

ОТГОВОРИ, КРАТКИ РЕШЕНИЯ И УПЪТВАНИЯ

1.	Г	11.	162	21.	В	31.	5	41.	А
2.	А	12.	А	22.	В	32.	135^0	42.	А
3.	Б	13.	Б	23.	36^0	33.	В	43.	В
4.	В	14.	Г	24.	Г	34.	Г	44.	10
5.	А	15.	В	25.	А	35.	Б	45.	8
6.	В	16.	Б	26.	Г	36.	18	46.	Б
7.	А	17.	А	27.	Г	37.	А	47.	146
8.	А	18.	Г	28.	Б	38.	В	48.	Б
9.	Г	19.	В	29.	А	39.	В	49.	32
10.	Б	20.	7	30.	40	40.	2	50.	Б

Задача 6.

В тази задача е важно да се използва неравенството на триъгълника, т.е. съображението, че сборът на две от страните в триъгълника е по-голям от третата страна. Оттук следва, че основата на триъгълника е 15 см.

Задача 14.

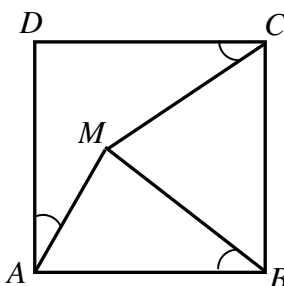
Ако $\angle ABL = x$, то $\angle ACB = \angle BLC = \angle BAC + \angle ABL = 54^0 + x$. Тогава, като използваме, че сумата от ъглите в $\triangle ABC$ е 180^0 , получаваме $54^0 + 2x + 54^0 + x = 180^0$. Оттук $x = 24^0$ и следователно $\angle ACB = 54^0 + 24^0 = 78^0$.

Задача 17.

Ако $\angle MAD = \alpha$, то $\angle MBA = 2\alpha$ и $\angle MCD = 5\alpha$. Тогава $\angle BAM = \angle BMA = 90^0 - \alpha$ и следователно $\triangle BAM$ е равнобедрен ($AB = MB$). Оттук заключаваме, че $\triangle BMC$ е също равнобедрен ($MB = BC$). Тогава $\angle BMC = \angle BCM = \frac{180^0 - (90^0 - 2\alpha)}{2} = 45^0 + \alpha$ и значи:

$$\angle BCD = 90^0 = \angle BCM + \angle MCD = 45^0 + \alpha + 5\alpha \Rightarrow \alpha = 7,5^0.$$

Следователно $\angle BMC = 45^0 + 7,5^0 = 52,5^0 = 52^030'$.



Задача 18.

Абсолютната стойност е по-голяма или равна на нула, откъдето следва, че най-малката стойност на израза се получава в случая, когато абсолютната стойност се анулира, т.е. при $x = -3$.

Задача 21.

Ако годините на двамата са съответно $10a + b$ и $10b + a$, то:

$$(10a + b)^2 - (10b + a)^2 = (10a + b + 10b + a)(10a + b - 10b - a) = 9 \cdot 11(a + b)(a - b).$$

Полученото число се дели на 9 и на 11. От посочените отговори само единият притежава това свойство. Съществува пример, който реализира ситуацията: Мартин е на 14 години, а лелята е на 41 години.

Задача 22.

$$\left(1 + \frac{1}{4}\right)\left(1 - \frac{1}{5}\right) = \frac{5}{4} \cdot \frac{4}{5} = 1; \quad \left(1 + \frac{1}{6}\right)\left(1 - \frac{1}{7}\right) = \frac{7}{6} \cdot \frac{6}{7} = 1; \quad \dots \left(1 + \frac{1}{18}\right)\left(1 - \frac{1}{19}\right) = \frac{19}{18} \cdot \frac{18}{19} = 1 \quad \text{и}$$

$$\text{следователно стойността на произведението е равна } \left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 + \frac{1}{20}\right) = \frac{2 \cdot 21}{3 \cdot 20} = \frac{7}{10} = 0,7.$$

Задача 23.

Еднаквостта на триъгълниците AMC и BDC позволява определянето на $\angle BDC$. Имаме $\angle BDC = \angle AMC = 180^\circ - (60^\circ + 24^\circ) = 96^\circ$. Тъй като $\triangle MDC$ е равнобедрен, то $\angle BDM = \angle BDC - 60^\circ = 36^\circ$.

Задача 25.

Триъгълниците ABO , BOC и AOC са равнобедрени. Ако $\angle ACO = x$ и $\angle BCO = y$, то $2x + 2y + 2\angle BAO = 180^\circ$. Оттук намираме $x + y = 70^\circ$ и използваме, че $\angle ACB = x + y$.

Задача 28.

Последователно намираме $\angle ABC = 20^\circ$, $\angle LCB = 45^\circ$ (половината от правия ъгъл) и $\angle ALC = 65^\circ$ (външен ъгъл за $\triangle LBC$). Оттук $\angle HCL = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$.

Задача 30.

Ще измерваме времето в минути, а пътя – в метри. Нека скоростта на ескалатора е x , а тази на човека (при първата ситуация) е y . Тогава $(x + y) \cdot \frac{1}{2} = (x + 3y) \cdot \frac{1}{3}$. Оттук $y = \frac{x}{3}$

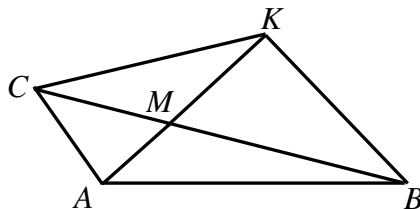
и понеже пътят е $\frac{x + y}{2}$, то търсеното време е $\frac{x + y}{2x} = \frac{x + \frac{x}{3}}{2x} = \frac{2}{3}$ минути = 40 секунди.

Задача 32.

Ако симетралата на отсечката AB пресича страната BC в точка N , то $60^\circ = \angle MNB = \angle MNA = \angle ANC$. Освен това $\angle BAN = 30^\circ$ и с помощта на условието от задачата заключаваме, че $\angle MAN = \angle CAN$. Тогава триъгълниците AMN и ACN са еднакви, откъдето $MN = CN$. В равнобедрения $\triangle CMN$ имаме, че $\angle MNC = 120^\circ$ и следователно $\angle MCB = 30^\circ$. Най-накрая $\angle BMC = 180^\circ - (30^\circ + \angle MBC) = 135^\circ$.

Задача 38.

Нека $MC = x$. Тогава $BM = 2x$. Да построим перпендикуляр BK от точката B към AM ($K \in AM$). От правоъгълния триъгълник MBK , който е с остър ъгъл 30° , получаваме $MK = \frac{1}{2}BM = x$. Оттук следва, че $\triangle MKC$ е равнобедрен. От този триъгълник



намираме, че $\angle MKC = 30^\circ \Rightarrow \angle BKC = 120^\circ$ и $\triangle CBK$ е равнобедрен с бедра $BK = CK$. Ако допуснем сега, че $KA < KB = KC$, то от $\triangle AKC$ имаме $\angle CAK > \angle ACK \Rightarrow \angle CAK > 75^\circ$. От друга страна, от $\triangle ABK$ имаме $\angle BAK > \angle ABK \Rightarrow \angle BAK > 45^\circ$. Но тогава ще следва, че $\angle BAC = \angle CAK + \angle BAK > 120^\circ$, което противоречи на условието на задачата. Аналогично може да се докаже, че не е възможно $KA > KB = KC$. Следователно $KA = KB = KC$ и като използваме ъглите на $\triangle ABK$, намираме $\angle ABC = 15^\circ$.

Задача 40.

Ако $LK \perp AO$ ($K \in AO$), то от свойството на ъглополовящата следва, че $LH = LK$. Тогава триъгълниците LKM и LHP са еднакви. Еднакви са и триъгълниците KLO и HLO . Следователно, ако $HP = KM = x$, то $OM + x = OP - x$ и оттук намираме $x = 2$ см.

Задача 41.

Твърденията на двама от братята (Алеко и Велин) са фактически едни и същи. Следователно те са или едновременно верни, или едновременно неверни. Това означава, че Алеко и Велин или едновременно казват истината, или едновременно лъжат. От условието на задачата следва, че Алеко и Велин лъжат. Само Борил казва истината и следователно Алеко е убил ламята.

Задача 42.

Сборът на първите 13 естествени числа е равен на 91, което е с единица по-малко от 92. Следователно единствената възможност е последното число 13 да се замени със следващото 14. Имаме $1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+14=92$, откъдето $1+14=15$.

Задача 43.

Ако един ден от седмицата през месец януари (както и за всеки друг месец с 31 дни) е на дата 1, 2 или 3, то този ден се среща общо 5 пъти. Това е така, защото $1+4.7=29 < 31$, $2+4.7=30 < 31$ и $3+4.7=31$. Само в случай, че този ден е на дата 4, 5, 6 или 7, той се среща общо 4 пъти в месеца (сега $a+4.7 > 31$ за $a=4, 5, 6$ или 7). От друга страна от вторник до събота има три други дни и следователно не е възможно вторник да е на дата 4, а събота да е на дата 7. Но от събота до вторник има два други дни и следователно единствената възможност е събота да се падне на дата 4, а вторник – съответно на дата 7. Сега лесно се съобразява, че 1 януари е в сряда.

Задача 46.

Триъгълниците AMO и CNO са еднакви по втори признак. Следователно $MO = NO$. Тогава $\triangle MBN$ е равнобедрен, защото BO е едновременно височина и медиана в него. Освен това $\angle BMN = 90^\circ - \angle ABD = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$. По този начин заключаваме, че $\triangle MBN$ е равностранен и периметърът му е равен на 6 пъти дължината на OM , т.е. на 18 см.

Задача 47.

Максимално възможният резултат е $30.4 = 120$. Понеже $29.4 = 116$, то всеки резултат, който е по-голям от 116, може да се постигне с 30 вярно решени задачи. Оттук следва, че резултатите 119, 118 и 117 не могат да се реализират (няма задача, която да бъде оценена с -1). От друга страна $28.4 = 112$. Тогава всеки резултат, който е по-голям от 112 и е по-малък от 116, може да се постигне с 29 вярно решени задачи. Сега има една задача, която може да бъде оценена с -1 . Оттук следва, че резултат 115 е реализуем, но резултати 114 и 113 не са. По подобен начин заключаваме, че не може да се реализира и резултат 109. Следователно възможните резултати от 1 до 120 включително са общо $120 - (3 + 2 + 1) = 114$. Възможни са също всички резултати от -30 до 0 включително (те са общо 31). Получаваме $114 + 31 = 145$ и тогава участниците трябва да са най-малко 146, за да е сигурно, че поне двама от тях ще бъдат оценени с равен брой точки.

Задача 48.

Ако страната на ромба е x , то от $\triangle PAD$ (правоъгълен триъгълник с ъгъл 30°) следва, че височината на ромба е $\frac{x}{2}$. Тогава лицето на ромба е $\frac{x \cdot x}{2} = 32$, откъдето $x = 8$ см. Нека $PH \perp DQ$ (H принадлежи на правата DQ). Триъгълник HPD е правоъгълен с ъгъл 30° . Следователно търсенето разстояние е $\frac{1}{2}$ от височината на ромба, т.е. 2 см.

Задача 49.

Четириъгълникът от условието на задачата е успоредник. До този извод може да се стигне по следния начин. Нека O е пресечната точка на диагоналите. Тогава с допускане на противното заключаваме, че $BO = OD$, защото ако това не е така, то върху BD може да се намери точка M така, че $BO = OM$. Но тогава $ABCM$ е успоредник (диагоналите в него взаимно се разполовяват) и следователно $\angle ABC = \angle AMC$. Заключаваме, че $\angle AMC = \angle ADC$, което лесно се вижда, че е невъзможно (като използваме, че външният ъгъл в триъгълника е винаги по-голям от кой да е несъседен нему вътрешен ъгъл). След като четириъгълникът $ABCD$ е успоредник, периметърът му е равен на $2(AB + BC) = 32$ см.

Задача 50.

Сборът на всички числа е 70. От условието следва, че сборът на изтритите числа се дели на 4. Понеже 70 се дели на 2, то и оставащото (това, което не е изтрито) число трябва да се дели на 2. От друга страна обаче 70 не се дели на 4 и значи оставащото число също не трябва да се дели на 4. Единственото число измежду написаните, което се дели на 2, но не се дели на 4, е 6. Следователно отговорът на задачата е 6. Възможността за реализация е единствена: Симеон изтрива числата 1, 3, 4 и 8, а Георги – съответно 9, 11, 12 и 16.