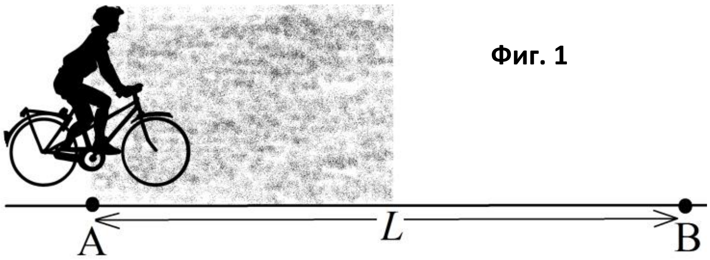
МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема за 7. клас

Задача 1. Спорт за отличници *Трите части на задачата са независими!*

Част 1.

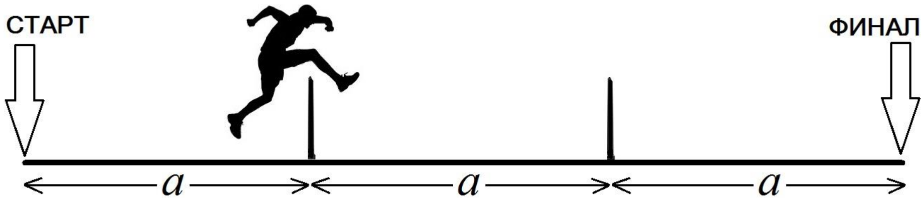


Фиг. 1

Любител колоездач решил да измине пътя от град **A** до град **B** по шосе с дължина L = 10 km – **фиг. 1**. Той знаел, че ако кара с обичайната си скорост, ще му трябва време t_0 = 30 min, за да пристигне в град **B**. През първата половина от пътя имало мъгла и колоездачът трябвало да кара с 4 km/h по-бавно от обичайното. Той решил да навакса и през втората половина от пътя карал с 4 km/h по-бързо от обичайното, като мислел, че така все пак ще успее измине разстоянието от **A** до **B** за време t_0. Правилно ли е разсъждавал колоездачът? Ако не, намерете с колко минути се е отклонил от времето t_0. **(3 точки)**

Част 2.

Атлет тренира бягане с две препятствия върху писта с дължина $3a$ = 108 m. Препятствията са разположени както е показано на **фиг. 2**. Атлетът тръгва със скорост v_0, но след всяко препятствие скоростта му намалява с 1 m/s. За колко време атлетът ще пробяга по цялата писта, ако разстоянието между двете препятствия му отнема t_1 = 4 s? **(3 точки)**



Фиг. 2

Част 3.

Турист тръгва от хижа **A** до хижа **B**, разстоянието между които е L. През първата 1/3 от пътя той се движи със скорост v_0. След това туристът почива за време t_0 и отново тръгва, изминавайки втората 1/3 от пътя със скорост $\frac{3}{2}v_0$. Последната част от пътя той изминава със скорост $\frac{3}{4}v_0$. С каква постоянна скорост трябва да се движи туристът на връщане, ако иска да измине разстоянието до хижа **A** за същото време? Изразете отговора си чрез L, v_0 и t_0. **(4 точки)**

Задача 2. Хубав шоколадов крем
За да приготви шоколадов крем, готвачът Реми се нуждае само от шоколад и сметана. Реми знае, че съотношението между двата продукта може да е най-различно, но за да стане кремът **хубав**, поне 20% от обема му трябва да е шоколад и поне 40% – сметана. Шоколадът има плътност $\rho_{шок}$ = 1,2 g/cm^3, а плътността на сметаната е $\rho_{сме}$ = 0,5 g/cm^3. Реми сипва крема на *стандартни* порции в купички с обем V_0 = 200 cm^3.

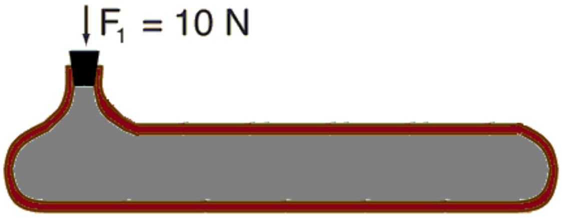
а) Реми приготвя два различни крема, чиито порции имат маса съответно m_1 = 180 g и m_2 = 120 g. Хубави ли са тези кремове? **(4 точки)**

б) Колко е масата на сметаната и колко на шоколада в порция крем с маса m = 170 g? **(4 точки)**

в) Приятелката на Реми, която е кокетна парижанка, не иска да изяде повече от 50 g крем, затова Реми сипва отделно *специална* порция за нея. Намерете най-обемната порция хубав крем, която може да ѝ поднесе Реми? **(2 точки)**

Задача 3. Флуиди в действие *Двете части на задачата са независими!*

Част 1. Бутилка с нестандартна форма е напълнена догоре с вода - **фиг. 3**. Сечението на гърлото е S, а площта на дъното е 200 S. Поставяме тапата и я натискаме със сила F_1 = 10 N. Намерете натиска върху дъното на бутилката. Хидростатичното налягане, създадено от водата, както и нейната свиваемост, се пренебрегват. **(2 точки)**

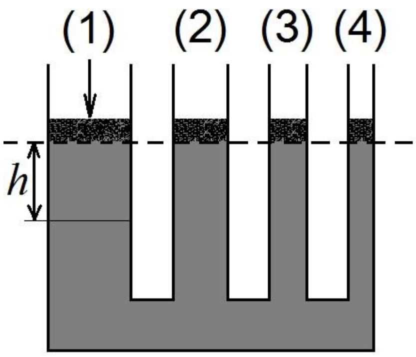


Фиг. 3

Част 2. Хидравличната машина на **фиг. 4** има четири бутала – номерирани от 1 до 4, с площи съответно S_1 = 0,4 m^2, S_2 = 0,3 m^2, S_3 = 0,2 m^2 и S_4 = 0,1 m^2. Масата на буталата се пренебрегва.

а) Ако натиснем бутало (1) и то се премести на разстояние h = 0,3 m, с колко и накъде ще се преместят другите бутала? **(4 точки)**

б) Върху бутало (1) поставяме тежест, която натиска със сила F_1 = 10 N. Намерете какви сили трябва да приложим върху другите бутала, така че те всички да застанат на едно и също ниво (хоризонталната пунктирна линия)? **(4 точки)**



Фиг. 4

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема за 7. клас – решения и указания

Във всяка задача за сгрешен числен отговор еднократно се отнемат по 0,2 т.

No.	Задача 1	Точки
Част 1	Обичайната скорост на колоездача е $v_0 = \frac{L}{t_0} = 20\ \text{km/h}$, където сме заместили $t_0 = 30\ \text{min} = 0{,}5\ \text{h}$. **1 т** През първата половина от пътя той е карал със скорост $v_1 = 16\ \text{km/h}$. През втората половина от пътя е карал с $v_2 = 24\ \text{km/h}$. Времето за пътуване е $t = \frac{L/2}{v_1} + \frac{L/2}{v_2} \approx 0{,}52\ \text{h}$. **1 т** Отклонението от обичайното му време е $t_{\text{закъснение}} = t - t_0 =$ 0,02 h = 1,2 min. **1 т**	**3 т**
Част 2	Препятствията се намират на разстояние $a = 36\ \text{m}$ едно от друго. Ако атлетът тръгва със скорост v_0, то след първото препятствие скоростта му става $v_0 - 1\ \text{m/s}$, а след второто е $v_0 - 2\ \text{m/s}$. **0,5 т** Времето за пробягване на разстоянието между двете препятствия е $t_1 = \frac{a}{v_0 - 1\ \text{m/s}} = 4\ \text{s}$, откъдето намираме $v_0 = \frac{a + t_1 \cdot 1\ \text{m/s}}{t_1} = 10\ \text{m/s}$. **1 т** Тогава времето за пробягване до първото препятствие е $t_0 = \frac{a}{v_0} = 3{,}6\ \text{s}$ и времето за пробягване от второто препятствие до финала е $t_2 = \frac{a}{v_0 - 2\ \text{m/s}} = 4{,}5\ \text{s}$. **1,5 т** Времето за пробягване на цялата писта е $t_{\text{писта}} = t_0 + t_1 + t_2 = 12{,}1\ \text{s}$. **1 т**	**4 т**
Част 3	Първата третина от пътя туристът изминава за време $t_1 = \frac{L}{3v_0}$. **0,5 т** Втората третина той почива и продължава, което дава време $t_2 = t_0 + \frac{L}{3} \cdot \frac{2}{3v_0}$. **0,5 т** Третата част от пътя изминава за време $t_3 = \frac{L}{3} \cdot \frac{4}{3v_0}$. **0,5 т** Времето за изминаване на целия път е $t = t_1 + t_2 + t_3$. Пътят между хижите може да бъде изминат с постоянна скорост $v_{\text{постоянна}} = \frac{L}{t_1 + t_2 + t_3} = v_0 \frac{L}{L + v_0 t_0}$. **1,5 т**	**3 т**

No.	Задача 2.	Точки
(а)	При различни съотношения на шоколада и сметаната, се получават кремове с различна плътност. Тъй като шоколадът е по-плътен от сметаната, то колкото повече шоколад има в крема, толкова по-плътен е той. В крем с 20% обемно съдържание на шоколад има 80% обемно съдържание на сметана. Това е най-малко плътният **хубав** крем (за краткост ще го наричаме „лек“). В крем с 40% обемно съдържание на сметана има 60% обемно съдържание на шоколад. Това е най-плътният **хубав** крем (за краткост ще го наричаме „плътен“). Масата на стандартна порция „лек“ крем е $m_{\text{лек}} = 0,2V_0\rho_{\text{шок}} + 0,8V_0\rho_{\text{сме}} = 128\ \text{g}$. **1 т** Маса на стандартна порция „плътен“ крем $m_{\text{плътен}} = 0,6V_0\rho_{\text{шок}} + 0,4V_0\rho_{\text{сме}} = 184\ \text{g}$. **1 т** Масата на всяка стандартна порция **хубав** крем, който е получен при друго съотношение на продуктите, лежи между $m_{\text{лек}}$ и $m_{\text{плътен}}$. Следователно, порция с маса 180 g е хубав крем, но порция с маса 120 g – не е. **2 т**	**4 т**
(б)	Масата на крема е сума от масите на шоколада и сметаната, т.е. $m = m_{\text{шок}} + m_{\text{сме}}$. Нека двата продукта са в обемно съотношение $x : y$, като $x + y = 1$. За определеност: x части шоколад и y части сметана. Изпълнени са следните равенства: $m = xV_0\rho_{\text{шок}} + yV_0\rho_{\text{сме}}$ и $x + y = 1$. От второто равенство заместваме $y = 1 - x$ в първото и получаваме уравнение относно x: $m = xV_0\rho_{\text{шок}} + (1 - x)V_0\rho_{\text{сме}}$. Така намираме обемното съдържание на шоколада $x = \dfrac{m - V_0\rho_{\text{сме}}}{V_0(\rho_{\text{шок}} - \rho_{\text{сме}})} = 0,5$. **3 т** Масата на шоколада в тази порция крем е $m_{\text{шок}} = 0,5V_0\rho_{\text{шок}} = 120\ \text{g}$, а на сметаната е $m_{\text{сме}} = m - m_{\text{шок}} = 50\ \text{g}$. **1 т**	**4 т**
(в)	При фиксирана маса, най-обемната порция дава кремът с най-малка плътност, т.е. Реми трябва да предложи „лек“ крем. Използвайки резултата от подусловие (а), намираме плътността на „лек“ крем $\rho_{\text{лек}} = \dfrac{m_{\text{лек}}}{V_0} = 0,2\rho_{\text{шок}} + 0,8\rho_{\text{сме}} = 0,64\ \text{g/cm}^3$. **1 т** Тогава обемът на порция „лек“ крем с маса $m_{\text{специална}} = 50\ \text{g}$ е $V_{\text{специална}} = \dfrac{m_{\text{специална}}}{\rho_{\text{лек}}} \approx 78\ \text{cm}^3$ (или $80\ \text{cm}^3$). **1 т**	**2 т**

No.	Задача 3.	Точки
Част 1	При натискане на тапата, в течността се създава налягане, което се предава еднакво във всички посоки (принцип на Паскал). Големината на това налягане е $p = \dfrac{F_1}{S}$. **1 т** Върху цялата площ на дъното действа същото налягане, т.е. натискът върху дъното е $F_2 = 200S \cdot p = 200F_1 = 2000N$ (при условие, че пренебрегнем хидростатичното налягане на водата!). **1 т**	**2 т**
Част 2 (а)	След придвижване на буталото на разстояние h, изместената от него течност има обем $V_1 = S_1 h$. **1 т** Другите бутала ще се преместят нагоре и ще бъдат на една и съща височина x. **1 т** Общият обем на навлязлата в другите три колена течност е равен на V_1, т.е. $S_1 h = S_2 x + S_3 x + S_4 x$, откъдето намираме $x = h\dfrac{S_1}{S_2 + S_3 + S_4} = 0,2\ \mathrm{m}$. **2 т**	**4 т**
Част 2 (б)	Натискът F_1 върху бутало (1) създава налягане p, което се предава еднакво във всички посоки, а големината му е $p = \dfrac{F_1}{S}$. Това налягане оказва натиск F_2 върху бутало (2), като $F_2 = pS_2 = F_1\dfrac{S_2}{S_1} = 7,5\ \mathrm{N}$. **1 т** Аналогично върху бутало (3) има натиск $F_3 = pS_3 = F_1\dfrac{S_3}{S_1} = 5\ \mathrm{N}$. **1 т** Върху бутало (4) натискът е $F_4 = pS_4 = F_1\dfrac{S_4}{S_1} = 2,5\ \mathrm{N}$. **1 т** За да се върнат в началното си положение, върху останалите бутала трябва да се приложат сили съответно F_2, F_3 и F_4 (със същата посока като F_1). **1 т**	**4 т**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

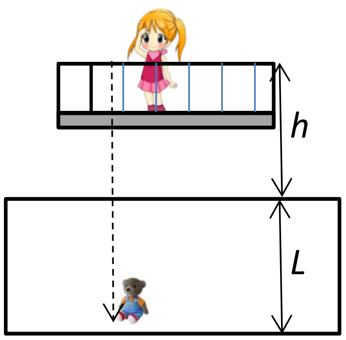
Национално есенно състезание по физика, 14-15 ноември 2015 г.
Велико Търново
Тема за 8. клас

Задача 1. Двете части на задачата са независими

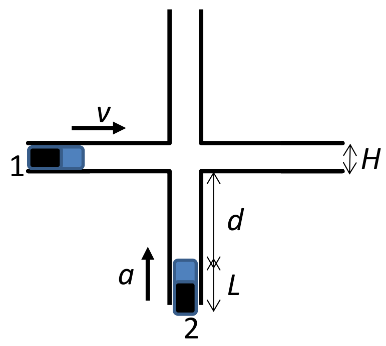
А) ***Плюшеното мече***

От балкона на сграда е изпуснат предмет, който прелита покрай витрината на магазин на първия етаж за време t = 0,2 s (фиг. 1А). Височината на витрината е L = 2 m. От каква височина h над горния край на витрината е започнал да пада предметът? **(3 точки)**

Предметът пада свободно с нулева начална скорост. Земното ускорение е g = 10 m/s^2.



Фиг. 1А



Фиг. 1Б

Б) ***Разминаване***

Два еднакви автомобила с дължина L = 5 m и широчина H = 2 m се движат към кръстовище по взаимно перпендикулярни пътища (фиг. 1Б). В началния момент и двата автомобила се намират на еднакви разстояния d = 40 m от кръстовището, като автомобилът 1 се движи равномерно със скорост v = 10 m/s, а автомобилът 2 потегля от състояние на покой с постоянно ускорение a. Определете при какви стойности на ускорението a двата автомобила могат да се разминат, без да се сблъскат или да променят начина си на движение. **(7 точки)**

Приемете, че широчината на пътищата е равна на широчината H на автомобилите.

Задача 2. *Оптични образи*

Жичката АВ на електрическа крушка има дължина 1 cm и е разположена успоредно на екрана Е, на разстояние 9 cm него (виж фиг. 2А, разположена на отделен лист). Между жичката и екрана трябва да бъде поставена събирателна леща, така че върху екрана да се получи образ на жичката с дължина 2 cm. Приемете, че центърът на лещата се намира на същата височина като долния край А на жичката.

А) Характеризирайте образа на жичката върху екрана, като използвате някои от следните определения: прав, действителен, уголемен, обърнат, недействителен, умален. **(1,5 точки)**

Геометричните построения към точки Б), В) и Г) трябва да бъдат направени върху фигура 2А, след което листът да бъде предаден заедно с решенията. Разграфената мрежа е дадена за удобство при построенията. Приемете, че страната на едно квадратче съответства на 1 cm.

Б) Начертайте образа на жичката, като обозначите точките A_1 и B_1, които съответстват на краищата A и B. **(1,5 точки)**

В) Направете подходящо геометрично построение, от което да определите на какво разстояние от екрана трябва да бъде поставена лещата. **(1 точка)**

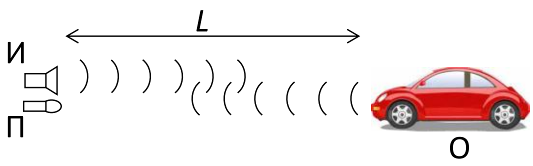
Г) Чрез подходящо геометрично построение начертайте двата фокуса на лещата и определете фокусното й разстояние f. **(3 точки)**

Д) На какво друго разстояние от екрана може да бъде поставена същата леща, така че върху екрана отново да се получи образ на жичката? Начертайте образа чрез подходящо построение и го характеризирайте, като използвате определенията, дадени в т. А). **(3 точки)**

За да бъдат чертежите ви по-ясни, направете всички построения към точка Д на дясната фигура – 2Б.

Задача 3. *Ехолокация*

Ехолокацията е метод за откриване и определяне на разстоянието до обекти, които са недостъпни за непосредствено наблюдение. Ехолокацията позволява обаче да се определи и скоростта, с която се движи изследваният обект. На фиг. 3 е показана опростена схема на ехолокатор. Той се състои от източник (И), който излъчва кратки ултразвукови сигнали, и приемник (П) на ултразвук, който регистрира отразените от обекта (О) сигнали (ехото). Можете да приемете, че източникът и приемникът са с малки размери и се намират в една и съща точка. Скоростта на ултразвука във въздуха е $c = 340\ \mathrm{m/s}$.



Фиг. 3

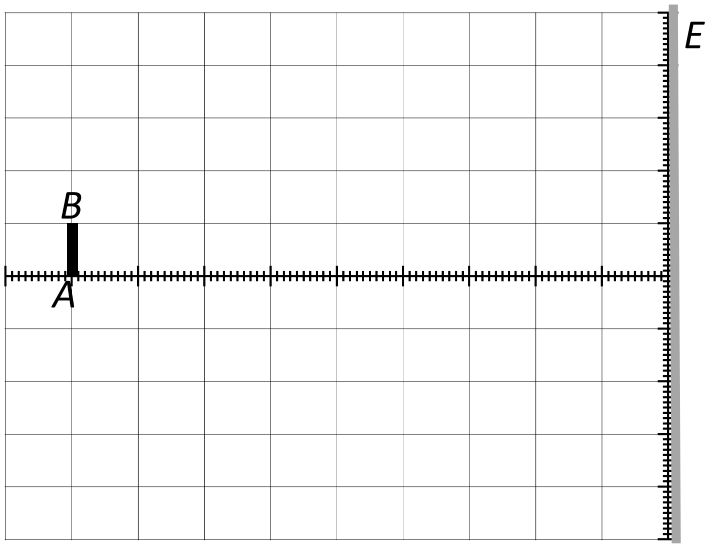
А) Източникът излъчва един единствен ултразвуков сигнал, а приемникът регистрира ехото в момента t = 3,6 s след излъчването на сигнала. Ако приемете, че обектът е неподвижен, определете разстоянието L между обекта и ехолокатора. Представете резултата както с формула, така и с числена стойност. **(2 точки)**

В следващите подточки на задачата приемете, че обектът започва да се движи към ехолокатора с постоянна скорост $v = 20\ \mathrm{m/s}$.

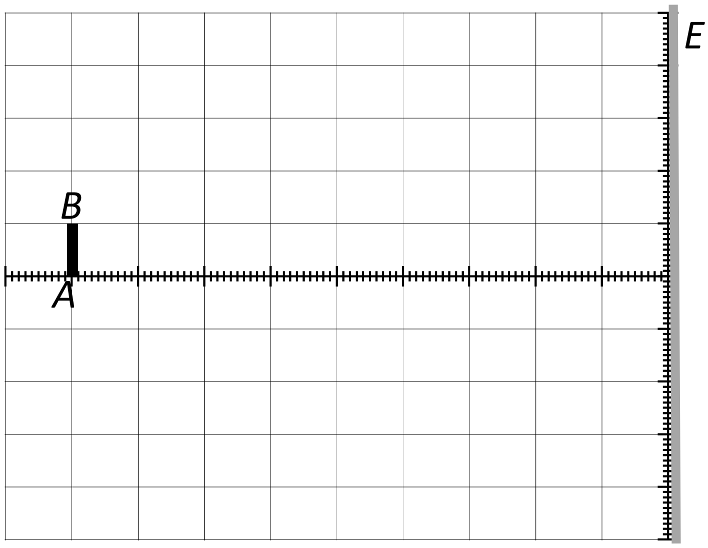
Б) В момента, когато източникът излъчва сигнал, обектът се намира на разстояние L = 306 m от ехолокатора. Определете колко време t след излъчването на сигнала приемникът ще регистрира ехото – дайте формула и числена стойност. **(3 точки)**

В) Източникът излъчва два сигнала през интервал от време $\Delta t_{\text{и}} = 0{,}018\ \mathrm{s}$. През какъв интервал от време Δt_{Π} ще следват отразените сигнали, които регистрира приемникът. Представете резултата както с формула, така и с числена стойност. **(5 точки)**

Предайте този лист заедно с вашите решения



Фиг. 2А



Фиг. 2Б

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
Национално есенно състезание по физика, 14-15 ноември 2015 г.
Велико Търново,
Тема за 8. клас, решения и указания

Задача 1. А) *Плюшеното мече*

Докато предметът пада покрай витрината, е в сила законът за пътя при равноускорително движение:

$$L = v_1 t + \frac{gt^2}{2} \qquad (1\ т)$$

където v_1 е скоростта, с която предметът достига горния край на витрината. Така определяме:

$$v_1 = \frac{L}{t} - \frac{gt}{2} = 9\ \mathrm{m/s} \qquad (0{,}5\ т)$$

Ако t_1 е времето, за което предметът пада от балкона до горния край на витрината, имаме:

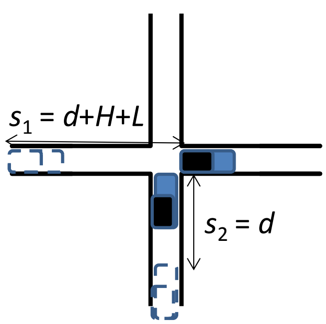
$$v_1 = gt_1 \qquad (0{,}5\ т)$$

$$h = \frac{1}{2} g t_1^2 \qquad (0{,}5\ т)$$

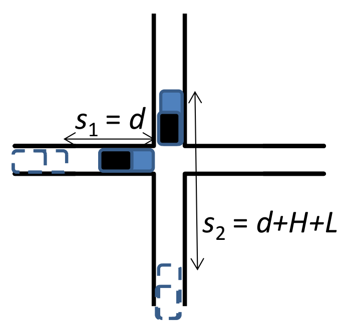
откъдето получаваме:

$$h = \frac{v_1^2}{2g} = 4{,}05\ \mathrm{m} \qquad (0{,}5\ т)$$

Б) *Разминаване*



Случай I.



Случай II.

Разминаването е възможно в два случая:

I. Автомобилът 2 тръгва с толкова малко ускорение, че достига кръстовището, след като автомобилът 1 го е пресякъл. Максималното ускорение a_1 в този случай съответства на ситуацията, показана на фигурата вляво. За равномерното движение на автомобила 1 имаме:

$$d + H + L = vt \qquad (1\ т)$$

а за равноускорителното на автомобила 2:

$$d = \frac{1}{2} a_1 t^2 \qquad (1\ т)$$

Оттук намираме:

$$a_1 = \frac{2dv^2}{(d+H+L)^2} = 3{,}62\ \mathrm{m/s^2} \qquad (1\ т)$$

II. Автомобилът 2 тръгва с толкова голямо ускорение, че пресича кръстовището преди автомобилът 1 да го е достигнал. Минималното ускорение a_2 в този случай съответства на ситуацията, показана на фигурата вдясно. За равномерното движение на автомобила 1 имаме:

$$d = vt \qquad (1\ т)$$

а за равноускорителното на автомобила 2:

$$d + H + L = \frac{1}{2}a_2t^2 \qquad (1\ т)$$

Оттук намираме:

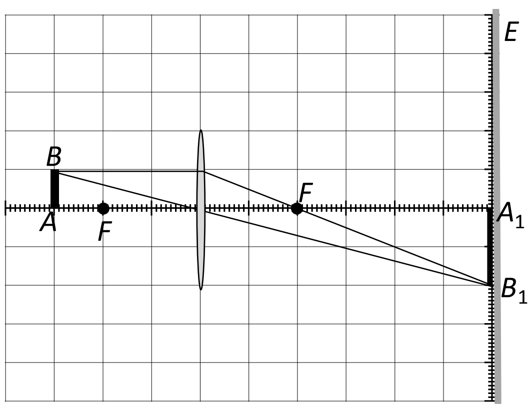
$$a_2 = \frac{2(d+H+L)v^2}{d^2} = 5{,}88\ \mathrm{m/s^2} \qquad (1\ т)$$

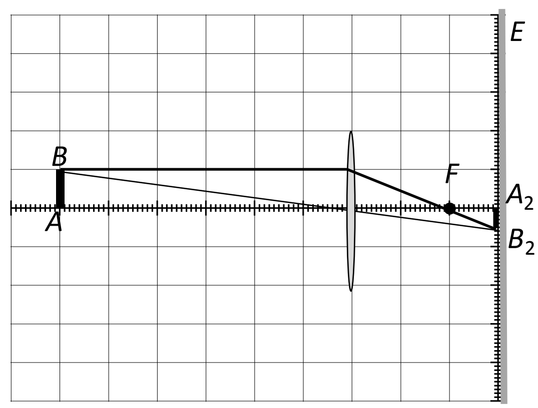
Следователно автомобилите могат да се разминат, ако:

$$a < 3{,}62\ \mathrm{m/s^2} \text{ или } a > 5{,}88\ \mathrm{m/s^2} \qquad (1\ т)$$

Задача 2. ***Оптични образи***

А) Образът е действителен (0,5 т.), обърнат (0,5 т.) и уголемен (0,5 т.).





Б) Положение на образа A_1B_1е показано на фигурата вляво. За правилно нанесен размер на образа – (0,5 т.). За правилно нанесени точки A_1 и B_1 – (2 × 0,5 т. = 1,0 т.).

В) Лъч, минаващ през центъра на лещата, продължава без да се пречупва. Следователно центърът на лещата лежи на пресечната точка на правите AA_1 и BB_1. За правилно геометрично построение – (1,0 т.).

Г) Построяваме хода на лъч, тръгващ от т. B успоредно на оптичната ос. След пречупване от лещата, той попада в т. B_1. Фокусът F е пресечната точка на лъча с оптичната ос. За правилно геометрично построение – (1,0 т.).

Вторият фокус е разположен симетрично на първия спрямо лещата. За правилно геометрично построение – (1,0 т.).

Фокусното разстояние е равно на разстоянието от фокуса до центъра на лещата. Следователно:

$$f = 2\ \mathrm{cm} \qquad (1{,}0\ т.)$$

Д) Лещата може да бъде поставена на 3 cm от екрана, както е показано на фигурата вдясно. (0,5 т.)

Построяваме образа A_2B_2, като прекарваме лъчи, насочени към центъра на лещата (0,5 т.) и успоредно на оптичната ѝ ос (0,5 т.).
Образът е действителен (0,5 т.), обърнат (0,5 т.) и умален (0,5 т.).

Задача 3. *Ехолокация*

А) Ултразвуковият сигнал изминава общо разстояние:

$$s = 2L \qquad (0{,}5\ т)$$

с постоянна скорост c. Следователно:

$$ct = 2L \qquad (0{,}5\ т)$$

и

$$L = \frac{ct}{2} = 612\ \mathrm{m} \qquad (1{,}0\ т)$$

Б) Нека t_1 е времето, което сигналът пътува, докато се отрази от движещия се обект. За това време обектът изминава разстояние $s_1 = vt_1$, а сигналът – $s_2 = ct_1$. Следователно

$$ct_1 + vt_1 = L \qquad (1{,}0\ т)$$

откъдето:

$$t_1 = \frac{L}{c+v} \qquad (0{,}5\ т)$$

Понеже сигналът изминава разстоянието s_2 и на връщане, общото му време на движение е:

$$t = 2t_1 \qquad (0{,}5\ т)$$

Следователно:

$$t = \frac{2L}{c+v} = 1{,}7\ \mathrm{s} \qquad (1{,}0\ т)$$

В) Като използваме резултата от точка Б, намираме, че първият сигнал ще пътува време:

$$t_1 = \frac{2L}{c+v} \qquad (0{,}5\ т)$$

докато приемникът го регистрира. В момента на излъчване на втория сигнал обаче източникът се е приближил към ехолокатора на разстояние:

$$L' = L - v\Delta t_И \qquad (1{,}0\ т)$$

Следователно вторият импулс ще пътува по-кратко време:

$$t_2 = \frac{2L'}{c+v} = \frac{2(L - v\Delta t_И)}{c+v} = t_1 - \frac{2v\Delta t_и}{c+v} \qquad (0{,}5\ т)$$

Понеже вторият импулс е излъчен по-късно от първия, той ще достигне приемника в момента $t_2 + \Delta t_и$ след излъчването на първия импулс. (1,0 т)

Следователно приемникът ще регистрира двата импулса през интервал от време:

$$\Delta t_П = (t_2 + \Delta t_И) - t_1 \qquad (1{,}0\ т)$$

Окончателно намираме:

$$\Delta t_П = \frac{(c-v)\Delta t_и}{c+v} = 0{,}016\ \mathrm{s} \qquad (1{,}0\ т)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема за 9. клас

<u>Задача 1. *Кинематика*</u>

Част 1:

Полицай е застанал в непосредствена близост до шосе и наблюдава преминаващите коли. Той прави следното наблюдение: когато е неподвижен, броят на преминалите коли за минута във всяка от двете посоки е $N_0 = 10$. Това означава, че в момента $t_1 = 0\,\mathrm{s}$ край него преминава предницата на кола, която той определя като първа, а в момента $t_2 = 60\,\mathrm{s}$ край него преминава предницата на 11-тата кола. Полицаят забелязва също, че когато се движи със скорост $v = 5$ km/h, броят на преминалите коли по посока на движението му е $N_1 = 9$. Колите са на равни (еднакви) разстояния една от друга, имат дължина $L_0 = 3\,\mathrm{m}$ и се движат с еднаква скорост. Определете:

Фиг. 1

а) скоростта v_0 на движение на колите (спрямо пътното платно); **[3т]**

б) разстоянието L между две съседни коли; **[2т]**

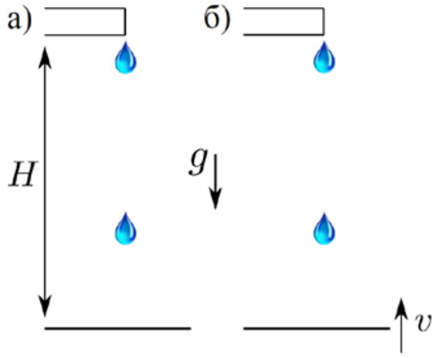
в) броя N_2 на насрещно движещите се коли, преминали за минута покрай полицая. **[1т]**

Част 2:

Две капки се отделят от покрив и падат върху повърхност, както е показано на фигурата. Капките се отделят през времеви интервал Δt, а височината на покрива е *H*. Намерете през какъв интервал от време $\Delta t'$ капките достигат повърхността в следните случаи:

а) повърхността е неподвижна (фиг. 1 а) **[1.5т]**;

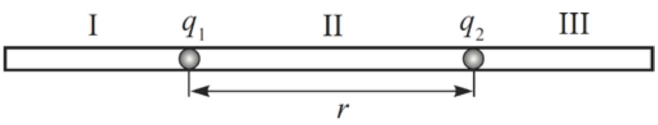
б) повърхността се движи вертикално нагоре със скорост *v* от момента на отделяне на първата капка (фиг. 1 б) **[2.5т]**.



Фиг. 2

<u>Задача 2. *Електростатика*</u>

Две наелектризирани метални топчета (точкови заряди) с положителни заряди q_1 и q_2 могат да се хлъзгат без триене в тръба от изолатор. Разстоянието между двете топчета е *r*. В тръбата поставят трето топче със заряд *q*, така че системата от три точкови заряда да се намира в равновесие.



Фиг. 3

а) Какъв е знакът на заряда *q*? **[1т]**.

б) В коя от трите области, показани на фиг. 3, трябва да се постави третото топче? **[2т]**

в) Определете разстоянието *x* от заряда q_1 до заряда *q*. **[4т]**

г) Намерете потенциала на полето, създадено от зарядите q_1 и q_2, в точката, където се намира зарядът *q*. **[3т]**

Задача 3. *Балон с въздух*

Балон с топъл въздух е направен от неразтеглив материал с маса $m = 0.2\,\mathrm{kg}$ (и с пренебрежим обем) и има постоянен обем $V = 1\,\mathrm{m}^3$. Балонът има отвор и може да обменя въздух с околната среда. Температурата на околната среда е $t_0 = 20^\mathrm{o}\,\mathrm{C}$, атмосферното налягане е $P_0 = 10^5\,\mathrm{Pa}$, а плътността на въздуха при тези условия е приблизително равна на $\rho_0 = 1\ \mathrm{kg/m}^3$. Земното ускорение е $g = 9.8\,\mathrm{m/s}^2$.

а) Каква е минималната температура t_1 на въздуха в балона, такава че той да се отлепи от земята? **[3т]**

б) Балонът се завързва с въже към земята и въздухът в него се загрява до $t_2 = 150^\mathrm{o}\,\mathrm{C}$. Определете силата на опън на въжето T. **[3т]**

в) Отворът на балона се затваря херметически (при температура $t_2 = 150^\mathrm{o}$), така че плътността на въздуха в балона е константна. До каква височина ще се издигне балонът, след като се среже въжето? В процеса на издигане температурата на въздуха в балона остава неизменна. За малки височини h можем да приемем, че атмосферата е изотермна ($t_0 = 20^\mathrm{o}\,\mathrm{C}$ навсякъде) и че плътността на въздуха $\rho(h)$ се изменя приблизително по закона $\rho(h) = \rho_0\left(1 - \dfrac{\rho_0}{P_0} g h\right)$, където g е земното ускорение. **[4т]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема 9. клас, Решения и указания

<u>Задача 1. *Кинематика*</u>

Част 1:

а) За една минута ($T = 60\,\mathrm{s}$) всяка кола, движеща се със скорост v_0, изминава разстояние $N_0(L+L_0)$, измерено спрямо неподвижния полицай. Така получаваме $N_0(L+L_0) = v_0 T$ **[1 т]**. Когато полицаят се движи със скорост v, получаваме $N_1(L+L_0) = (v_0 - v)T$ **[1 т]**. Разделяме едното уравнение на другото и намираме $\dfrac{v}{v_0} = 1 - \dfrac{N_1}{N_0}$, т.е. $v_0 = 10v = 50\,\mathrm{km/h}$ **[1 т]**.

б) От уравнението $N_0(L+L_0) = v_0 T$ **[1 т]** намираме $L = \dfrac{v_0 T}{N_0} - L_0$, т.е. $L \approx 80.3\,\mathrm{m}$ **[1 т]**.

в) За броя на насрещно движещите се коли получаваме $N_2(L+L_0) = (v_0 + v)T$. Така намираме $\dfrac{N_2}{N_0} = \dfrac{v_0 + v}{v_0}$ и следователно $N_2 = 1.1 N_0 = 11$ **[1 т]**.

Част 2:

а) В момента *t* височината на първата капка е $h_1 = H - \dfrac{gt^2}{2}$ **[0.2 т]**, а на втората е $h_2 = H - \dfrac{g(t-\Delta t)^2}{2}$ **[0.2 т]**. Първата капка достига повърхността в момента t_1, за който е изпълнено $h_1 = H - \dfrac{gt_1^2}{2} = 0$ **[0.1т]**. Намираме $t_1 = \sqrt{2H/g}$. Аналогично намираме и момента t_2, в който втората капка достига повърхността: $t_2 = \sqrt{2H/g} + \Delta t$. Така получаваме $\Delta t' = t_2 - t_1 = \Delta t$ **[1 т]**.

б) Първата капка достига повърхността в момента t_1, за който $h_1 = H - \dfrac{gt_1^2}{2} = vt_1$ **[0.25 т]**, а втората – в момента t_2, за който $h_2 = H - \dfrac{g(t_2 - \Delta t)^2}{2} = vt_2$ **[0.25 т]**. За t_1 и t_2 получихме квадратни уравнения, от които намираме $t_1 = \dfrac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}$ **[0.5 т]** и $t_2 = \Delta t + \dfrac{-v + \sqrt{v^2 + 2gH - 2gv\Delta t}}{g}$ **[0.5 т]**. Така получаваме $\Delta t' = t_2 - t_1 = \Delta t + \dfrac{\sqrt{v^2 + 2gH - 2gv\Delta t} - \sqrt{v^2 + 2gH}}{g}$. **[1 т]**

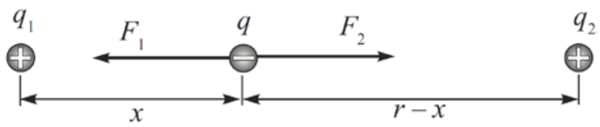
<u>Задача 2. *Електростатика*</u>

а) Ако зарядът *q* също е положителен, както и да поставим трите топчета, на крайните две ще действат сили, които ще ги отблъскват (отдалечават едно от друго). Следователно зарядът *q* трябва да е **отрицателен**. **[1т]**

б) Отрицателният заряд *q* не може да се постави в областите I или III, защото тогава другите два заряда ще го привличат и той не може да бъде в равновесие. **[1т]**

Зарядът q трябва да се постави в областта II, т.е. между положителните заряди q_1 и q_2, където те му действат със срещуположни сили, които би могло да се уравновесят. **[1т]**

в) На заряда q действат две сили (вж. чертежа), чиито големини се определят от закона на Кулон:



$F_1 = k\dfrac{q_1 q}{x^2}$ и $F_2 = k\dfrac{q_2 q}{(r-x)^2}$. **[1т]**

За да бъде зарядът q в равновесие, двете противоположни сили трябва да имат еднакви големини

$k\dfrac{q_1 q}{x^2} = k\dfrac{q_2 q}{(r-x)^2}$, откъдето получаваме квадратно уравнение за x: $(q_1 - q_2)x^2 - 2q_1 r x + q_1 r^2 = 0$ **[1т]**.

Уравнението има два корена, които се записват във вида $x_1 = \dfrac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} - \sqrt{q_2}}$ и $x_2 = \dfrac{r\sqrt{q_1}}{\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}}$ **[1т]**. За втория корен е изпълнено условието $x_2 < r$, т.е. зарядът q да се намира между двата положителни заряда (в област II). Първият корен обаче не удовлетворява това условие. Действително, при $q_1 > q_2$ имаме $x_1 > r$, т.е. зарядът q е в област III. При $q_1 < q_2$ имаме $x_1 < 0$, т.е. зарядът q е в област I. Следователно търсеното разстояние е $x = x_2$ **[1т]**.

г) Потенциалът на полето, създадено от двата заряда, е сума от потенциалите на полетата, породени от отделните заряди. Потенциалът от страна на q_1 е $\varphi_1 = k\dfrac{q_1}{x}$ **[0.5т]**, а от страна на q_2 е $\varphi_2 = k\dfrac{q_2}{r-x}$ **[0.5т]**. Следователно $\varphi = k\dfrac{q_1}{x} + k\dfrac{q_2}{r-x}$ **[1т]**, т.е. $\varphi = k\dfrac{\left(\sqrt{q_1} + \sqrt{q_2}\right)^2}{r}$ **[1т]**.

<u>Задача 3. *Балон с въздух*</u>

а) Пълната маса на балона, включваща масата на материала m и масата на загретия въздух с температура t, трябва да е равна на масата на изместения от балона въздух с температура t_0: $m + \rho_1 V = \rho_0 V$, т.е. $\rho_1 = \rho_0 - \dfrac{m}{V}$ **[1 т]**. За температурата имаме връзката (налягането е константно) $\rho_1 t_1 = \rho_0 t_0$ (температурата е в единици Келвин) **[1 т]**. Така получаваме

$$t_1 = \frac{t_0}{1 - m/(\rho_0 V)} \approx 93.25^\circ\text{C}.$$ **[1 т]**

б) Пълната сила, която действа на балона в посока надолу, е $T + (m + \rho_2 V)g$ **[0.5 т]**, а тази, която действа нагоре, е $\rho_0 V g$ **[0.5 т]**. От равенството на силите получаваме $T = (\rho_0 - \rho_2)Vg - mg$ **[0.5 т]**. Аналогично на горната подточка имаме $\rho_0 t_0 = \rho_2 t_2$ **[0.5 т]**. Така получаваме

$$T = \rho_0 V g\left(1 - \frac{t_0}{t_2}\right) - mg \approx 1.05\,\text{N}.$$ **[1 т]**

в) Аналогично на подточка а) намираме $m + \rho_2' V = \rho_0' V$, където ρ_0' и ρ_2' са съответно плътностите на въздуха извън и в балона на височина h. Така намираме, че балонът ще се издига, докато плътността на околния въздух стане $\rho_0^{'} = \rho_2^{'} + \dfrac{m}{V}$ **[1 т]**. Тъй като балонът е затворен, имаме $\rho_2^{'} = \rho_2 = \rho_0 \dfrac{t_0}{t_2}$ **[1 т].**

Също имаме $\rho_0^{'} = \rho(h) = \rho_0 \left(1 - \dfrac{\rho_0}{P_0} gh\right)$ **[1 т]**. Така получаваме

$$h = \left(1 - \frac{t_0}{t_2} - \frac{m}{\rho_0 V}\right)\frac{P_0}{\rho_0 g} \approx 1095\,\mathrm{m}. \text{ **[1 т]**}$$

Министерство на образованието и науката
Национално есенно състезание по физика
Велико Търново, 14 – 15 ноември 2015 г.
Тема 10. клас

Задача 1. Пружинно махало

На неразтегната вертикална пружина с коефициент на еластичност k = 50 N/m се окачва без начална скорост тяло с маса m = 500 g. Вертикалното пружинно махало започва да трепти.

а) Определете честотата ν_1, периода T_1 и амплитудата A_1 на трептене на махалото;

б) Пресметнете поотделно работата W_1 и W_2, която съответно извършват силата на тежестта G и еластичната сила F на пружината, при движение на тялото от най-ниското до най-високото му вертикално положение.

След извършването на няколко пълни трептения в момент, когато тялото е в най-ниското си положение, от него се отлепва парче с маса $m/2$. Намерете:

в) честотата ν_2, периодът T_2 и амплитудата A_2 на трептене на махалото от този момент нататък;

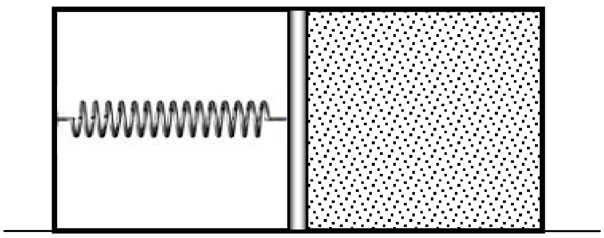
г) ускорението a на тялото, окачено на пружината, непосредствено след отлепване на парчето;

д) максималната височина h на издигане на тялото над положението му в момента на окачване.

Приемете, че земното ускорение е g = 10 m/s^2.

Задача 2. Нагряване на газ

Обемът на хоризонтален кръгов цилиндър е разделен на две равни части от подвижно бутало (фиг. 1). Лявата част е вакуумирана, а дясната е запълнена с идеален газ.



Фиг. 1

Буталото е съединено с лявата основа на цилиндъра чрез еластична пружина с дължина в недеформирано състояние, равна на дължината на цилиндъра. С помощта на вграден нагревател с пренебрежим обем газът се нагрява бавно.

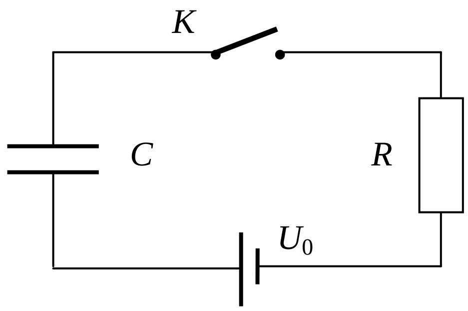
а) Намерете връзката между налягането p и обема V на газа при неговото разширение.

б) Начертайте графиката на p/p_0 в зависимост от V/V_0, където p_0 е началното налягане на газа, а V_0 – началният му обем.

в) При нагряването на газа температурата му се изменя от T_0 до $6T_0$. Начертайте графиката на температурата T на газа в зависимост от полученото от газа количество топлина Q. Вътрешната енергия на газа се дава с израза $U = (3/2)BT$, където B е газовата константа.

Задача 3. Зареждане на кондензатор

Кондензатор с капацитет C се зарежда от източник с ЕДН U_0 през резистор със съпротивление R (фиг. 2). Преди затварянето на ключа кондензаторът е незареден. Приемаме, че вътрешното съпротивление на източника е пренебрежимо.



Фиг. 2

а) Намерете тока I_0 във веригата непосредствено след затваряне на ключа.

б) При зареждането на кондензатора токът I във веригата се изменя с времето t. Намерете връзка между изменението на заряда на кондензатора Δq и изменението на тока ΔI във веригата.

в) За малък интервал от време Δt токът I във веригата може да се приеме за постоянен. Изразете Δt чрез $\Delta I / I$.

г) Пресметнете приблизително времето $t_{1/2}$, за което токът във веригата намалява до $I_0/2$, като приемете че токът във веригата може да се замени с постоянен, чиято стойност е равна на средната стойност на тока за този интервал

$$\bar{I} = \frac{1}{2}(I_{\min} + I_{\max}).$$

д) Определете общото количество топлина Q, което се отделя в резистора, докато продължава зареждането на кондензатора.

Всяка задача се оценява максимално с 10 точки.

Министерство на образованието и науката
Национално есенно състезание по физика
Велико Търново, 14 – 15 ноември 2015 г.
Тема 10. клас, Решения и указания

Задача 1. а) Честотата на трептене ν_1 и периодът T_1 се определят с изразите

$$\nu_1 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}} \approx 1{,}6\ \mathrm{Hz}\ ,\textbf{[1 т.]} \qquad T_1 = \frac{1}{\nu_1} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \approx 0{,}63\ \mathrm{s}\ .\textbf{[1 т.]}$$

Началното положение на махалото съответства на максимално отклонение от равновесното му положение. Тогава амплитудата A_1 е равна на удължението Δl_1 на пружината в равновесие, като имаме

$$A_1 = \Delta l_1 = \frac{mg}{k} = 0{,}1\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) При движение на тялото от най-ниско до най-високо вертикално положение силата на тежестта е насочена противоположно на преместването. Тъй като тя е постоянна, работата W_1 е

$$W_1 = -G.2A_1 = -2mgA_1 = -1\ \mathrm{J}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Работата W_2 на еластичната сила може да се оцени чрез изменението на потенциалната енергия E_p на деформираната пружина при движение от най-ниското положение 1 до най-високото й положение 2, при което имаме

$$W_2 = E_p(1) - E_p(2) = \frac{k(2A_1)^2}{2} - 0 = 2kA_1^2 = 1\ \mathrm{J}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

в) В този случай имаме

$$\nu_2 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2k}{m}} \approx 2{,}2\ \mathrm{Hz}\ ,\textbf{[1 т.]} \qquad T_2 = \frac{1}{\nu_2} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}} \approx 0{,}45\ \mathrm{s}\ .\textbf{[1 т.]}$$

Тъй като равновесното положение на махалото се е отместило нагоре с $\Delta l_2 = mg/2k$, за амплитудата на трептене получаваме

$$A_2 = A_1 + \Delta l_2 = \frac{3mg}{2k} = 0{,}15\ \mathrm{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

г) От втория закон на Нютон за ускорението намираме

$$a = \frac{kA_2}{m/2} = 3g \approx 30\ \mathrm{m/s^2}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

д) Търсената височина се дава с израза

$$h = A_2 - \frac{A_1}{2} = \frac{mg}{k} = 0{,}1\,\mathrm{m}. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

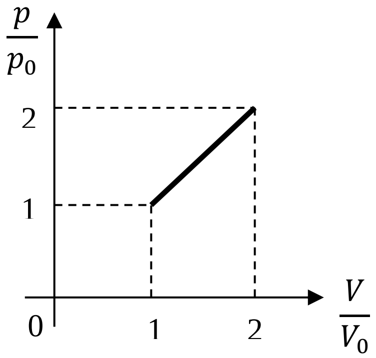
Задача 2. а) Нека означим коефициента на еластичност на пружината с k, а основата на цилиндъра с S. Когато дължината на еластичната пружина се измени с x, тя действа върху буталото със сила $F_1 = kx$ **[0,5 т.]**. От друга страна газът действа върху буталото със сила $F_2 = pS$ **[0,5 т.]**, където p е налягането на газа. При равновесие $F_1 = F_2$, откъдето следва

$$p = \frac{k}{S}x = \frac{k}{S^2}V \text{, т.е. } p = \alpha V. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

б) При разширение имаме

$$\frac{p}{p_0} = \frac{V}{V_0}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Обемът на газа се променя от V_0 до $2V_0$, а налягането му ще се променя от p_0 до $2p_0$. На фиг. 1 е показана графиката на процеса. **[1 т.]**



Фиг. 1

в) От уравнението на състояние на газа за началната му температура T_0 имаме

$$T_0 = \frac{p_0 V_0}{B}. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Максималната температура, която газът достига при разширението си, е

$$T_1 = \frac{2p_0 . 2V_0}{B} = 4T_0. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Следователно в интервала от температури $T_0 \to 4T_0$ имаме

$$Q = \Delta U + A = \frac{3}{2}B(T - T_0) + A, \qquad \textbf{[1 т.]}$$

където A е извършената от газа работа. Тя отива за свиване на пружината, при което нараства потенциалната й енергия, т.е.

$$A = \frac{kx^2}{2} - \frac{kl^2}{2} = \frac{k}{2S^2}V^2 - \frac{k}{2S^2}V_0^2 = \frac{1}{2}(pV - p_0V_0) = \frac{1}{2}B(T - T_0)\,.\textbf{[1 т.]}$$

Следователно при $T_0 \le T \le 4T_0$ имаме

$$T = T_0 + \frac{1}{2B}Q\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

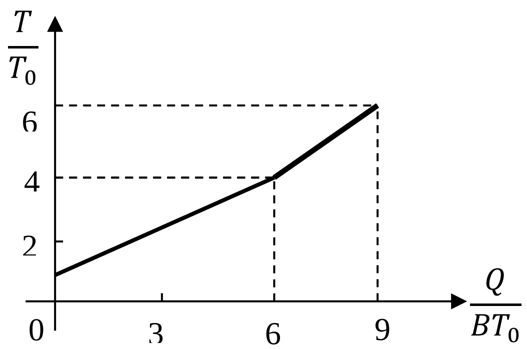
В температурния интервал $4T_0 \le T \le 6T_0$ нагряването става при постоянен обем. Тогава общото получено количество топлина Q се дава с израза

$$Q - Q_1 = \Delta U = \frac{3}{2}B(T - T_1)\,, \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

където $Q_1 = 6BT_0$. Следователно за интервала $4T_0 \le T \le 6T_0$ имаме

$$T = T_1 + \frac{2}{3B}(Q - Q_1)\,. \qquad \textbf{[1 т.]}$$

Зависимостта на температурата T от полученото количество топлина Q е показана на фиг. 2. **[1 т.]**



Фиг. 2

Задача 3. а) Във всеки момент t след затваряне на ключа K напрежението на кондензатора $U_C(t) = q(t)/C$ **[0,25 т.]** и напрежението между краищата на резистора $U_R(t) = I(t)R$ **[0,25 т.]** удовлетворяват равенството

$$U_0 = U_C(t) + U_R(t) = \frac{1}{C}q(t) + I(t)R\,. \qquad \textbf{[0,5 т.]}$$

Непосредствено след затваряне на ключа K имаме $U_C = 0$ **[0,5 т.]** и следователно токът е

$$I_0 = \frac{U_0}{R}.$$ **[0,5 т.]**

б) От връзката между напреженията можем да получим съотношение между изменението на заряда Δq на кондензатора и изменението на тока ΔI през резистора за време Δt, т.е.

$$\frac{1}{C}\Delta q + R\Delta I = 0.$$ **[1 т.]**

в) Тъй като $\Delta q \approx I\Delta t$ **[0,5 т.]**, имаме равенството

$$\Delta t = -RC\frac{\Delta I}{I}.$$ **[1 т.]**

г) Нека приемем, че $\Delta t = t_{1/2}$. Тъй като

$$\Delta I = \frac{I_0}{2} - I_0 = -\frac{I_0}{2},$$ **[1 т.]** $$I \approx \bar{I} = \frac{1}{2}\left(I_0 + \frac{I_0}{2}\right) = \frac{3I_0}{4},$$ **[1 т.]**

получаваме $t_{1/2} \approx \frac{2}{3}RC \approx 0{,}67RC$. **[1 т.]**

д) Докато продължава зареждането на кондензатора, през източника преминава заряд $q = CU_0$ **[0,5 т.]**, т.е. източникът извършва работа $A = qU_0$ **[0,5 т.]**. Част от тази работа отива за зареждането на кондензатора, а останалата част се трансформира в топлина, отделена от резистора, като е изпълнено равенството

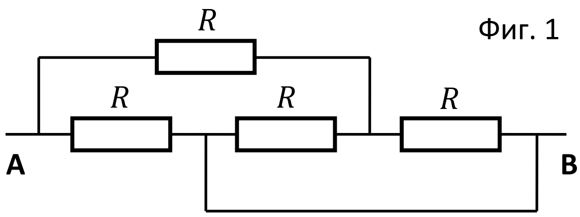
$$qU_0 = \frac{1}{2}CU_0^2 + Q.$$ **[1т.]**

Следователно имаме

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}.$$ **[0,5 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА,
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема за 11–12. клас

Задача 1. Електрическа верига.



Фиг. 1

Четири резистора с еднакво електрично съпротивление $R = 25\,\Omega$ са свързани посредством проводници с пренебрежимо електрично съпротивление по начина, показан на фиг. 1.

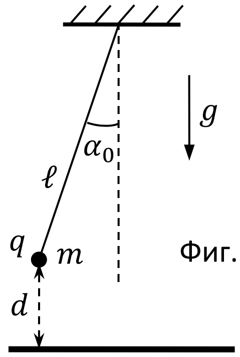
а) Определете електричното съпротивление $R_{\mathbf{AB}}$ между точките **A** и **B** на тази верига. Начертайте еквивалентната схема, от която сте намерили съпротивлението. **[3 т.]**

б) Към двата края на веригата е свързана батерия с електродвижещо напрежение $\mathcal{E} = 5\,\mathrm{V}$ и вътрешно съпротивление $r_0 = 0{,}2\,\Omega$. Какъв ток I_R ще протече през горния резистор? **[2 т.]**

в) Изчислете електричната мощност P, която общо се отделя в четирите резистора. **[1 т.]**

г) Намерете при каква друга стойност на съпротивлението на резисторите R, отделената мощност $P_{\max}$ в четирите резистора ще е максимална. Изчислете $P_{\max}$. **[4 т.]**

Задача 2. Заредено махало.



Фиг. 2

Дадено е малко топче с маса m и положителен заряд q, което е окачено на тънка неразтеглива безмасова непроводяща нишка с дължина ℓ, както е показано на фиг. 2. На разстояние $d = 3\ell/4$ под началното положение на топчето е поставена заземена метална равнина. В началния момент от времето топчето е отклонено на ъгъл α_0 спрямо вертикалата и оставено да се движи свободно. Приемете, че земното ускорение е g, а константата в закона на Кулон е k.

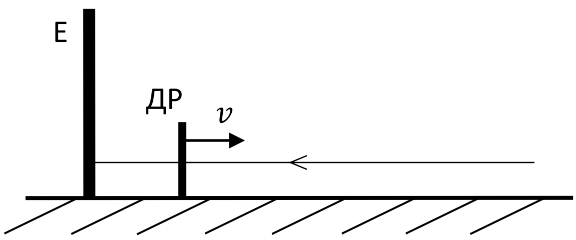
а) Начертайте посоките на всички сили, действащи върху топчето в началния момент от времето. Определете техните големини, ако ъгълът $\alpha_0 = 60°$. **[2 т.]**

б) Намерете големината на силата, която е приложена в точката на окачване на нишката, в началния момент от времето. На колко е равна големината на силата на опън на нишката в момента, когато топчето е в най-долната точка от своето движение? **[4 т.]**

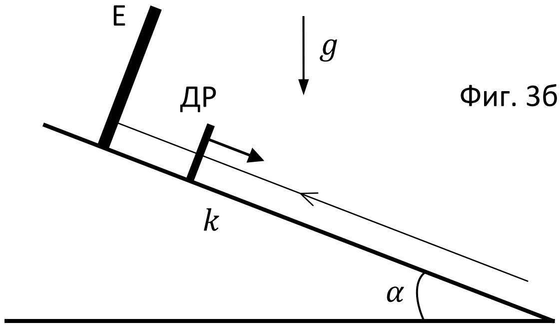
в) Като използвате, че за малки ъгли в радиани $\sin\alpha \approx \tan\alpha \approx \alpha$, а $\cos\alpha \approx 1$, изведете формула за честотата ν на малките трептения на топчето. Пресметнете числената стойност на честотата, ако $m = 80\,\mathrm{g}$, $q = 1\,\mu\mathrm{C}$, а $\ell = 50\,\mathrm{cm}$. Земното ускорение $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$, а електричната константа $k = 9 \times 10^9\,\mathrm{N.m^2/C^2}$. **[4 т.]**

Упътване: Електричната потенциална енергия на заряд с големина q, който се намира на разстояние r от заземена метална равнина, е $W = -\frac{kq^2}{4r}$.

<u>Задача 3</u>. Движеща се дифракционна решетка.



Фиг. 3а



Фиг. 3б

Дадена е дифракционна решетка, която има 500 ивици на милиметър. Първоначално дифракционната решетка (ДР) е на разстояние $l_0 = 10\ \mathrm{cm}$ от неподвижно закрепен екран (Е) и е оставена да се хлъзга със скорост v върху идеално гладка хоризонтална повърхност, както е показано на фиг. 3а. Дифракционната решетка се осветява перпендикулярно с тънък лазерен лъч с дължина на вълната $\lambda = 532\ \mathrm{nm}$.

а) Определете константата d на решетката. **[1 т.]**

б) Кой е максималният порядък на максимумите, които могат да се наблюдават? Приемете, че екранът е с произволно големи размери. **[1,5 т.]**

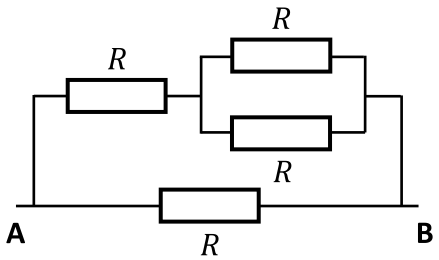
в) На колко трябва да бъде равна скоростта v, така че скоростта, с която се премества върху екрана дифракционният максимум от първи порядък, да е $u = 1\ \mathrm{cm}/s$? **[2,5 т.]**

г) Нека решетката се движи с намерената в предишната подточка скорост v. Намерете за какво време t от началото на движението максимумът от втори порядък ще се премести до първоначалното положение на максимума от трети порядък. **[2 т.]**

д) Екранът и дифракционната решетка са поставени върху наклонена равнина с ъгъл спрямо хоризонта $\alpha = 30°$, както е показано на фиг. 3б. Като използвате, че земното ускорение е $g = 9{,}8\ \mathrm{m/s^2}$, а коефициентът на триене между поставката на дифракционната решетка и равнината е $k = 0{,}1$, намерете големината на ускорението a, с което ще се движи върху екрана вторият дифракционен максимум. **[3 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА,
14 – 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Тема за 11–12. клас, Решения и указания

Задача 1. Електрическа верига.



Фиг. 1

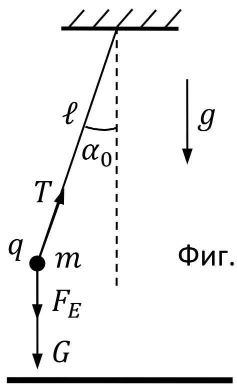
а) Еквивалентната схема на свързване е дадена на фиг. 1. **[1 т.]** Съпротивлението, което ще се измери между точките **A** и **B**, е $R_{\mathbf{AB}} = \frac{3R}{5} = 15\ \Omega$. **[2 т.]**

б) Токът през батерията е $I = \frac{\mathcal{E}}{R_{\mathbf{AB}}+r_0}$. **[0,5 т.]** Съответно токът през горния резистор е $I_R = \frac{2IR_{\mathbf{AB}}}{3R} = \frac{2\mathcal{E}R_{\mathbf{AB}}}{3R(R_{\mathbf{AB}}+r_0)} \approx 0{,}13$ A. **[1,5 т.]**

в) Електричната мощност, която се отделя в четирите резистора, е $P = I^2 R_{\mathbf{AB}} = \frac{\mathcal{E}^2 R_{\mathbf{AB}}}{(R_{\mathbf{AB}}+r_0)^2} \approx 1{,}62$ W. **[1 т.]**

г) Отделената мощност в резисторите е $P = \frac{\mathcal{E}^2 R_{\mathbf{AB}}}{(R_{\mathbf{AB}}+r_0)^2} = \frac{15\mathcal{E}^2 R}{(3R+5r_0)^2}$. Т.е. искаме да намерим най-голямата стойност на $x = \frac{R}{(3R+5r_0)^2}$. **[0,5 т.]** Тъй като при R, клонящо към нула или безкрайност, x клони към нула, то наистина съществува такъв максимум. Около максимума винаги има две различни стойности на R, за които x ще бъде едно и също. Тези стойности се получават като решение на квадратното уравнение $9xR^2 + (30xr_0 - 1)R + 25xr_0^2 = 0$. **[0,5 т.]** Единствено в максимума ще има една единствена стойност на R за фиксирано $x_{\max}$, т.е. уравнението ще има един двоен корен. **[0,5 т.]** Този случай се реализира при нулиране на дискриминантата на уравнението: $(30xr_0 - 1)^2 - 900x^2r_0^2 = 0$, **[0,5 т.]** откъдето $x_{\max} = \frac{1}{60r_0}$, $R = \frac{5r_0}{3} \approx 0{,}33\ \Omega$, **[1 т.]** а $P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4r_0} = 31{,}25$ W. **[1 т.]**

Задача 2. Заредено махало.



Фиг. 2

а) Схемата с посоките на всички сили, които действат върху топчето, е изобразена на фиг. 2. **[0,5 т.]** Вертикално надолу действа силата на тежестта с големина $G = mg$. В същата посока е ориентирана и електростатичната сила, с която си взаимодействат топчето и заземената равнина. Топчето индуцира заряди по повърхността на равнината, които създават поле, еквивалентно на полето на точков заряд, разположен симетрично на топчето спрямо равнината и с противоположен знак, т.е. $F_E = \frac{kq^2}{4d^2} = \frac{4kq^2}{9\ell^2}$. **[1 т.]** Също така действа сила на опън по посока на нишката, с големина $T = (G + F_E)\cos\alpha_0 = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{4kq^2}{9\ell^2}\right)$. **[0,5 т.]**

б) В първоначалния момент големината на силата, която е приложена в точката на окачване на нишката, е отново равна на $T = \frac{1}{2}\left(mg + \frac{4kq^2}{9\ell^2}\right)$, **[0,5 т.]** тъй като нишката е безмасова. Когато топчето е в най-долно положение, трябва да анализираме неговата динамика по вертикално направление. Топчето се движи по окръжност, така че сумарната сила, която му действа, трябва да е равна на ma_{n}, където $a_{\mathrm{n}} = \frac{v^2}{\ell}$ е центростремителното ускорение (v е скоростта на топчето). **[0,5 т.]** Така за големината на силата на опън на нишката се получава: $T' = G + F'_E + ma_\mathrm{n}$, **[0,5 т.]** като големината на електростатичната сила $F'_E = \frac{4kq^2}{\ell^2}$. **[0,5 т.]** За да намерим скоростта на топчето в най-долно положение, ще използваме закона за запазване на енергията. Като се има предвид, че силата на опън не извършва работа върху топчето, получаваме $v = \sqrt{g\ell + \frac{4kq^2}{3m\ell}}$. **[1 т.]** Големината на центростремителното ускорение е $a_\mathrm{n} = g + \frac{4kq^2}{3m\ell^2}$. **[0,5 т.]** Окончателно получаваме, че $T' = 2mg + \frac{16kq^2}{3\ell^2}$. **[0,5 т.]**

в) Резултантната сила, която действа върху топчето при движението му, е тангенциална на траекторията му и има квазиеластичен характер. **[0,5 т.]** Нейната големина е $F \approx -mg\sin\alpha - \frac{kq^2}{(2d+\ell-2\ell\cos\alpha)^2}\sin\alpha$. **[1 т.]** Като се използват свойствата на тригонометричните функции за малки ъгли, се получава $F \approx -\left(mg + \frac{4kq^2}{\ell^2}\right)\sin\alpha$. **[1 т.]** Големината на силата може да се представи по следния начин: $F \approx -\left(\frac{mg}{\ell} + \frac{4kq^2}{\ell^3}\right)x$, **[0,5 т.]** където x е перпендикулярното отклонение на топчето от вертикалата, минаваща през точката на окачване на нишката. За честотата се получава $\nu = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\ell} + \frac{4kq^2}{m\ell^3}} \approx 0{,}77\ \mathrm{Hz}$. **[1 т.]**

<u>Задача 3</u>. Движеща се дифракционна решетка.

а) Константата на решетката е $d = \frac{1}{500}\ \mathrm{mm} = 2\ \mu\mathrm{m}$. **[1 т.]**

б) От формулата за дифракционна решетка $d\sin\theta = m\lambda$ **[0,5 т.]** следва, че $m = \frac{d\sin\theta}{\lambda} \leq \frac{d}{\lambda} \approx 3{,}8$, **[0,5 т.]** т.е. максималният порядък е трети. **[0,5 т.]**

в) От формулата за дифракционна решетка следва, че $\frac{xd}{\sqrt{x^2+l^2}} = m\lambda$, **[0,5 т.]** където x е разстоянието между нулевия и m-тия максимум върху екрана, а l е разстоянието между екрана и дифракционната решетка. Получава се, че $x = \frac{m\lambda l}{\sqrt{d^2-m^2\lambda^2}} = \frac{m\lambda(l_0+vt)}{\sqrt{d^2-m^2\lambda^2}}$, **[1 т.]** откъдето за първия максимум следва, че $u = \frac{\lambda v}{\sqrt{d^2-\lambda^2}}$ и $v = \frac{u\sqrt{d^2-\lambda^2}}{\lambda} \approx 3{,}6\ \mathrm{cm/s}$. **[1 т.]**

г) Времето $t = \left(\frac{3\lambda l_0}{\sqrt{d^2-9\lambda^2}} - \frac{2\lambda l_0}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}}\right)\Big/\frac{2\lambda v}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}} = \left(\frac{3\lambda l_0}{\sqrt{d^2-9\lambda^2}} - \frac{2\lambda l_0}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}}\right)\Big/\frac{2u\sqrt{d^2-\lambda^2}}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}} \approx 2{,}96\ \mathrm{s}$. **[2 т.]**

д) Разстоянието между втория и нулевия максимум е $x_2 = \frac{2\lambda l}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}}$. **[0,5 т.]** По посока на движението на дифракционната решетка действа проекция на силата на тежестта с големина $mg\sin\alpha$, **[0,5 т.]** а в противоположната посока действа сила на триене с големина $kmg\cos\alpha$, **[0,5 т.]** където m е масата на решетката. Движението е равноускорително надолу по равнината с ускорение $g(\sin\alpha - k\cos\alpha)$. **[0,5 т.]** Така се получава $a = \frac{2\lambda g(\sin\alpha - k\cos\alpha)}{\sqrt{d^2-4\lambda^2}} \approx 2{,}5\ \mathrm{m/s^2}$. **[1 т.]**

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 - 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Специална тема

Задача 1. Монте Карло симулация на Брауново движение.

Брауновото движение е хаотичното движение на макрочастица от твърдо вещество (с размери от порядъка на микрометър) под действие на некомпенсираните удари от страна на околните атоми или молекули на газа или течността, в която тя е потопена. През 1905 г. Айнщайн е получил, че средноквадратичното преместване $\sqrt{\overline{l^2}}$ на една частица е пропорционално на времето, за което то е измерено, на някаква степен *к*, т.е. $\sqrt{\overline{l^2}} = c.t^k$. Константата c зависи от температурата на средата, радиуса на частицата и вискозитета на газа или течността. Средноквадратичното преместване $\sqrt{\overline{l^2}}$ се дефинира така: $\sqrt{\overline{l^2}} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} {l_i}^2}{N}}$, където l_i е преместването при i-тото измерване, а N е броят на измерванията.

Тук ще намерите опитно неизвестната степен *к* като използвате т. нар. Монте Карло симулация. За целта ще изследвате случайното движение на обект по възлите на една квадратна решетка и ще получите как зависи средноквадратичното преместване $\sqrt{\overline{l^2}}$ от броя стъпки m (в този модел m има смисъл на времето). Разполагате с квадратна решетка (на отделен лист), обект (стотинка или пионка), зарче и чашка, в която да го хвърляте. Тръгвате всеки път от центъра на решетката (0,0). На всяко хвърляне на зарчето правите случаен ход (нагоре, надолу, наляво или надясно) до съседен възел.

а) Опишете как избирате да превръщате показанието на зарчето в посока (нагоре, надолу, наляво или надясно)? **[1 т.]**

б) Хвърляйки зарчето извършете 10 последователни случайни хода с обекта като записвате всичките му 10 положения. Повторете това 10 пъти. Нанесете резултатите в предоставената ви таблица. Предварително помислете как да ги нанесете, за да ги обработвате после най-лесно (разполагате само с една резервна таблица). **[3 т.]**

в) Пресметнете средноквадратичното преместване $\sqrt{\overline{{l_m}^2}}$ за всяка стойност m на броя стъпки (m = 1, 2, 3,..., 10). Табулирайте тази зависимост отделно. **[1 т.]**

г) Ако предположите, че зависимостта $\sqrt{\overline{{l_m}^2}} = f(m)$ е от типа $\sqrt{\overline{{l_m}^2}} = c.m^k$, начертайте графиката на тази зависимост, използвайки такива променливи, че лесно да намерите графично неизвестната степен *к* и константата *c*. Разстоянието между съседни възли приемете за единица. **[3 т.]**

д) Изчислете от графиката неизвестната степен *к*. **[1.5 т.]**

е) Изчислете от графиката константата *c*. **[0.5 т.]**

Задача 2. Пренос на топлина през прозорец.

Преносът на топлина от по-топли към по-студени части на едно вещество се нарича топлопроводимост. Ако в направлението x температурата T с променя с ΔT при промяна на координатата с Δx, то преминалото количество топлина ΔQ за интервал време Δt през площ ΔS, перпендикулярна на x, е $\frac{\Delta Q}{\Delta S \Delta t} = -\chi \frac{\Delta T}{\Delta x}$. χ се нарича коефициент на топлопроводност на веществото.

а) Стая има един прозорец от единично стъкло с дебелина d = 4 mm и площ S = 2 m^2. Навън температурата на въздуха е T_{out} = 0 ^{o}C. Коефициентът на топлопроводност на стъклото е χ_{gl}= 0,96 $\frac{W}{m.K}$. Изчислете с каква топлинна мощност P_1 електрическа печка трябва да нагрява въздуха в стаята, така че температурата вътре да е постоянна и да е равна на T_{in} = 20 °C. Топлопроводимостта на стените се пренебрегва. **[1 т.]**

б) Нека в този случай стаята има прозорец от стъклопакет със същата площ, съдържащ две еднакви стъкла, всяко с дебелина d = 4 mm и въздушна междина между тях с широчина l = 16 mm. Приемете, че въздухът в стъклопакета е неподвижен. Коефициентът на топлопроводност на въздуха е χ_{air}= 0,024 $\frac{W}{m.K}$. Изчислете с каква топлинна мощност P_2 електрическа печка трябва да нагрява въздуха в стаята, така че температурата вътре да е постоянна и да е равна на T_{in} = 20 °C. **[3 т.]**

в) Изчислете температурата T_1 на външната страна на вътрешното стъкло и температурата T_2 на вътрешната страна на външното стъкло. **[1 т.]**

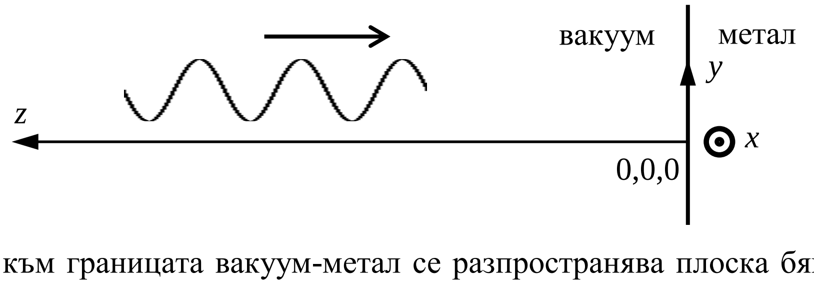
г) Ако за газове коефициентът на топлопроводност χ зависи от техни други характеристики така: $\chi = const.c_V{}^{\alpha}.\rho^{\beta}.\bar{v}^{\gamma}.\lambda^{\delta}$, където $const$ е число, c_V е специфичният топлинен капацитет на газа при постоянен обем, ρ е плътността му, $\bar{v}$ е средната скорост на молекулите му, а λ е средната им дължина на свободен пробег, то намерете неизвестните степени α, β, γ и δ. **[2 т.]**

д) Използвайки получения резултат от предното подусловие и предполагайки, че благородните газове при нормални условия добре се описват от модела на идеалния газ, изчислете коефициента на топлопроводност на газа криптон χ_{Kr} при стайни условия. Дадени стойности: коефициент на топлопроводност на газа аргон χ_{Ar} = 17,7.10^{-3} W/m.K (при стайни условия), моларна маса на газа аргон μ_{Ar}= 39,9 g/mol, моларна маса на газа криптон μ_{Kr}= 83,8 g/mol, атомен радиус на аргона r_{Ar} = 188 pm, атомен радиус на криптона r_{Kr} = 202 pm. Какъв ще е ефектът върху преноса на топлина през стъклопакета, ако въздухът в междината между двете стъкла се замени с газ аргон (или газ криптон)? **[3 т.]**

<u>Задача 3.</u> Стояща електромагнитна вълна и микровълнова печка. (Задачата се състои от две независими подусловия)

А. Стояща електромагнитна вълна

Известно е, че в свободно пространство (вакуум) плоската бягаща електромагнитна вълна е напречна, векторите на посоката на разпространение, на интензитета на електричното поле и на индукцията на магнитното поле образуват дясна тройка и последните два вектора трептят във фаза. Амплитудите им са свързани така: $E_0 = cB_0$, където c = 3.10^8 m/s е скоростта на светлината. Ако обаче една бягаща вълна пада перпендикулярно върху метал (идеален проводник), тя се отразява напълно и в обратна посока започва да се разпространява втора бягаща вълна. Тези две бягащи в противоположни посоки вълни образуват стояща вълна. От факта, че отразяващата повърхност е проводяща, следва че тангенциалната компонента на вектора на интензитета на електричното поле на границата вакуум-метал трябва да е нула (това са т. нар. гранични условия). Това налага характерни ограничения върху разпределението на електричното и магнитното поле на възникващата стояща вълна.



Нека надясно към границата вакуум-метал се разпространява плоска бягаща линейно-поляризирана монохроматична вълна с интензитет на електричното поле $\overrightarrow{E_1} =$

$(E_{1x}, 0{,}0)$, $E_{1x} = E_{10}\cos(kz + \omega t + \varphi)$, където $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\omega = 2\pi\nu$, λ – дължина на вълната, ν – честота на вълната. Изразете чрез дадените параметри E_{10}, k, ω и φ:

а) вектора на магнитната индукция $\overrightarrow{B_1}$ на падащата вълна **[0.5 т.]**

б) вектора на интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E_2}$ на отразената вълна **[0.5 т.]**

в) вектора на магнитната индукция $\overrightarrow{B_2}$ на отразената вълна **[0.5 т.]**

г) вектора на интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E_3}$ на стоящата вълна **[1 т.]**

д) вектора на магнитната индукция $\overrightarrow{B_3}$ на стоящата вълна **[1 т.].**

е) Къде се намират възлите на електричното и на магнитното поле на стоящата вълна? **[0.5 т.]**

ж) Колко е стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време, когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е максимална? **[0.5 т.]**

з) Колко е стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време, когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е нула? **[0.5 т.]**

Б) Микровълнова печка.

В куха метална правоъгълна призма, каквато е пещта на микровълновата печка, могат да съществуват различни стоящи електромагнитни вълни с различно разпределение на техните електрични и магнитни полета. По-нататък ще описваме само електричното им поле. Нека размерите на пещта са a = 29 cm (по x), b = 29 cm (по y) и h = 19 cm (по z). Центърът на координатната система е избран в единия от ъглите на пещта. Граничните условия налагат ограничения върху разпределението на електричното поле и за стояща електромагнитна вълна то трябва да има следния вид:

$$\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right),$$

$$E_x = E_{0x}\cos\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi l z}{h}\right)\cos(\omega t + \varphi),$$

$$E_y = E_{0y}\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\cos\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\sin\left(\frac{\pi l z}{h}\right)\cos(\omega t + \varphi),$$

$$E_z = E_{0z}\sin\left(\frac{\pi m x}{a}\right)\sin\left(\frac{\pi n y}{b}\right)\cos\left(\frac{\pi l z}{h}\right)\cos(\omega t + \varphi).$$

Числата m, n и l са цели, а $\omega = 2\pi\nu$. Съответно тази стояща вълна се нарича мод (m, n, l). Резонансната честота ν и числата m, n и l трябва да удовлетворяват следното равенство $\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 + \left(\frac{l}{h}\right)^2 = 4\left(\frac{\nu}{c}\right)^2$

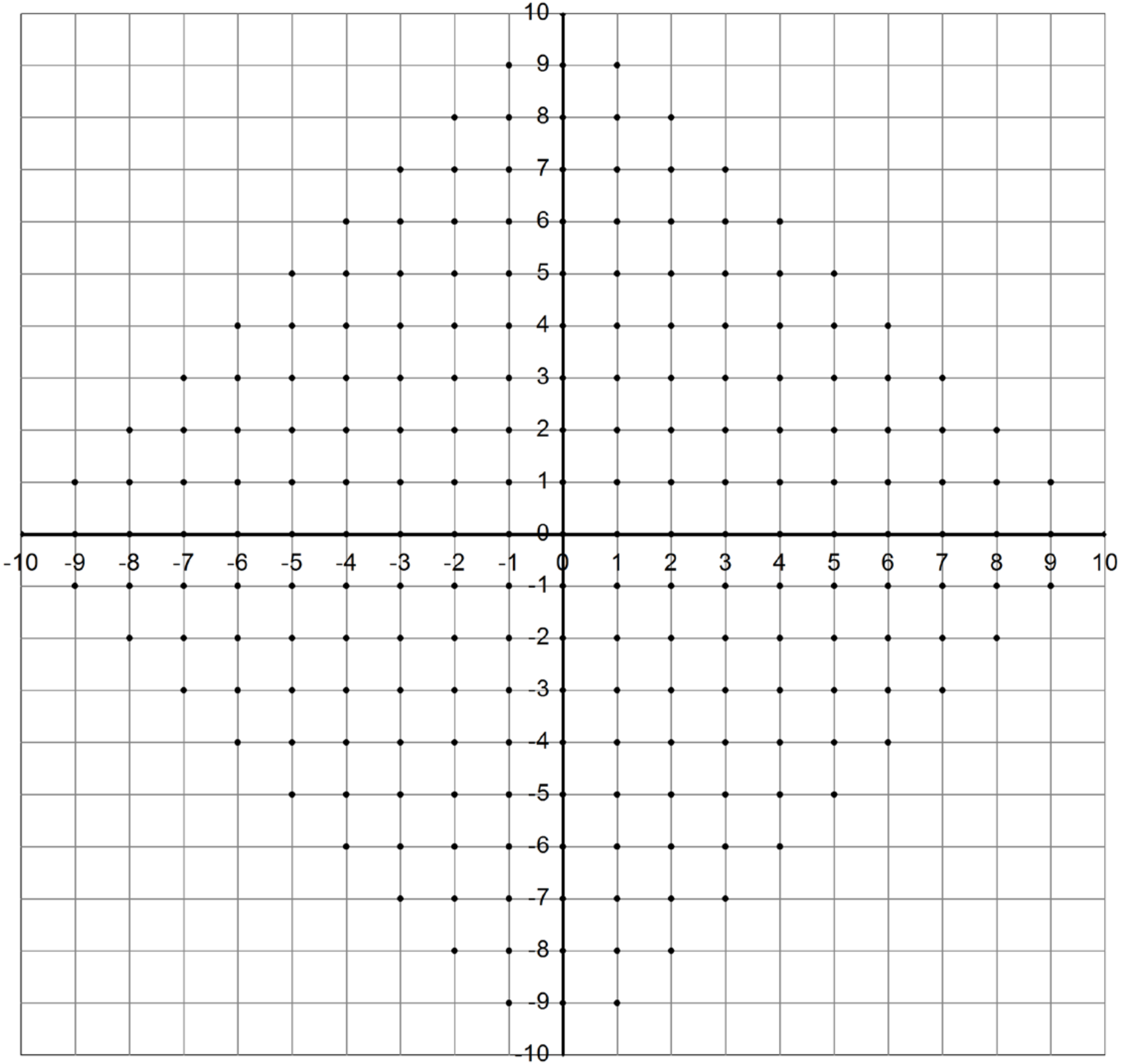
а) Кой мод (m, n, l) има минимална честота ν? **[0.5 т.]** Изчислете нейната стойност. **[0.5 т.]** Опишете (или нарисувайте) разпределението на електричното поле в този мод. **[0.5 т.]**

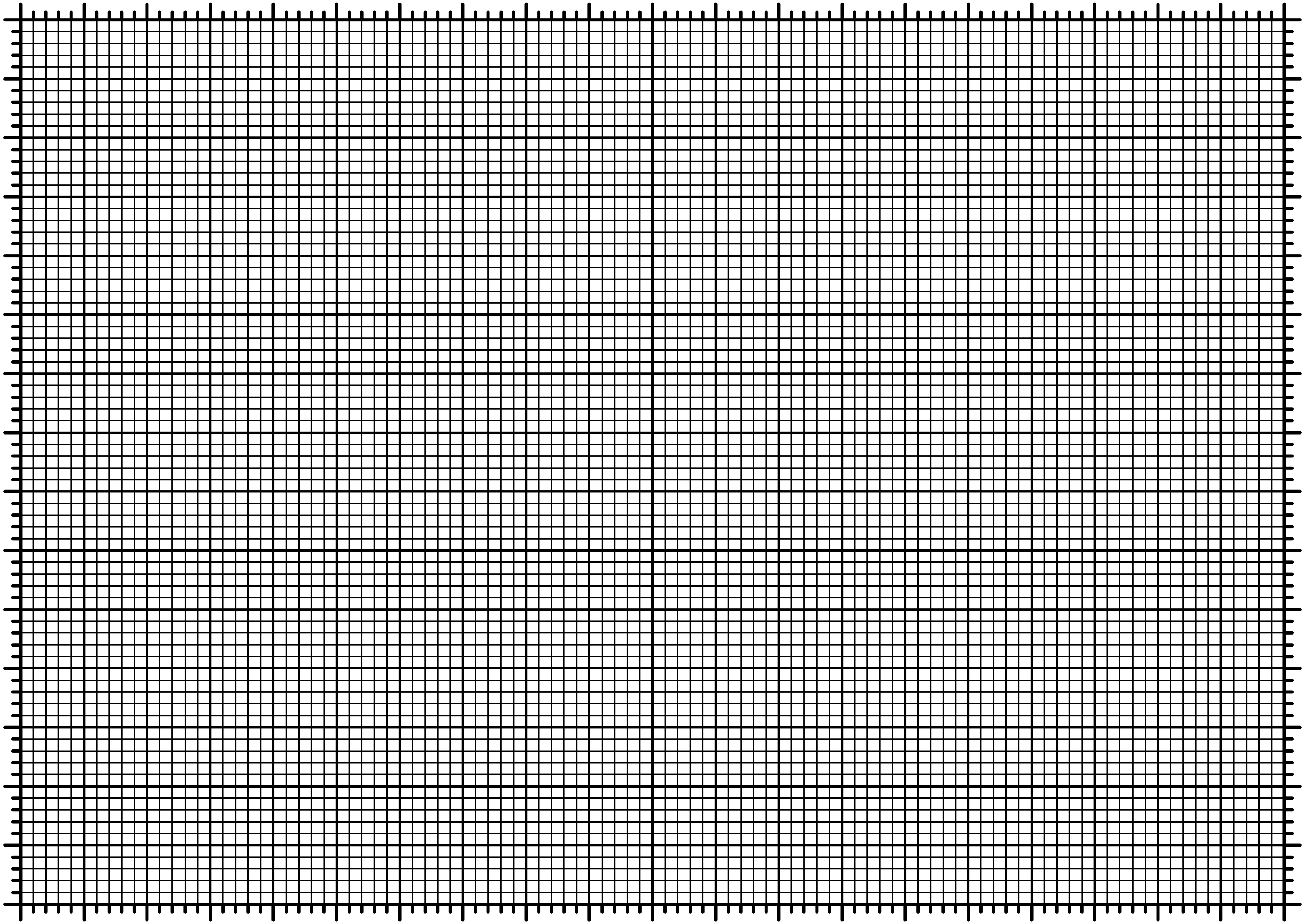
б) Източникът на микровълновото лъчение в микровълновата печка е магнетрон, излъчващ електромагнитна вълна с честота ν = 2,450 GHz. Намерете модовете (m, n, l), чиито резонансни честоти лежат в интервала (2,400 GHz, 2,500 GHz) и изчислете тези честоти с точност 5 знака. **[2 т.]** Кой от тях има честота, най-близка до тази на магнетрона (т.е. е най-вероятно този мод да се възбуди в пещта)? **[0.5 т.]**

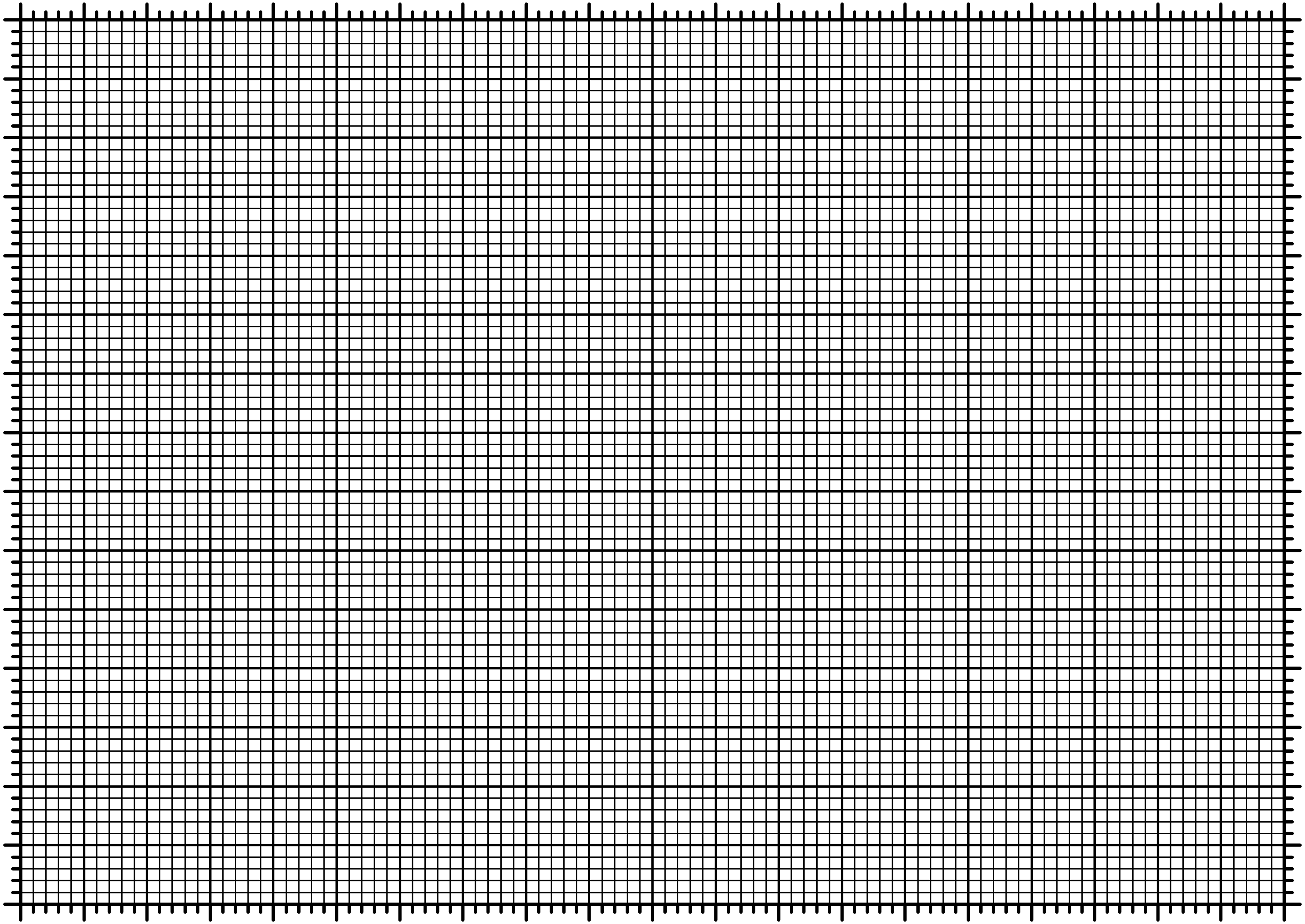
в) Опитът на Винер показва, че стоящата електромагнитна вълна отдава своята енергия на поглъщащо вещество най-много там, където са върховете на нейното електрично поле. Ако в микровълновата печка се е възбудил само модът с честота, най-близка до тази на магнетрона и неговото електрично поле е от типа $\vec{E} = (0{,}0, E_z)$, къде трябва да поставим тънка пица, за да се стопли най-бързо? **[0.5 т.]** Къде ще се стопли най-бавно? **[0.5 т.]**

Полезна математика: $\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$;

$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)$; $\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$


10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-10 -9 -8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10





МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
НАЦИОНАЛНО ЕСЕННО СЪСТЕЗАНИЕ ПО ФИЗИКА
14 - 15 ноември 2015 г., Велико Търново
Специална тема, Решения и указания

Задача 1. Монте Карло симулация на Брауново движение.

а) Възможен вариант: показание на зарчето – посока на движение; 1 – нагоре, 2 – надясно, 3 – надолу, 4 – наляво, при 5 и 6 се хвърля наново. **[1 т.]**

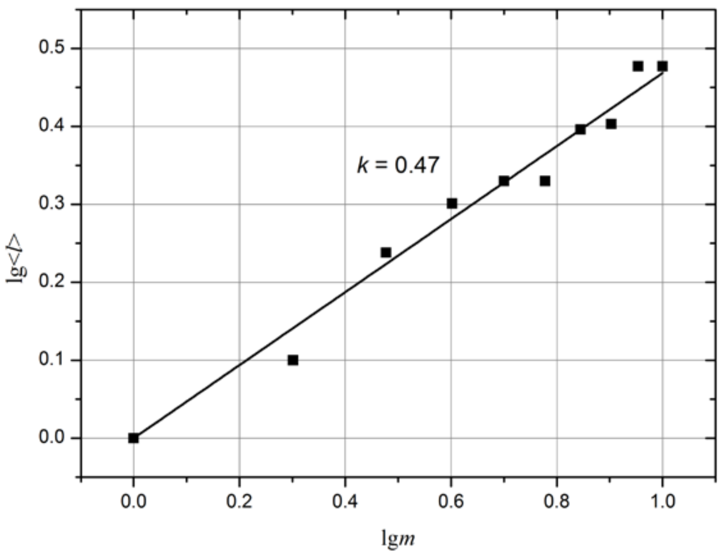
б) Примерни данни са дадени в таблицата. **[3 т.]**

в) Зависимостта на $\sqrt{\overline{l_m^{\ 2}}}$ от броя стъпки m също е дадена в таблицата. **[1 т.]**

г) Ако зависимостта $\sqrt{\overline{l_m^{\ 2}}} = f(m)$ е от типа $\sqrt{\overline{l_m^{\ 2}}} = c.m^k$, начертавайки графиката й в двойно-логаритмичен мащаб $\lg\left(\sqrt{\overline{l_m^{\ 2}}}\right) = \lg(c) + k.\lg(m)$, тя ще е линейна функция с наклон k и свободен член $\lg(c)$. Представените данни са начертани на фигурата. **[3 т.]**

д) От графиката за неизвестната степен се изчислява κ = 0,47. За Брауновото движение теорията предсказва κ = 0,5. **[1.5 т.]**

е) От графиката $\lg(c) = 0$, следователно константата c = 1. **[0.5 т.]**



N_{1i}	x_i,y_i	l_{1i}^2	N_{2i}	x_i,y_i	l_{2i}^2	N_{3i}	x_i,y_i	l_{3i}^2	N_{4i}	x_i,y_i	l_{4i}^2	N_{5i}	x_i,y_i	l_{5i}^2	m	$\sqrt{\overline{l_m^2}}$
1	1,0	1	1	0,0	0	1	0,-1	1	1	0,0	0	1	1,0	1	**1**	**1.00**
2	-1,0	1	2	0,0	0	2	-1,0	1	2	0,0	0	2	-1,0	1	**2**	**1.26**
3	1,0	1	3	1,1	2	3	2,1	5	3	2,2	8	3	2,3	13	**3**	**1.73**
4	0,-1	1	4	0,0	0	4	0,-1	1	4	-1,-1	2	4	-1,0	1	**4**	**2.00**
5	-1,0	1	5	-2,0	4	5	-2,1	5	5	-2,0	4	5	-2,-1	5	**5**	**2.14**
6	0,-1	1	6	-1,-1	2	6	-2,-1	5	6	-2,-2	8	6	-3,-2	13	**6**	**2.14**
7	-1,0	1	7	0,0	0	7	1,0	1	7	0,0	0	7	0,1	1	**7**	**2.49**
8	-1,0	1	8	-1,-1	2	8	-1,0	1	8	-2,0	4	8	-1,0	1	**8**	**2.53**
9	0,1	1	9	0,2	4	9	-1,2	5	9	-1,3	10	9	0,3	9	**9**	**3.00**
10	0,1	1	10	-1,1	2	10	-1,2	5	10	0,2	4	10	0,1	1	**10**	**3.00**
	$\overline{l_1^2}$= 1,0			$\overline{l_2^2}$= 1,6			$\overline{l_3^2}$= 3,0			$\overline{l_4^2}$= 4,0			$\overline{l_5^2}$= 4,6			
N_{6i}	x_i,y_i	l_{6i}^2	N_{7i}	x_i,y_i	l_{7i}^2	N_{8i}	x_i,y_i	l_{8i}^2	N_{9i}	x_i,y_i	l_{9i}^2	N_{10i}	x_i,y_i	l_{10i}^2	$\lg m$	$\lg\sqrt{\overline{l_m^2}}$
1	1,-1	2	1	0,-1	1	1	1,-1	2	1	1,0	1	1	2,0	4	**0.000**	**0.000**
2	-1,1	2	2	-1,0	1	2	0,0	0	2	0,1	1	2	0,0	0	**0.301**	**0.100**
3	1,3	10	3	1,4	17	3	1,5	26	3	1,6	37	3	1,7	50	**0.477**	**0.238**
4	0,0	0	4	1,0	1	4	2,0	4	4	2,1	5	4	1,1	2	**0.602**	**0.301**
5	-1,-1	2	5	-1,0	1	5	-1,-1	2	5	-2,-1	5	5	-1,-1	2	**0.700**	**0.330**
6	-3,1	10	6	-4,1	17	6	-3,-1	10	6	-3,-2	13	6	-3,-1	10	**0.778**	**0.330**
7	-1,1	2	7	-1,0	1	7	-1,1	2	7	0,1	1	7	0,0	0	**0.845**	**0.396**
8	0,0	0	8	1,0	1	8	0,0	0	8	1,0	1	8	1,-1	2	**0.903**	**0.403**
9	0,4	16	9	1,4	17	9	0,4	16	9	-1,4	17	9	-1,3	10	**0.954**	**0.477**
10	1,1	2	10	2,1	5	10	2,0	4	10	3,0	9	10	3,-1	10	**1.000**	**0.477**
	$\overline{l_6^2}$= 4,6			$\overline{l_7^2}$= 6,2			$\overline{l_8^2}$= 6,4			$\overline{l_9^2}$= 9,0			$\overline{l_{10}^2}$= 9,0			

Задача 2. Пренос на топлина през прозорец.

а) Уравнението за топлопроводността дава, че $P_1 = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{\mathrm{gl}} \frac{T_{\mathrm{in}} - T_{\mathrm{out}}}{d} S$ = **[0.5 т.]** $0{,}96 \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{mK}} \frac{20\ \mathrm{degC} - 0\ \mathrm{degC}}{4.10^{-3}\mathrm{m}}$ $2\mathrm{m}^2$ = 9600 W **[0.5 т.]**

б) Тъй като температурата на дадено място не се променя, то количеството топлина, преминало през всяка равнина, успоредна на стъклата на прозореца, ще е една и съща. Нека температурата на външната страна на вътрешното стъкло е T_1, а температурата на вътрешната страна на външното стъкло е T_2. Тогава

$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{\mathrm{gl}} \frac{T_{\mathrm{in}} - T_1}{d}.S$, $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{\mathrm{air}} \frac{T_1 - T_2}{l}.S$, $\frac{\Delta Q}{\Delta t} = \chi_{\mathrm{gl}} \frac{T_{\mathrm{out}} - T_2}{d}.S$. **[1 т.]** Тези три равенства могат да се запишат и така: $\frac{\Delta Q d}{\Delta t \chi_{\mathrm{gl}} S} = T_{\mathrm{in}} - T_1$, $\frac{\Delta Q l}{\Delta t \chi_{\mathrm{air}} S} = T_1 - T_2$, $\frac{\Delta Q d}{\Delta t \chi_{\mathrm{gl}} S} = T_2 - T_{\mathrm{out}}$. Събирайки ги почленно, се получава $\frac{\Delta Q}{\Delta t S}\left(\frac{d}{\chi_{\text{gl}}}+\frac{l}{\chi_{\text{air}}}+\frac{d}{\chi_{\text{gl}}}\right)=T_{\text{in}}-T_{\text{out}}$, откъдето $\frac{\Delta Q}{\Delta t}=\frac{T_{\text{in}}-T_{\text{out}}}{\frac{2d}{\chi_{\text{gl}}}+\frac{l}{\chi_{\text{air}}}}S$ = **[1 т.]** $\frac{20\text{K}.2\text{m}^2}{\frac{2.4.10^{-3}\text{m}}{0{,}96\frac{\text{W}}{\text{mK}}}+\frac{16.10^{-3}\text{m}}{0{,}024\frac{\text{W}}{\text{mK}}}}$ $\approx$ 59 W. **[1 т.]**

в) Температурата на външната страна на вътрешното стъкло е $T_1=T_{\text{in}}-\frac{\Delta Q}{\Delta t S}\frac{d}{\chi_{\text{gl}}}$ ≈19,88 $^{\text{o}}$C. **[0.5 т.]** Температурата на вътрешната страна на външното стъкло е $T_2=T_{\text{out}}+\frac{\Delta Q}{\Delta t S}\frac{d}{\chi_{\text{gl}}}$ ≈ 0,12 $^{\text{o}}$C. **[0.5 т.]**

г) Съответно размерността на коефициента на топлопроводност χ е $[\chi]=\frac{\text{W}}{\text{m.K}}=\frac{\text{kgm}}{\text{s}^3\text{K}}$, **[0.25 т.]** на специфичния топлинен капацитет на газа при постоянен обем $[c_V]=\frac{\text{J}}{\text{kg.K}}=\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2.\text{K}}$, **[0.25 т.]** на плътността му е $[\rho]=\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, на средната скорост на молекулите му е $[\bar{v}]=\frac{\text{m}}{\text{s}}$, и на средната им дължина на свободен пробег е $[\lambda]=\text{m}$. Следователно $\text{kg}^1\text{m}^1\text{s}^{-3}\text{K}^{-1}=\text{m}^{2\alpha}\text{s}^{-2\alpha}\text{K}^{-\alpha}.\text{kg}^{\beta}\text{m}^{-3\beta}.\text{m}^{\gamma}\text{s}^{-\gamma}.\text{m}^{\delta}$. **[0.25 т.]** Така получаваме, че $1=\beta$, $1=2\alpha-3\beta+\gamma+\delta$, $-3=-2\alpha-\gamma$, $-1=-\alpha$. **[0.25 т.]** Тези уравнения имат единствено решение $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$. **[1 т.]** Така $\chi=const.c_v.\rho.\bar{v}.\lambda$.

д) Нека изразим коефициента на топлопроводност на идеален газ чрез дадените величини. Специфичният топлинен капацитет c_V на газа зависи от моларния капацитет C_V така: $c_V=\frac{C_V}{\mu}=\frac{iR}{2\mu}$, **[0.5 т.]** където i = 3 (степени на свобода на едноатомен газ), а R е универсалната газова константа. Плътността на газа е $\rho=\frac{p\mu}{RT}$, **[0.5 т.]** където p е налягането, а T – температурата. Средната скорост на атомите е $\bar{v}=\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}$. **[0.5 т.]** Средната дължина на свободен пробег е от порядъка на $\frac{1}{nS}$, **[0.5 т.]** където n е атомната концентрация на газа, а S – сечението на молекулите. Следователно $\lambda\approx\frac{1}{nS}=\frac{RT}{pN_A}\frac{4}{\pi d^2}$, където N_A е числото на Авогадро, а d е диаметърът на атомите. Комбинирайки горните фомули получаваме, че $\chi=const.\frac{iR}{2\mu}.\frac{p\mu}{RT}.\sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.\frac{RT}{pN_A}\frac{4}{\pi d^2}\propto\sqrt{\frac{T}{\mu}}.\frac{1}{d^2}$. **[0.25 т.]** При една и съща температура $\frac{\chi_{\text{Ar}}}{\chi_{\text{Kr}}}=\sqrt{\frac{\mu_{\text{Kr}}}{\mu_{\text{Ar}}}}\left(\frac{d_{\text{Kr}}}{d_{\text{Ar}}}\right)^2$, откъдето $\chi_{\text{Kr}}=\chi_{\text{Ar}}\sqrt{\frac{\mu_{\text{Ar}}}{\mu_{\text{Kr}}}}\left(\frac{d_{\text{Ar}}}{d_{\text{Kr}}}\right)^2\approx$ 10,5.10^{-3} W/m.K (експериментално измерената стойност е 9,43.10^{-3} W/m.K). **[0.25 т.]** Сравнявайки коефициентите на топлопроводност на въздуха, аргона и криптона, заключаваме, че преносът на топлина през стъклопакета ще бъде най-голям при стъклопакет, пълен с въздух, с около една трета по-малък при стъклопакет, пълен с аргон и повече от два пъти по-малък при стъклопакет пълен с криптон. **[0.5 т.]**

Задача 3. Стояща електромагнитна вълна и микровълнова печка.

А. Стояща електромагнитна вълна

а) Тъй като векторите на посоката на разпространение, на интензитета $\vec{E}$ на електричното поле и на индукцията $\vec{B}$ на магнитното поле образуват дясна тройка и последните два вектора трептят във фаза, то магнитната индукция $\overrightarrow{B_1}$ на падащата вълна е $\overrightarrow{B_1}=(0,B_{1y},0)$, $B_{1y}=-B_{10}\cos(kz+\omega t+\varphi)=-\frac{E_{10}}{c}\cos(kz+\omega t+\varphi)$. **[0.5 т.]**

Подусловията б), в), г) и д) ще се решат заедно. Тъй като тангенциалната компонента на вектора на интензитета на електричното поле на границата вакуум-метал трябва да е нула, то отразената вълна е също линейно-поляризирана със същата ориентация и амплитуда на вектора на интензитета на електричното поле, но с неизвестна фаза ψ, $\overrightarrow{E_2} = (E_{2x}, 0{,}0)$, $E_{2x} = E_{10}\cos(kz - \omega t + \psi)$. Векторът на магнитната индукция $\overrightarrow{B_2}$ на отразената вълна ще бъде $\overrightarrow{B_2} = (0, B_{2y}, 0)$, $B_{2y} = B_{20}\cos(kz - \omega t + \psi)$ $= \frac{E_{10}}{c}\cos(kz - \omega t + \psi)$. Векторът на интензитета на електричното поле $\overrightarrow{E_3}$ на стоящата вълна е $\overrightarrow{E_3} = \overrightarrow{E_1} + \overrightarrow{E_2} = (E_{3x}, 0{,}0)$, $E_{3x} = E_{1x} + E_{2x} = E_{10}\cos(kz + \omega t + \varphi) + E_{10}\cos(kz - \omega t + \psi) = 2E_{10}\cos\left(kz + \frac{\varphi+\psi}{2}\right).\cos\left(\omega t + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)$. Векторът на индукцията на магнитното поле $\overrightarrow{B_3}$ на стоящата вълна е $\overrightarrow{B_3} = \overrightarrow{B_1} + \overrightarrow{B_2} = (0, B_{3y}, 0)$, $B_{3y} = B_{1y} + B_{2y} = -\frac{E_{10}}{c}\cos(kz + \omega t + \varphi) + \frac{E_{10}}{c}\cos(kz - \omega t + \psi) = -2\frac{E_{10}}{c}\sin\left(kz + \frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(-\left(\omega t + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)\right) = 2\frac{E_{10}}{c}\sin\left(kz + \frac{\varphi+\psi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \frac{\varphi-\psi}{2}\right)$. От граничните условия на границата вакуум-метал следва, че $E_{3x}(z=0) \equiv 0$, следователно $\frac{\varphi+\psi}{2} = \frac{(2n+1)\pi}{2}$, откъдето $\psi = (2n+1)\pi - \varphi$ (n – цяло число). Вече знаейки фазата ψ, окончателно можем да определим вида на всички вектори:

$E_{2x} = E_{10}\cos(kz - \omega t + (2n+1)\pi - \varphi) = -E_{10}\cos(kz - \omega t - \varphi)$, **[0.5 т.]**

$B_{2y} = \frac{E_{10}}{c}\cos(kz - \omega t + \varphi - (2n+1)\pi) = -\frac{E_{10}}{c}\cos(kz - \omega t - \varphi)$, **[0.5 т.]**

$E_{3x} = 2E_{10}\cos\left(kz + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \varphi - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = -2E_{10}\sin(kz)\sin(\omega t + \varphi)$, **[1 т.]**

$B_{3y} = 2\frac{E_{10}}{c}\sin\left(kz + \frac{(2n+1)\pi}{2}\right)\sin\left(\omega t + \varphi - \frac{(2n+1)\pi}{2}\right) = -2\frac{E_{10}}{c}\cos(kz)\cos(\omega t + \varphi)$. **[1 т.]**

е) Възлите на стоящата вълна на електричното поле се намират в точки с координати $z = 0, \frac{\lambda}{2}, 2\frac{\lambda}{2}, \ldots, n\frac{\lambda}{2}, \ldots$ (n – цяло число). Възлите на стоящата вълна на магнитното поле се намират в точки с координати $z = \frac{\lambda}{4}, 3\frac{\lambda}{4}, \ldots, (2n+1)\frac{\lambda}{4}, \ldots$ (n – цяло число). **[0.5 т.]**

ж) Когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е максимална, стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време е нула **[0.5 т.]**

з) Когато стойността на електричното поле във върховете на неговата стояща вълна е нула, стойността на магнитното поле във върховете на неговата стояща вълна в момента време е $2\frac{E_{10}}{c}$ **[0.5 т.]**

Б) Микровълнова печка.

а) Модът с минимална честота е (1,1,0) **[0.5 т.]** Честотата му е 0,7315 GHz. **[0.5 т.]** Електричното му поле има вектор от типа $\vec{E} = (0{,}0, E_z)$, E_z не зависи от z и има максимум в средата на пещта. **[0.5 т.]**

б) Проверявайки с различни цели числа, получаваме следните модове (някои от тях са „изродени“, т.е. със съвпадащи честоти, виж таблицата). **[2 т]** Най-близка честота до тази на магнетрона имат модовете (2,4,1) и (4,2,1), която е 2,4442 GHz. **[0.5 т.]**

Тип						ν, GHz
m	n	l	m	n	l	
1	0	3	0	1	3	2,4242
2	3	2	3	2	2	2,4436
2	4	1	4	2	1	2,4442
1	1	3				2,4788

в) За модовете (2,4,1) и (4,2,1) ако електричното поле е само с вертикална компонента, то е максимално при $z = 0$ и $z = h$. Следователно пицата трябва да се постави максимално ниско или максимално високо в пещта. **[0.5 т.]** Тъй като $E_z\left(z = \frac{h}{2}\right) = 0$, то пицата ще се стопли най-бавно, ако се постави на височина по средата на пещта. **[0.5 т.]**