**<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА</u>**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**МАТЕМАТИКА**

**30.05.2012 Г. – <u>ВАРИАНТ 1</u>**

*<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>*

**1. Изразът с най-малка стойност е:**

**А)** 15% от $\frac{14}{5}$ **Б)** 3% от 15 **В)** 20% от 2,5 **Г)** 0,2% от 250

**2. Числената стойност на израза** $\sqrt{(-8)^2}+\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^2}-3^{\frac{1}{2}}$ **е:**

**А)** $6+\sqrt{2}-2\sqrt{3}$ **Б)** $-\sqrt{2}$ **В)** $6-\sqrt{2}$ **Г)** $10-\sqrt{2}$

**3. Допустимите стойности на израза** $\frac{\sqrt{x-1}}{x-2}$ **са:**

**А)** $x\in[1;+\infty)$ **Б)** $x\in(1;2)\cup(2;+\infty)$

**В)** $x\in[1;2)\cup(2;+\infty)$ **Г)** $x\in(-\infty;2)\cup(2;+\infty)$

**4. Решенията на неравенството** $\frac{(x+1)(x+3)}{(x+1)(x-3)}<0$ **са:**

**А)** $(-3;3)$ **Б)** $x\in(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$

**В)** $x\in(-\infty;-3)\cup(-1;3)$ **Г)** $x\in(-3;-1)\cup(-1;3)$

**5. Стойността на израза** $\log_{\frac{1}{3}}81-\log_2\frac{1}{8}+\lg 1$ **е равна на:**

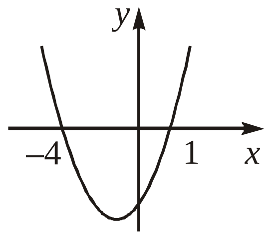
**А)** –8 **Б)** –7 **В)** –1 **Г)** 7

**6. Ако** $x_1$ **и** $x_2$ **са корените на уравнението** $2x^2-4x-5=0$**, то за израза** $a=x_1x_2\left(x_1+x_2\right)$ **е вярно, че:**

**А)** $a<0$ **Б)** $a=0$

**В)** $a>0$ **Г)** $a\geq 0$

**7. На чертежа е представена графиката на функцията:**



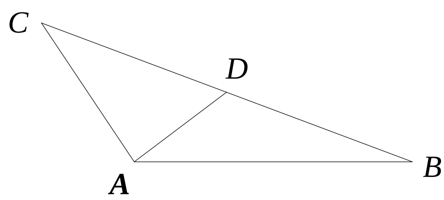

**А)** $y=x^2-3x-4$ **Б)** $y=-x^2-3x+4$

**В)** $y=x^2+3x-4$ **Г)** $y=x^2-3x+4$

**8. Ако** $x\in\left[\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right]$**, то стойностите на функцията** $f(x)=\cos x$ **са в интервала:**

**А)** $\left(-\dfrac{1}{2};0\right)$ **Б)** $[-1;0)$ **В)** $(-1;0)$ **Г)** $[0\,;1]$

**9. На чертежа за** $\triangle ABC$ **е дадено** $AB=6\,\text{cm}$**,** $BC=8\,\text{cm}$ **и** $\angle BAD=\angle ACB$**. Дължината на отсечката** $BD$ **е равна на:**




**А)** $6\,\text{cm}$ **Б)** $4,5\,\text{cm}$

**В)** $4\,\text{cm}$ **Г)** $3,5\,\text{cm}$

**10. Катетите на правоъгълен триъгълник са с дължини** 6 cm **и** 10 cm**. Радиусът на описаната около триъгълника окръжност е:**

**А)** 4 cm **Б)** 5cm **В)** $\dfrac{\sqrt{126}}{2}\,\text{cm}$ **Г)** $\sqrt{34}\,\text{cm}$

**11. Решенията на системата** $\left|\begin{array}{l} x^2-y=-1 \\ y^2+2x^2=13 \end{array}\right.$ **са:**

**А)** $(-6;-5)$ **и** $(2;3)$ **Б)** $(2;3)$

**В)** $\left(-\sqrt{2};3\right)$ **и** $\left(\sqrt{2};3\right)$ **Г)** $\left(-\sqrt{6};-5\right)$ **и** $\left(\sqrt{6};-5\right)$

**12. Дадена е редица с общ член** $a_n=\left(2^n\right)^n$, $n\in\mathbb{N}$**. Ако числото** $2^8:2^{-8}$ **е член на същата редица, то номерът му** $n$ **е равен на:**

**А)** 2 **Б)** 4 **В)** 8 **Г)** 16

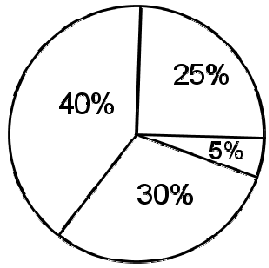
**13. Броят на членовете на крайната аритметична прогресия** $3;\ 7;\ldots;151$ **е:**

**А)** 36 **Б)** 38 **В)** 48 **Г)** 50

**14. Ако** $C_n^2 = C_5^3$**, то** $n$ **е равно на:**

**А)** $-5$  **Б)** $-4$  **В)** $4$  **Г)** $5$

**15. На изпит по химия** $25\%$ **от явилите се ученици имат оценка** ***отличен,*** $40\%$ **– оценка** ***много добър,*** $30\%$ **– оценка** ***добър*** **и** $5\%$ **– оценка** ***среден*****. Дъгата на сектора, отговарящ на оценка** ***добър*****, е с мярка:**

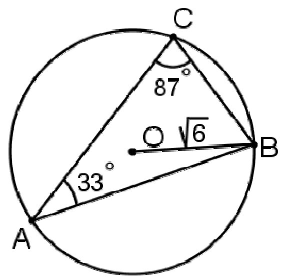



**А)** $18°$  **Б)** $90°$  **В)** $108°$  **Г)** $144°$

**16. Даден е** $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 4\,\text{cm}$, $BC = 2\sqrt{3}$ cm **и** $AC = 2\sqrt{13}\,\text{cm}$**. Мярката на** $\angle ABC$ **е равна на:**

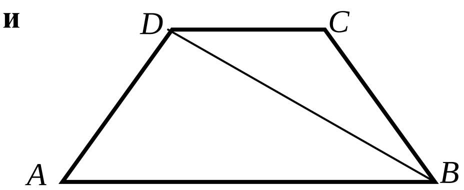
**А)** $150°$  **Б)** $120°$  **В)** $60°$  **Г)** $30°$

**17. За** $\triangle ABC$ **на чертежа** $\angle BAC = 33°$**,** $\angle ACB = 87°$ **и радиусът на описаната около триъгълника окръжност е** $\sqrt{6}$**. Страната** $AC$ **е равна на:**




**А)** $\sqrt{6}$  **Б)** $\dfrac{\sqrt{2}}{8}$  **В)** $2\sqrt{3}$  **Г)** $3\sqrt{2}$

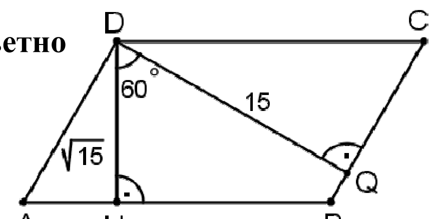
**18. В равнобедрен трапец диагоналът има дължина** $6\sqrt{3}\,\text{cm}$ **и сключва с голямата основа ъгъл** $30°$**. Лицето на трапеца е:**




**А)** $27\sqrt{3}\,\text{cm}^2$  **Б)** $18\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

**В)** $9\sqrt{3}\,\text{cm}^2$  **Г)** $4{,}5\sqrt{3}\,\text{cm}^2$

**19. В успоредника** $ABCD$ **височините** $DH$ **и** $DQ$ **са съответно** $\sqrt{15}$ **и** $15$**. Ако** $\angle HDQ = 60°$**, то лицето на успоредника е:**

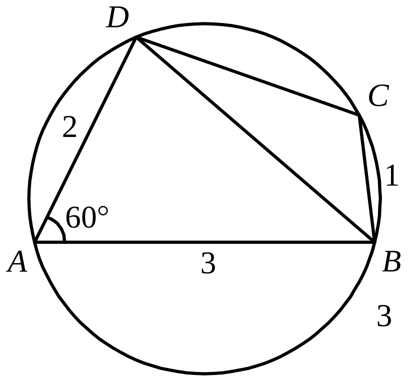



**А)** $10\sqrt{3}$  **Б)** $15\sqrt{5}$

**В)** $30\sqrt{5}$  **Г)** $150\sqrt{3}$

**20. Четириъгълникът** $ABCD$ **е вписан в окръжност. Ако** $AB = 3,\ AD = 2,\ BC = 1$ **и** $\angle BAD = 60°$**, то страната** $CD$ **е равна на:**

**А)** $\sqrt{7}$  **Б)** $\sqrt{5}$  **В)** $2$  **Г)** $1{,}5$



*Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!*

**21. Намерете числата $k$ , за които** $\left(3^k\right)^k\left(\frac{1}{3}\right)^k=1.$

**22. Намерете корените на уравнението** $\frac{x+4}{x+2}-\frac{3}{x+4}=\frac{6}{x^2+6x+8}$ .

**23. Колко различни петцифрени числа, които са с различни цифри, могат да се запишат с цифрите** $0, 3, 5, 7$ **и** $9$**?**

**24. При записване на всичките** $17$ **данни от проведен експеримент се оказало, че числата в подредения статистически ред образуват геометрична прогресия, като най-малкото от тях е** $0,03125=2^{-5}$**, а най-голямото е** $2048=2^{11}$**. Намерете медианата на тази извадка.**

**25. Даден е** $\triangle ABC$**, за който** $\angle CAB+\angle CBA=90°$**. Ако** $BC=\frac{16}{3}\text{cm}$ **и** $\cos\angle ABC=\frac{8}{17}$ **, да се намери лицето на триъгълника.**

*Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!*

**26. Да се реши системата** $\left|\begin{array}{l} xy+3y^2+x+14y+11=0 \\ 2xy+y^2+2x-2y-3=0 \end{array}\right.$ **.**

**27. С цифрите** $0,1,4,5,6,7$ **и** $8$ **са записани всички четирицифрени числа, които се делят на** $5$**, като в записа им няма повтарящи се цифри. Каква е вероятността едно произволно избрано от тях число да се дели на** $9$**?**

**28. Даден е ромб** $ABCD$**, в който** $\angle DAB<\angle ADC$**. Точките** $M$ **и** $N$ **са съответно средите на страните** $BC$ **и** $CD$**. Ако** $MN=3\text{ cm}$ **и радиусът на описаната окръжност около** $\triangle AMN$ **е равен на** $\frac{7\sqrt{3}}{3}$**, да се намерят страната и ъглите на ромба.**

# ФОРМУЛИ

## Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

## Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

## Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m}$, $a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

## Комбинаторика

Брой на пермутациите на $n$ елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на $n$ елемента $k$-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на $n$ елемента $k$-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието $A$:

$$p(A)=\frac{\text{брой на благоприятните случаи}}{\text{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

## Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, $q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

## Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{a}{b}$ $\mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

## Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

## Тригонометрични функции

| $\alpha°$ | 0° | 30° | 45° | 60° | 90° |
|---|---|---|---|---|---|
| $\alpha$ rad | 0 | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
| $\sin\alpha$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | 1 |
| $\cos\alpha$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | 0 |
| $\mathrm{tg}\,\alpha$ | 0 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 1 | $\sqrt{3}$ | – |
| $\mathrm{cotg}\,\alpha$ | – | $\sqrt{3}$ | 1 | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | 0 |

| | $-\alpha$ | $90^\circ-\alpha$ | $90^\circ+\alpha$ | $180^\circ-\alpha$ |
|---|---|---|---|---|
| sin | $-\sin\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ |
| cos | $\cos\alpha$ | $\sin\alpha$ | $-\sin\alpha$ | $-\cos\alpha$ |
| tg | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $\operatorname{cotg}\alpha$ | $-\operatorname{cotg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ |
| cotg | $-\operatorname{cotg}\alpha$ | $\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{tg}\alpha$ | $-\operatorname{cotg}\alpha$ |

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

**МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА**

**ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО**

**Математика – 30 май 2012 г.**

**ВАРИАНТ 1**
**Ключ с верните отговори**

**Въпроси с изборен отговор**

| Въпрос № | Верен отговор | Брой точки |
|---|---|---|
| **1** | **А** | 2 |
| **2** | **В** | 2 |
| **3** | **В** | 2 |
| **4** | **Г** | 2 |
| **5** | **В** | 2 |
| **6** | **А** | 2 |
| **7** | **В** | 2 |
| **8** | **Г** | 2 |
| **9** | **Б** | 2 |
| **10** | **Г** | 2 |
| **11** | **В** | 3 |
| **12** | **Б** | 3 |
| **13** | **Б** | 3 |
| **14** | **Г** | 3 |
| **15** | **В** | 3 |
| **16** | **А** | 3 |
| **17** | **Г** | 3 |
| **18** | **А** | 3 |
| **19** | **В** | 3 |
| **20** | **В** | 3 |
| **21** | $0$ **или** $1$ | 4 |
| **22** | $x=-1$ | 4 |
| **23** | $96$ | 4 |
| **24** | $8$ | 4 |
| **25** | $S_{ABC}=\frac{80}{3}\text{cm}^2$ | 4 |
| **26** | $(4;-5)$ и $(x;-1), x\in\mathbb{R}$ | 10 |
| **27** | $P=\frac{22}{220}=\frac{1}{10}$ | 10 |
| **28** | $AB=6$ cm; $60^\circ$ и $120^\circ$ | 10 |

**Въпроси с решения**

**26. Критерии за оценяване на задача 26**

1. ( 3 точки) Еквивалентни преобразувания на дадената система –

$$\begin{vmatrix} xy+3y^2+x+14y+11=0 \\ 2xy+y^2+2x-2y-3=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} -2xy-6y^2-2x-28y-22=0 \\ 2xy+y^2+2x-2y-3=0 \end{vmatrix}.$$

След почленно събиране на двете уравнения се получава уравнението $y^2+6y+5=0$.

2. ( 2 точки) Решаване на уравнението $y^2+6y+5=0$ и намиране на корените $y_1=-1$ и $y_2=-5$.

3. ( 2 точки) Решаване на системата $\begin{vmatrix} y=-1 \\ -x+3+x-14+11=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=-1 \\ 0.x=0 \end{vmatrix}$, откъдето решенията са $(x;-1), x\in\mathbb{R}$.

4. ( 2 точки) Решаване на системата $\begin{vmatrix} y=-5 \\ -5x+75+x-70+11=0 \end{vmatrix} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} y=-5 \\ -4.x=-16 \end{vmatrix}$, откъдето решението е $(4;-5)$.

5. ( 1 точка) Отговор $(4;-5)$ и $(x;-1), x\in\mathbb{R}$.

**27. Критерии за оценяване на задача 27.**

1. ( 1 точка) Определяне броя на четирицифрените числа, завършващи на нула – $V_6^3=120$.

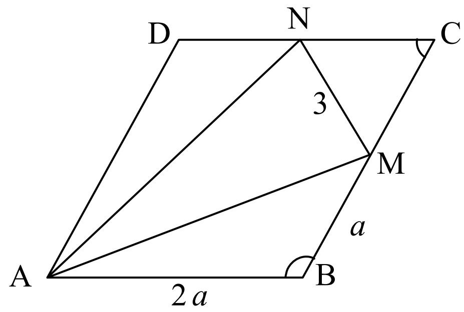
2. ( 2 точки) Определяне броя на четирицифрените числа, завършващи на пет – $V_6^3 - V_5^2 = 100$.

3. ( 1 точка) Определяне броя на четирицифрените числа, кратни на пет – $100+120=220$.

4. ( 2 точки) Определяне на броя на кратните на 9 четирицифрени числа с цифра на единиците 0. Той е сборът от пермутацията на 2 тройки цифри $5,6,7$ и $4,6,8$, т.е. броят е $2.P_3=12$.

5. ( 3 точки)  Определяне на броя на кратните на 9 четирицифрени числа, с  цифра на единиците 5. Той се пресмята с помощта на пермутациите на 2 тройки цифри $0,6,7$ и $1,4,8$ , т.е. броят е $2.P_3 - P_2 = 10$ **.**

6**.(**1 точка) Намиране на търсената вероятност $P = \frac{22}{220} = \frac{1}{10}$.




**28. Критерии за оценяване на задача 28**

1. ( 1 точка) Прилагане на синусова теорема за $\triangle AMN$

и намиране на $\sin\angle NAM = \frac{3\sqrt{3}}{14}$.

2.(1 точка) $\alpha < 90° \Rightarrow \angle NAM < 90°$.

3. ( 1 точка)  Намиране на $\cos\angle NAM = \frac{13}{14}$.

4. ( 1 точка) Доказване  на $AN = AM$.

5. ( 1 точкА**)** Прилагане на косинусовата теорема за $\triangle AMN$ и намиране на $AM = AN = 3\sqrt{7}$.

6. ( 1 точка) Нека $AB = 2a$ и $\angle DAB = \alpha$. Прилагане на косинусовата теорема за $\triangle ABM$.

7. ( 1 точка) Прилагане на косинусовата теорема за $\triangle MCN$.

8. ( 1 точка) Съставяне на системата $\left|\begin{array}{l} 63 = 5a^2 + 4a^2\cos\alpha \\ 9 = 2a^2 - 2a^2.\cos\alpha \end{array}\right.$.

9. ( 1 точка) Намиране на страната на ромба $AB = a = 6$ cm.

10.(1 точка) Намиране на ъглите на ромба $60°$ и $120°$.