<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

29.05.2012 Г. – <u>ВАРИАНТ 2</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1 . Кое от посочените числа е по-голямо от 1?

А) $\left(-\frac{1}{2}\right)^{-3}$ **Б)** 2^{-3} **В)** $(-2)^0$ **Г)** $\left(\sqrt{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

2. Стойността на израза $\sqrt[4]{(-9)^2}+\sqrt[3]{-27}+\sqrt{(-2)^2}$ **е:**

А) -8 **Б)** -4 **В)** 2 **Г)** 4

3. Допустимите стойности на израза $\frac{\sqrt{3}}{x\sqrt{5-x}}$ **са:**

А) $x\neq 0$ и $x>5$ **Б)** $x\neq 0$ и $x\neq 5$ **В)** $x\neq 0$ и $x<5$ **Г)** $x\neq 0$ и $x\leq 5$

4. Решенията на неравенството $\frac{9-x^2}{x}\leq 0$ **са:**

А) $x\in[-3;0)\cup[3;+\infty)$ **Б)** $x\in[-3;3]$

В) $x\in(-\infty;-3]\cup(0;3]$ **Г)** $x\in(3;+\infty)$

5. Равенството $2^{\log_2 x}=x^2$ **е вярно:**

А) само за $x=-1$ **Б) само за** $x=0$

В) само за $x=1$ **Г) за** $x=0$ **и за** $x=1$

6. Кое от уравненията има два отрицателни корена?

А) $2x^2+7x+8=0$ **Б)** $2x^2-8x-7=0$

В) $-2x^2-8x-7=0$ **Г)** $-2x^2+8x-7=0$

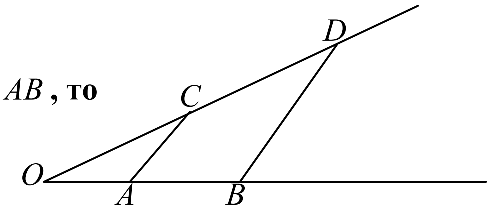
7. Броят на реалните корени на уравнението $x^4+2x^2-5=0$ **е:**

А) 0 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 4

8. Стойността на израза $\sin\alpha-\cos 2\alpha+tg\dfrac{\alpha}{2}-\cot g\dfrac{\alpha}{3}$ **при** $\alpha=90^\circ$ **е:**

А) е $1-\sqrt{3}$ **Б) е** $3-\sqrt{3}$ **В) е** $3+\sqrt{3}$ **Г) не съществува**

9. На чертежа $AC \parallel BD$. **Ако** $OA=4\sqrt{2}, CD=8\sqrt{2}$ **и** $OC=AB$**, то отсечката** AB **е :**

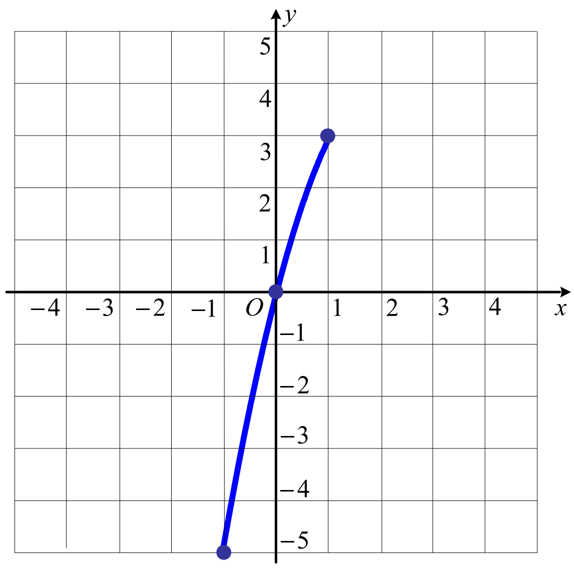


А) 4 **Б)** $4\sqrt{2}$ **В)** 8 **Г) невъзможно да се определи**

10. В $\triangle ABC$ $\angle A=50^\circ$**, а** $\operatorname{tg}\angle B=\sqrt{3}$**. Мярката на** $\angle C$ **е равна на:**

А) 10° **Б)** 60° **В)** 70° **Г)** 110°

11. На фигурата е дадена част от графиката на квадратна функция. Абсцисата на втората пресечна точка на параболата с оста ***Ox*****:**



А) е $x=2$ **;**

Б) е $x=3$ **;**

В) е $x=4$ **;**

Г) не може да се определи.

12. Дадена е числова редица с общ член $a_n=n^2-n,\ n\in\mathbb{N}$**. Ако числото** 42 **е член на редицата, то номерът му** n **е равен на:**

А) 5 **Б)** 6 **В)** 7 **Г)** 14

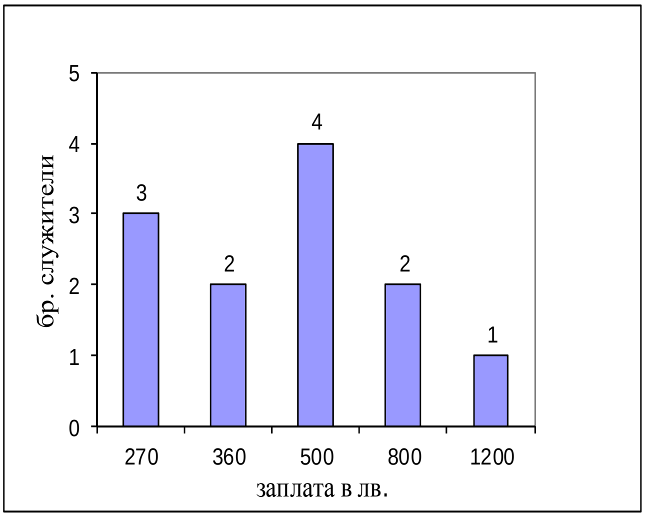
13. Ако за аритметична прогресия $a_7=43$ **и** $a_{12}=33$**, то разликата на прогресията е равна на:**

А) -2 **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{2}$ **Г)** 2

14. За 2 вакантни места по математика и 3 по химия в едно училище кандидатстват 5 учители по математика и 6 по химия. По колко различни начина е възможно да се попълнят вакантните места?

А 150 **Б)** 200 **В)** 240 **Г)** 300

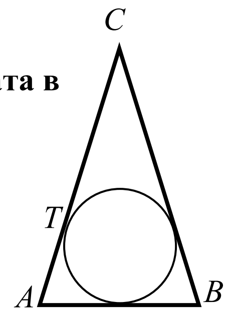
15. На диаграмата са дадени заплатите и съответният брой на служителите в една фирма. С колко лева модата на съответния статистически ред се различава от средната заплата на служителите?



А) $272,50$ **Б)** $227,50$

В) $72,50$ **Г)** $27,50$

16. За начертания равнобедрен $\triangle ABC$ $AC = BC = b$, а $\angle BAC = 2\alpha$. Вписаната в $\triangle ABC$ окръжност се допира до AC в точка T. Отсечката CT е равна на:



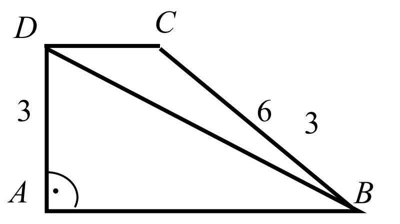
А) $b\sin 2\alpha$ **Б)** $2b\sin^2\alpha$ **В)** $2b\cos^2\alpha$ **Г)** $b\cos 2\alpha$

17. Четириъгълникът $ABCD$ е вписан в окръжност. Ако $AC = \sqrt{21}$ cm, $DC = 5$ cm и $AD = 4$ cm, $\angle ABC$ е равен на:

А) 150° **Б)** 120° **В)** 60° **Г)** 30°

18. Даден е ромб с диагонали a и b. Лицето на четириъгълника, чиито върхове са средите на страните на ромба, е:

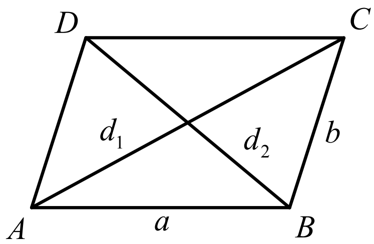
А) $\frac{\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2}{2}$ **Б)** $\frac{a^2+b^2}{4}$ **В)** $\frac{ab}{4}$ **Г)** $\frac{ab}{2}$



19. Даден е правоъгълен трапец $ABCD$ с бедра $AD = 3$ cm и $BC = 6$ cm. Отношението на радиусите на окръжностите, описани съответно около $\triangle ABD$ и $\triangle BCD$, е равно на:

А) $\frac{1}{2}$ **Б)** $\frac{\sqrt{3}}{2}$ **В)** $\frac{2}{\sqrt{3}}$ **Г)** $\frac{2}{1}$

20. За страните a и b и диагоналите d_1 и d_2 на успоредник са в сила равенствата $ab = 2{,}5$ и $d_1^2 + d_2^2 = 26$. Периметърът на успоредника е:



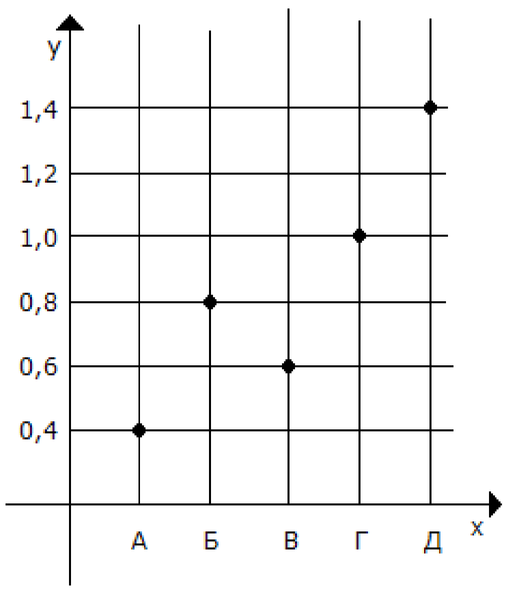
А) $6\sqrt{2}$ **Б)** $3\sqrt{2}$ **В)** 2 **Г)** 1,5

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Намерете стойността на $\cos\alpha$**, ако** $\sin\alpha.\cos\frac{\alpha}{2} - \cos\alpha.\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{3}{4}$ **.**

22. Да се реши уравнението $\sqrt{5 + 4x - x^2} = 2x - 1$**.**

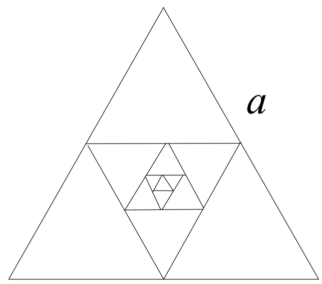
23. В зоопарк има пет вида животни. Дневната дажба на животно от всеки вид е дадена на координатна система, като по оста y е нанесена дневната дажба на животно от съответния вид, а по оста x – отделните видове животни. Наличната бройка животни от всеки вид е дадена в таблицата.



А	Б	В	Г	Д
3	4	2	1	d

Изчислете максималния брой d на животните от вида Д така, че средната дневна дажба на животно в зоопарка да не надвишава 1 kg .

24. Средите на страните на равностранен триъгълник със страна a са върхове на втори триъгълник. Средите на страните на втория триъгълник са върхове на трети триъгълник и т.н., върховете на всеки следващ триъгълник са средите на страните на предходния. Да се изрази чрез a сумата от периметрите на първите пет триъгълника.



25. Бедрото на тъпоъгълен равнобедрен триъгълник е 25 cm, **а височината към него е** 24 cm. **Намерете дължината на основата на триъгълника.**

<u>*Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!*</u>

26. За допустимите стойности на α докажете тъждеството

$$\frac{\cos 5\alpha - \cos 7\alpha + \cos \alpha - \cos 3\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha + \sin 5\alpha - \sin 7\alpha} = \frac{1}{2}\left(\cot g\alpha - tg\alpha\right).$$

27. Дете подрежда по случаен начин точно 5 **фигурки от картон в редица, от ляво надясно. Три от фигурките са квадратни, а две са с форма на кръг. Квадратните се различават една от друга по дължината на страната си, а тези с форма на кръг са с различни радиуси. Намерете броя на начините за подреждане на петте фигурки, ако се започва и завършва с квадратна.**

28. В $\triangle ABC$ с периметър 21 cm **ъглополовящата $CL\left(L \in AB\right)$ е** 6 cm **и $AL : BL = 4 : 3$. Да се намерят дължините на страните на триъгълника.**

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\quad D=b^2-4ac$ $\quad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\quad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\quad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c$, $a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\quad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m}$, $a\neq 0$ $\quad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\quad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b \Leftrightarrow \log_a b=x$ $\quad a^{\log_a b}=b$ $\quad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\quad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\quad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1}$, $q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

$\alpha°$	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+cos\beta=2cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО, МЛАДЕЖТА И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 29 май 2012 г.

ВАРИАНТ 2

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	**Г**	2
2	**В**	2
3	**В**	2
4	**А**	2
5	**В**	2
6	**В**	2
7	**Б**	2
8	**Б**	2
9	**В**	2
10	**В**	2
11	**В**	3
12	**В**	3
13	**А**	3
14	**Б**	3
15	**Г**	3
16	**Б**	3
17	**Б**	3
18	**В**	3
19	**А**	3
20	**А**	3
21	$\cos\alpha = -\frac{1}{8}$	4
22	$x = 2$	4
23	$d = 8$	4
24	$\frac{93}{16}a$	4
25	40	4
26	–	10
27	36	10
28	$AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm и $AC = 8$ cm	10

Въпроси с решения

26. Критерии за оценяване на задача 26.

1.(2 точки) Прилагане на формулите за представяне на разлика от два косинуса в произведение в числителя и за разлика на два синуса в знаменателя и свеждане на лявата страна до израза: $A=\frac{2\sin\alpha\sin 6\alpha+2\sin\alpha\sin 2\alpha}{2\sin\alpha\cos 2\alpha-2\sin\alpha\cos 6\alpha}$.

2. (1 точка) Изнасяне на общ множител от числителя и от знаменателя в израза
$A=\frac{2\sin\alpha(\sin 6\alpha+\sin 2\alpha)}{2\sin\alpha(\cos 2\alpha-\cos 6\alpha)}=\frac{\sin 6\alpha+\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha-\cos 6\alpha}$.

3. (2 точки) Прилагане на формулите за сбор от два синуса и разлика на два косинуса съответно в числителя и знаменателя на израза A и свеждане на числителя и знаменателя до произведения – $A=\frac{2\sin 4\alpha.\cos 2\alpha}{2\sin 4\alpha.\sin 2\alpha}=\frac{\cos 2\alpha}{\sin 2\alpha}$.

4. (2 точки) Прилагане на формулата за удвоен ъгъл и свеждане на израза до:
$A=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}$.

5. (2 точки) Представяне на израза като сбор на две дроби с еднакъв знаменател:
$A=\frac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}-\frac{\sin^2\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha}=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}$.

6. (1 точка) Представяне на израза като израза в дясната страна на тъждеството
$A=\frac{\cos\alpha}{2\sin\alpha}-\frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}=\frac{1}{2}\left(\cot g\alpha-tg\alpha\right)$.

27. Критерии за оценяване на задача 27.

Първи начин:

1.(4 точки) Броят на възможностите за подреждане на трите различни квадратни фигурки е: $n_{pr}=P_3=3.2=6$.

2.(4 точки) Броят на възможностите за подреждане на двете различни кръгли фигурки заедно с едната от трите квадратни фигурки, която е между двете крайни квадратни фигурки, е $n_{kr\,i\,pr}=P_3=3.2=6$.

3.(2 точки) Определяне на общия брой на възможности за подреждане на петте фигурки е $n = n_{pr}.n_{kr\,i\,pr} = 6.6 = 36$.

Втори начин:

1.(3 точки) Преброяването на възможностите при подредба: □ ○ ○ □ □

$n_1 = 3.2.1.2.1 = 12$.

2.(3 точки) Преброяването на възможностите при подредба: □ ○ □ ○ □

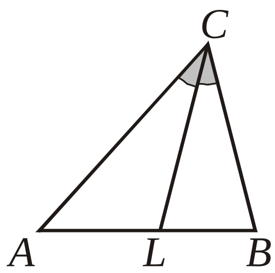
$n_2 = 3.2.2.1.1 = 12$.

3.(3 точки) Преброяването на възможностите при подредба: □□ ○○ □

$n_3 = 3.2.2.1.1 = 12$.

4. (1 точка) Общият брой възможности е $n = n_1 + n_2 + n_3 = 12 + 12 + 12 = 36$.

28. Критерии за оценяване на задача 28



1. (1 точка) Приемаме $AL = 4x$ и $BL = 3x$

2. (1 точка) Прилагаме свойството на ъглополовящата $\frac{AC}{BC} = \frac{AL}{BL} = \frac{4}{3}$

3. (1 точка) Приемаме $AC = 4y$ и $BC = 3y$

4. (1 точка) Изразяваме $P_{ABC} = 7x + 7y \Rightarrow 7x + 7y = 21$

5. (1 точка) Прилагаме формулата за ъглополовящата

$CL^2 = AC.BC - AL.BL \Rightarrow 36 = 12y^2 - 12x^2$

6. (1 точка) Така получаваме системата $\left| \begin{array}{l} 7x + 7y = 21 \\ 12y^2 - 12x^2 = 36 \end{array} \right.$.

7. (2 точки) Последователно получаваме

$\left| \begin{array}{l} 7x + 7y = 21 \\ 12y^2 - 12x^2 = 36 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ (y - x)(y + x) = 3 \end{array} \right. \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x + y = 3 \\ y - x = 1 \end{array} \right.$, откъдето $x = 1$ и $y = 2$

8. (2 точки) Намираме страните $AB = 7$ cm, $BC = 6$ cm и $AC = 8$ cm