S^2 v^2 \vec{n}$$

където $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$ е големината на скоростта, а $\vec{n}$ е единичен вектор в посока на скоростта. Ако проектираме векторното равенство по двете координатни оси, получаваме:

$$a_x = -\frac{C_D\rho S^2}{2m} v v_x$$

$$a_y = -g - \frac{C_D\rho S^2}{2m} v v_y$$

Следователно, ако изберем като нови променливи vv_x и a_x, ще получим права пропорционалност с наклон $k = -\frac{C_D\rho S}{2m}$, от който можем да определим коефициента C_D. Пресметнатите стойности на големината на скоростта v и на новата променлива vv_x са дадени в таблицата.



На графиката са нанесени точките, съответстващи на променливите vv_x и a_x, както е построена и апроксимиращата права, минаваща през тях. За наклона на правата намираме:

$$k = \frac{\Delta a_x}{\Delta(vv_x)} = \frac{-49 \text{ m/s}^2}{200 \text{ m}^2/\text{s}^2} = -0.25(\pm 0.02) \text{ m}^{-1}$$

Плътността на въздуха определяме от уравнението на Клапейрон-Менделеев:

$$\rho = \frac{p\mu}{RT} = 1.17 \text{ kg/m}^3$$

Площта на сечението, перпендикулярно на скоростта, е:

$$S = \frac{\pi D^2}{4} = 26.4 \text{ cm}^2 = 2.64 \times 10^{-3} \text{ m}^2$$

Следователно за коефициента на челно съпротивление намираме:

$$C_D = -\frac{2mk}{\rho S} \approx 0.78$$

Относителната грешка на резултата е $\frac{\Delta C_D}{C_D} = \frac{\Delta k}{k} = 0.08$. Окончателно получаваме:

$$C_D = 0.78 \pm 0.06$$

Задача 2. Гравитационна вълна

А) Приемаме, че f е степенна функция, т.е.

$$I \propto \omega^x \gamma^y c^z h^2$$

където x, y и z са неизвестни степнни показатели. Размерностите на величините в двете страни на уравнението са:

$[I] = \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^{-2} = \text{kg} \cdot \text{s}^{-3}$; $[\omega] = \text{s}^{-1}$; $[\gamma] = \text{kg}^{-1} \cdot \text{s}^{-2} \cdot \text{m}^3$; $[c] = \text{s}^{-1} \cdot \text{m}$

От равенството на размерностите в двете страни на уравнението получаваме:

$$\mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-3} = \mathrm{kg}^{-y}\cdot\mathrm{s}^{-x-2y-z}\cdot\mathrm{m}^{3y+z}$$

откъдето намираме $x = 2$; $y = -1$; $z = 3$. Следователно:

$$I = \mathrm{const}\cdot\frac{c^3\omega^2h^2}{\gamma}$$

Б) Приемаме, че K е степенна функция, т.е.

$$h \propto \gamma^x c^y \frac{E_k}{R}$$

Лявата страна на уравнението е безразмерна, а размерностите на величините в дясната част са:

$[\gamma] = \mathrm{kg}^{-1}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}^3$; $[c] = \mathrm{s}^{-1}\cdot\mathrm{m}$; $\left[\frac{E_k}{R}\right] = \mathrm{J}\cdot\mathrm{m}^{-1} = \mathrm{N} = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{s}^{-2}\cdot\mathrm{m}$

От равенството на размерностите в двете страни на уравнението получаваме:

$$\mathrm{kg}^0\cdot\mathrm{s}^0\cdot\mathrm{m}^0 = \mathrm{kg}^{1-x}\cdot\mathrm{s}^{-2x-y-2}\cdot\mathrm{m}^{3x+y+1}$$

откъдето намираме $x = 1$; $y = -4$. Следователно:

$$h = \mathrm{const}\cdot\frac{\gamma E_k}{Rc^4}$$

В) Ако оградим източника на вълна с мислена сфера с радиус R ($R >> r$), то мощността на източника е:

$$P \propto IR^2 \propto \frac{c^3\omega^2}{\gamma}\left(\frac{\gamma E_k}{Rc^4}\right)^2 R^2 = \frac{\gamma}{c^5}\omega^2E_k^2$$

Нека означим с r_1 и r_2 разстоянията от звездите до центъра на масата на системата:

$$M_1r_1 = M_2r_2$$
$$r_1 + r_2 = r$$
$$\Rightarrow r_1 = \frac{M_2r}{M_1+M_2};\;\; r_2 = \frac{M_1r}{M_1+M_2}$$

От II принцип на Нютон:

$$M_1\omega^2r_1 = M_2\omega^2r_2 = \frac{\gamma M_1M_2}{r^2}$$
$$\Longrightarrow \omega^2 = \frac{\gamma(M_1+M_2)}{r^3}$$

За кинетичната енергия намираме:

$$E_k = \frac{1}{2}(M_1r_1^2 + M_2r_2^2)\omega^2 = \frac{\gamma M_1M_2}{2r}$$

Следователно, с точност до безразмерен множител, получаваме следния израз за излъчваната мощност:

$$P = \mathrm{const}\cdot\frac{\gamma^4(M_1M_2)^2(M_1+M_2)}{c^5r^5}$$

Г) Пълната енергия на системата е:

$$E = E_k + E_p = \frac{\gamma M_1M_2}{2r} - \frac{\gamma M_1M_2}{r} = -\frac{\gamma M_1M_2}{2r}$$

Излъчваната мощност е равна на скоростта, с която намалява пълната енергия на системата:

$$P = -\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = -\frac{\gamma M_1 M_2}{2r^2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}t}$$

Като използваме израза за мощността, намираме:

$$-\frac{\gamma M_1 M_2}{2r^2}\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}t} \propto \frac{\gamma^4 (M_1 M_2)^2 (M_1 + M_2)}{c^5 r^5}$$

откъдето, с отчитане на дадения безразмерен множител, получаваме:

$$\frac{\mathrm{dr}}{\mathrm{d}t} = -\frac{64\gamma^3 M_1 M_2 (M_1 + M_2)}{5c^5 r^3}$$

Д) След интегриране на полученото в т. Г уравнение, намираме:

$$r_0^4 - r_1^4 = \frac{512\gamma^3 M^3}{5c^5} t$$

Откъдето

$$t = \frac{5c^5 (r_0^4 - r_1^4)}{512\gamma^3 M^3}$$

Е) Периодът на гравитационната вълна е два пъти по-малък от периода на обикаляне на звездите, защото след половин обиколка, звездите заемат неразличими от гледна точка на гравитационното поле положения. Следователно ъгловата скорост ω на обикаляне на черните дупки е свързана с линейната честота ν на вълната като: $\omega = \pi\nu$. От получените в точка В съотношения, намираме ($M_1 = M_2 = M$):

$$r_0 = \frac{(2\gamma M)^{1/3}}{(\pi\nu_0)^{2/3}} \quad \text{и} \quad r_c = \frac{(2\gamma M)^{1/3}}{(\pi\nu_c)^{2/3}}$$

Също така от т. Д имаме:

$$r_0^4 - r_c^4 = \frac{512\gamma^3 M^3}{5c^5} t$$

Численото решаване на трите уравнения дава:

$$r_0 \approx 7.0 \times 10^5 \text{ m}; \quad r_c \approx 1.8 \times 10^5 \text{ m}; \quad M \approx 5.2 \times 10^{31} \text{ kg}.$$

Задача 3. Хексагонални структури

А) Нека $m_\mathrm{C} = \mu/N_\mathrm{A}$ е масата на въглеродния атом. Всеки въглероден атом принадлежи на три шестоъгълни клетки и дава принос $\frac{1}{3}m_\mathrm{C}$ към масата на една клетка. Следователно масата на една клетка е:

$$m = 6 \times \frac{1}{3} m_\mathrm{C} = 2m_\mathrm{C} = \frac{2\mu}{N_\mathrm{A}}$$

Площта на шестоъгълната клетка е:

$$S = 3\sqrt{3}a^2/2$$

Следователно повърхнинната плътност на графена е:

$$\lambda = \frac{m}{S} = \frac{4\mu}{3\sqrt{3}N_\mathrm{A}a^2} = 7.6 \times 10^{-7} \text{ kg/m}^2$$

Б) Да приемем, че в т. А се „инжектира" ток I, който се разпределя по цялата мрежа и „изтича" към безкрайно отдалечените точки. От съображения за симетрия е ясно, че токовете, които текат по резисторите AB и BC са съответно:

$$I'_{AB} = \frac{1}{3}I \text{ и } I'_{BC} = \frac{1}{2}I'_{AB} = \frac{1}{6}I$$

Ако от т. B се „отнема" ток I, тогава от същите съображения следва, че:

$$I''_{AB} = \frac{1}{3}I$$

Ако точките A и B са включени едновременно към източник на ток, тогава през резистора AB тече ток:

$$I_{AB} = I'_{AB} + I''_{AB} = \frac{2}{3}I$$

а напрежението върху резистора е $U_{AB} = \frac{2}{3}IR$. Следователно еквивалентното съпротивление между точките A и B е:

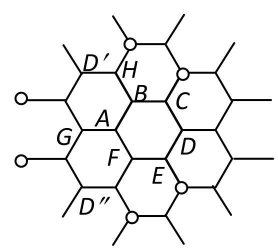
$$R_{AB} = \frac{U_{AB}}{I} = \frac{2}{3}R$$

В) Електронът може да се върне в т. А или да попадне в точките C и E само след четен брой подскоци. Следователно $P(A) = P(C) = P(E) = 0$.

Вероятността електронът да избере конкретна последователност от три отсечки е $\left(\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{1}{27}$. За три стъпки електронът може да попадне в т. D само по два начина – като следва пътя ABCD или пътя AFED. Следователно

$$P(D) = 2 \times \frac{1}{27} = \frac{2}{27}$$

Електронът може да попадне в т. B по пет различни пътя: ABCB, ABHB, ABAB,AFAB, AGAB. Следователно:



$$P(B) = 5 \times \frac{1}{27} = \frac{5}{27}$$

От съображения за симетрия:

$$P(F) = P(B) = \frac{5}{27}$$