<u>МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА</u>

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

МАТЕМАТИКА

20.05.2016 г. – <u>Вариант 1</u>

<u>Отговорите на задачите от 1. до 20. включително отбелязвайте в листа за отговори!</u>

1. Кое от числата е по-голямо от 4**?**

А) $16^{\frac{1}{4}}$ **Б)** $3\sqrt{2}$ **В)** $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}}$ **Г)** $2\sqrt{3}$

2. Стойността на израза $\sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2}+\left(\sqrt{2}+1\right)^2$ **е:**

А) $4-\sqrt{2}$ **Б)** $2+\sqrt{2}$ **В)** $4+\sqrt{2}$ **Г)** $2+3\sqrt{2}$

3. Допустимите стойности на израза $\frac{x^2-9}{x-3}+\frac{x-2}{x^2-4}$ **са:**

А) $x\neq -2$ **Б)** $x\neq 2,\ x\neq 3$ **В)** $x\neq \pm 2$ **Г)** $x\neq \pm 2,\ x\neq 3$

4. Решенията на уравнението $x(3x+1)=3x+1$ **са:**

А) 1 **Б)** -1 **и** 1 **В)** $-\frac{1}{3}$ **и** 1 **Г)** -1 **и** $\frac{1}{3}$

5. Ако $a=\log_3 3^6-\log_2 2+\log_5 1$**, то стойността на израза** $a^{\log_5 25}$ **е равна на:**

А) 25 **Б)** 5 **В)** 2 **Г)** 1

6. Решенията на уравнението $5x^2-4=x^4$ **са:**

А) $1;\ 4$ **Б)** $1;\ 2$ **В)** $\pm\ 2$ **Г)** $\pm 1\ ;\ \pm 2$

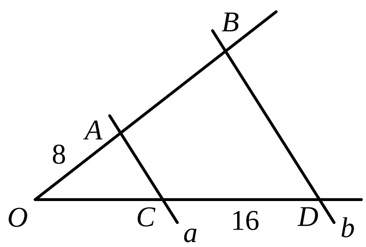
7. Ако x_1 **и** x_2 **са реалните корени на уравнението** $-\frac{1}{5}x+x^2=2$**, то стойността на израза** $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$ **е равна на:**

А) $-\frac{1}{10}$ **Б)** $-\frac{1}{2}$ **В)** $\frac{1}{10}$ **Г)** $\frac{5}{2}$

8. Коя от посочените системи няма решение в множеството на реалните числа?

А) $\begin{vmatrix} x^2+y^2=4 \\ y=3 \end{vmatrix}$ **Б)** $\begin{vmatrix} xy=2 \\ y=x \end{vmatrix}$ **В)** $\begin{vmatrix} y=x^2 \\ y=x+1 \end{vmatrix}$ **Г)** $\begin{vmatrix} xy=-2 \\ x=5 \end{vmatrix}$

9. На чертежа правите a **и** b **са успоредни,** $OA=8$, $CD=16$ **и** $OC:AB=8:9$**. Дължината на отсечката** OB **е:**



А) 12 **Б)** $\frac{56}{3}$ **В)** 20 **Г)** $\frac{80}{3}$

10. Дължините на катетите на правоъгълен $\triangle ABC\ (\sphericalangle ACB=90^\circ)$ **са** 3 **и** 4**. Ако вписаната в триъгълника окръжност се допира до страната** AB **в точка** M**, то** $AM\,.\,MB$ **е равно на:**

А) 0,5 **Б)** 2 **В)** 3 **Г)** 6

11. Координатите на върха на параболата $y=-2x^2+4x-1$ **са:**

А) $(1;1)$ **Б)** $(-1;1)$ **В)** $(-1;-7)$ **Г)** $(1;-1)$

12. Последният член на редицата с общ член $a_n=n(n-7)$**,** $n\in\mathbb{N}$**, е** 60**. Броят** n **на членовете на тази редица е:**

А) 5 **Б)** 12 **В)** 17 **Г)** 60

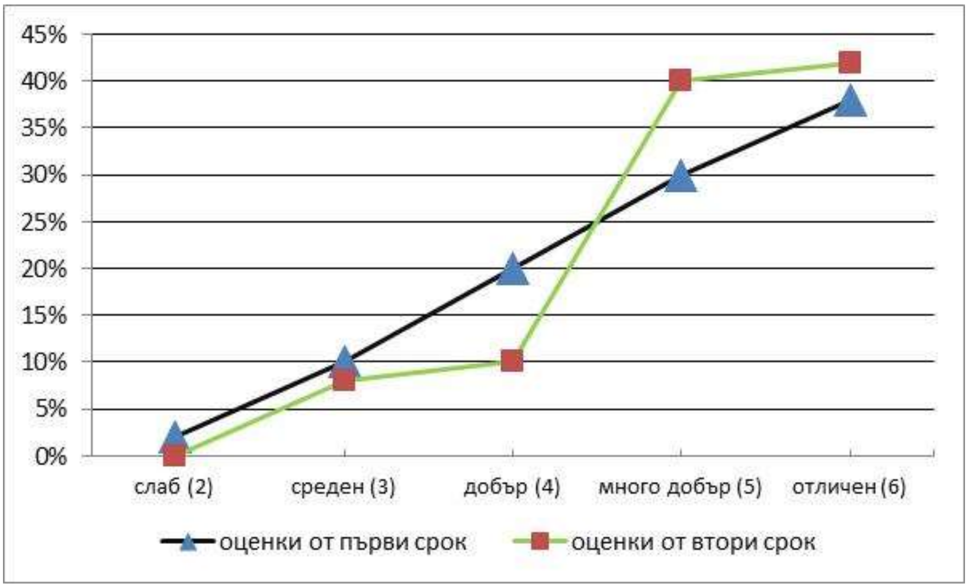
13. За растяща геометрична прогресия с първи член, равен на 1**, е известно, че** $a_1+a_5=5$**. Частното** q **на тази прогресия е равно на:**

А) 2 **Б)** $\sqrt{2}$ **В)** $-\sqrt{2}$ **Г)** -4

14. Стойността на израза $\sin 150° - \cos 240° + tg(-45°)$ **е:**

А) 2 **Б)** 0 **В)** $-\frac{1}{2}$ **Г)** – 1

15. На диаграмата е дадено процентното разпределение на оценките на ученици в края на първия и в края на втория срок. Броят на учениците и през двата срока е 150**. Колко ученици повече са получили оценка „много добър (5)“ в края на втория срок в сравнение с първия учебен срок?**



А) 15 **Б)** 10 **В)** 6 **Г)** 4

16. Броят на четните четирицифрени числа с различни цифри, които могат да се запишат само с цифрите 1, 2, 4 **и** 8**, е:**

А) 4 **Б)** 12 **В)** 18 **Г)** 24

17. За $\triangle ABC$ $AC = 3\ cm$, $BC = 3\sqrt{2}\ cm$ **и** $\sphericalangle BAC$ **е два пъти по-голям от** $\sphericalangle ABC$**. Дължината на радиуса на описаната окръжност около** $\triangle ABC$ **е:**

А) $1{,}5\ cm$ **Б)** $\frac{3\sqrt{2}}{4}\ cm$ **В)** $\frac{3\sqrt{2}}{2}\ cm$ **Г)** $3\sqrt{2}\ cm$

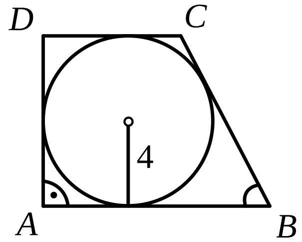
18. В триъгълник с ъгъл $120°$ **дължината на най-голямата страна е** 7**, а разликата на другите две страни е** 2**. Намерете дължината най-малката страна на триъгълника.**

А) 3 **Б)** 4 **В)** 5 **Г)** 7

19. Страните AB **и** AD **на успоредника** $ABCD$ **имат съответно дължини** $3\ cm$ **и** 5 cm**. Диагоналът** $BD = 4\sqrt{2}\,cm$**. Дължината на другия диагонал на успоредника е:**

А) $4\sqrt{2}\ cm$ **Б)** $6\ cm$ **В)** $2\sqrt{13}\ cm$ **Г)** $12\ cm$

20. В правоъгълен трапец $ABCD$ **с** $\sphericalangle BAD = 90^\circ$ **е вписана окръжност с радиус** $r = 4$**. Ако** $\sin\sphericalangle ABC = 0{,}8$**, то лицето на трапеца е равно на:**



А) 36 **Б)** 72 **В)** $72\sqrt{2}$ **Г)** 144

<u>Отговорите на задачите от 21. до 25. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

21. Намерете стойността на израза $\dfrac{\sin\alpha.\cos\alpha}{\sin^2\alpha - \cos^2\alpha}$**, ако** $tg\alpha = 4$**.**

22. Решете неравенството $x^3 > \dfrac{81}{x}$**.**

23. Запишете числото x**, за което е изпълнено равенството** $5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} + 7\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2x} = 6$.

24. През последните няколко последователни вечери на месец април температурите, измерени в градуси, са били следните 2; 3; 2; 4; 17; 16; 17; 17; 14; 14; 15**. Намерете стойността на израза** $2P + M + S$**, където** P **е медианата,** M **е модата, а** S **е средната стойност на статистическия ред.**

25. Намерете лицето на остроъгълен $\triangle ABC$ **със страни** $AB = 8\ cm$**,** $BC = 7\ cm$ **и** $\sphericalangle BAC = 60^\circ$**.**

<u>Пълните решения с необходимите обосновки на задачите от 26. до 28. включително запишете в свитъка за свободните отговори!</u>

26. Да се реши уравнението: $\sqrt{\dfrac{16x}{x-1}} + \sqrt{\dfrac{x-1}{16x}} = \dfrac{5}{2}$**.**

27. Три числа, чийто сбор е 21, са последователни членове на растяща геометрична прогресия. Ако първото число не се промени, към второто число се прибави 1, а от третото се извади 1, ще се получат първите три члена на крайна аритметична прогресия, чиято сума е 55. Намерете броя на членовете на получената аритметична прогресия.

28. Около четириъгълника $ABCD$ е описана окръжност. Страните BC и CD са съответно $8\ cm$ и $4\ cm$, а диагоналът BD е $4\sqrt{7}\ cm$. Ако в четириъгълника може да се впише окръжност, намерете лицето на четириъгълника, радиуса на описаната окръжност и радиуса на вписаната окръжност.

ФОРМУЛИ

Квадратно уравнение

$ax^2+bx+c=0$, $a\neq 0$ $\qquad D=b^2-4ac$ $\qquad x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$ при $D\geq 0$

$ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$ $\qquad$ Формули на Виет: $x_1+x_2=-\dfrac{b}{a}$ $\qquad x_1x_2=\dfrac{c}{a}$

Квадратна функция

Графиката на $y=ax^2+bx+c,\ a\neq 0$ е парабола с връх точката $\left(-\dfrac{b}{2a};-\dfrac{D}{4a}\right)$

Корен. Степен и логаритъм

$\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|$ $\qquad \sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a$ при $k\in\mathbb{N}$

$\dfrac{1}{a^m}=a^{-m},\ a\neq 0$ $\qquad \sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}$ $\quad \sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $\qquad \sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$ при $a\geq 0, k\geq 2, n\geq 2$ и $m,n,k\in\mathbb{N}$

$a^x=b\Leftrightarrow \log_a b=x$ $\qquad a^{\log_a b}=b$ $\qquad \log_a a^x=x$ при $a>0, b>0$ и $a\neq 1$

Комбинаторика

Брой на пермутациите на n елемента: $P_n=n.(n-1)...3.2.1=n!$

Брой на вариациите на n елемента k-ти клас: $V_n^k=n.(n-1)...(n-k+1)$

Брой на комбинациите на n елемента k-ти клас: $C_n^k=\dfrac{V_n^k}{P_k}=\dfrac{n.(n-1)...(n-k+1)}{k.(k-1)...3.2.1}$

Вероятност за настъпване на събитието A:

$$p(A)=\frac{\textit{брой на благоприятните случаи}}{\textit{брой на възможните случаи}},\quad 0\leq p(A)\leq 1$$

Прогресии

Аритметична прогресия: $a_n=a_1+(n-1)d$ $\qquad S_n=\dfrac{a_1+a_n}{2}\cdot n=\dfrac{2a_1+(n-1)d}{2}\cdot n$

Геометрична прогресия: $a_n=a_1.q^{n-1}$ $\qquad S_n=a_1\cdot\dfrac{q^n-1}{q-1},\ q\neq 1$

Формула за сложна лихва: $K_n=K.q^n=K.\left(1+\dfrac{p}{100}\right)^n$

Зависимости в триъгълник и успоредник

Правоъгълен триъгълник: $c^2 = a^2 + b^2$ $S = \frac{1}{2}ab = \frac{1}{2}ch_c$ $a^2 = a_1 c$ $b^2 = b_1 c$

$h_c{}^2 = a_1 b_1$ $r = \frac{a+b-c}{2}$ $\sin\alpha = \frac{a}{c}$ $\cos\alpha = \frac{b}{c}$ $\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$ $\operatorname{cotg}\alpha = \frac{b}{a}$

Произволен триъгълник:

$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$ $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos\beta$ $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$ $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$

Формула за медиана:

$m_a{}^2 = \frac{1}{4}\left(2b^2 + 2c^2 - a^2\right)$ $m_b{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2c^2 - b^2\right)$ $m_c{}^2 = \frac{1}{4}\left(2a^2 + 2b^2 - c^2\right)$

Формула за ъглополовяща: $\frac{a}{b} = \frac{n}{m}$ $l_c{}^2 = ab - mn$

Формула за диагоналите на успоредник: $d_1^2 + d_2^2 = 2a^2 + 2b^2$

Формули за лице

Триъгълник: $S = \frac{1}{2}ch_c$ $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$S = pr$ $S = \frac{abc}{4R}$

Успоредник: $S = ah_a$ $S = ab\sin\alpha$ Трапец: $S = \frac{a+b}{2}h$

Четириъгълник: $S = \frac{1}{2}d_1 d_2 \sin\varphi$

Описан многоъгълник: $S = pr$

Тригонометрични функции

α°	0°	30°	45°	60°	90°
α rad	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	–
$\operatorname{cotg}\alpha$	–	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

	$-\alpha$	$90^\circ-\alpha$	$90^\circ+\alpha$	$180^\circ-\alpha$
sin	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$
cos	$\cos\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\cos\alpha$
tg	$-\operatorname{tg}\alpha$	$\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$
cotg	$-\operatorname{cotg}\alpha$	$\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{tg}\alpha$	$-\operatorname{cotg}\alpha$

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

$$\operatorname{cotg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{cotg}\alpha\operatorname{cotg}\beta\mp1}{\operatorname{cotg}\beta\pm\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$$

$$\operatorname{cotg}2\alpha=\frac{\operatorname{cotg}^2\alpha-1}{2\operatorname{cotg}\alpha}$$

$$\sin^2\alpha=\frac{1}{2}(1-\cos 2\alpha)$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1}{2}(1+\cos 2\alpha)$$

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1+\cos\alpha=2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\cos(\alpha-\beta)+\cos(\alpha+\beta)\big)$$

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}\big(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)\big)$$

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА

ДЪРЖАВЕН ЗРЕЛОСТЕН ИЗПИТ ПО

Математика – 20 май 2016 г.

ВАРИАНТ 1

Ключ с верните отговори

Въпроси с изборен отговор

Въпрос №	Верен отговор	Брой точки
1	Б	2
2	Г	2
3	Г	2
4	В	2
5	А	2
6	Г	2
7	А	2
8	А	2
9	В	2
10	Г	2
11	А	3
12	Б	3
13	Б	3
14	Б	3
15	А	3
16	В	3
17	В	3
18	А	3
19	Б	3
20	Б	3
21	$\frac{4}{15}$	4
22	$x \in (-3;0) \cup (3;+\infty)$	4

23	$x=\frac{1}{2}$	**4**
24	$56\ \left(P=14, M=17, S=11\right)$	**4**
25	$10\sqrt{3}\ cm^2$	**4**
26	$x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{1}{63}$	**10**
27	5	**10**
28	$S_{ABCD}=32\sqrt{3}\ cm^2,\ r=2\sqrt{3}\ cm,$ $R=\frac{4\sqrt{21}}{3}\ cm$	**10**

Въпроси с решения

26. Решение и критерии за оценяване.

1. Полагане $\sqrt{\frac{16x}{x-1}}=t,\ t>0$ **(2 точки).**

2. Получаване на уравнението $t+\frac{1}{t}=\frac{5}{2}$ **(1 точка).**

3. Намиране на $t_1=2, t_2=\frac{1}{2}$ **(1 точка).**

4. Решаване на уравнението $\sqrt{\frac{16x}{x-1}}=2$ и получаване на $x_1=-\frac{1}{3}$ **(2 точки) .**

5. Решаване на уравнението $\sqrt{\frac{16x}{x-1}}=\frac{1}{2}$ и получаване на $x_2=-\frac{1}{63}$ **(2 точки).**

6. Установяване, че x_1 *и* x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности**. (2 точки)**

II начин. Повдигане на квадрат и получаване на уравнението $\frac{16x}{x-1}+\frac{x-1}{16x}=\frac{17}{4}$ **(2 точки),** като $x\neq 0,\ x\neq 1$ **(1 точка).**

Освобождаване от знаменател и получаване на уравнението $189x^2+66x+1=0$ **(3 точки).**

Намиране на корените на уравнението $x_1=-\frac{1}{3},\ x_2=-\frac{1}{63}$ **(2 точки).**

Установяване, че x_1 $и$ x_2 са решения – чрез проверка или определяне на допустими стойности**. (2 точки)**

27. Решение и критерии за оценяване.

Определяне на геометричната прогресия $a_1,\ a_1q,\ a_1q^2$

Определяне на аритметичната прогресия $a_1,\ a_1q+1,\ a_1q^2-1$

$$\left|\begin{array}{l} a_1+a_1q+1+a_1q^2=21 \\ 2\left(a_1q+1\right)=a_1+a_1q^2-1 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{l} a_1\left(1+q+q^2\right)=21 \\ a_1\left(2q-1-q^2\right)=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \frac{a_1\left(1+q+q^2\right)}{a_1\left(2q-1-q^2\right)}=\frac{21}{-3} \Rightarrow$$

$$\frac{1+q+q^2}{2q-1-q^2}=-7 \quad DC_q \quad q\neq 1 \Rightarrow 6q^2-15q+6=0 \Rightarrow 2q^2-5q+2=0$$

$$q_{1,2}=\frac{5\pm 3}{4} \quad q_1=2 \quad q_1=\frac{1}{2}$$

Геометричната прогресия е растяща $\Rightarrow q=2$ и $a_1=3$**.**

Геометричната прогресия е **3, 6, 12**, аритметичната прогресия е **3, 7, 11.**

За аритметичната прогресия $a_1=3, d=4, S_n=55$ и $S_n=\frac{2a_1+\left(n-1\right)d}{2}$,

$55=\frac{2.3+\left(n-1\right)4}{2}n$, $4n^2+2n-110=0$, $2n^2+n-55=0$, $n_{1,2}=\frac{-1\pm 21}{4}$, $n_1=5\in\mathbb{N}$ и $n_2=-\frac{11}{2}\notin\mathbb{N}$. Тогава броят на членовете на аритметичната прогресия е $n=5$**.**

Критерии за оценяване:

1. Означаване на членовете на аритметичната и геометричната прогресия – **1 точка**
2. Съставяне на системата **– 2 точки.**
3. Решаване на системата и определяне на частното **– 4 точки.**
4. Определяне на членовете на аритметичната прогресия **– 1 точка.**
5. Съставяне на уравнение за определяне на броя на членовете и определяне на броя им**– 2 точки.**

28. Решение и критерии за оценяване.

Прилагане на косинусова теорема за $\triangle BCD$ и определяне на $\sphericalangle BCD=120^\circ$**(2 точки).**

Използване на свойството на страните на описания четириъгълник и определяне зависимостта $AD=x,\ x>0,\ AB=x+4$ **(1 точка).**

За срещуположните ъгли на вписания четириъгълник $\sphericalangle A=60^\circ$ **(1 точка).**

След косинусова теорема за $\triangle ABD$ и решаване на квадратното уравнение $x^2+4x-96=0$, $x_1=8$ и $x_2=-12$ и извод, че само $x_1=8$ е решение **(2 точки).**

Намиране на лицето на четириъгълника $S_{ABCD}=S_{\triangle ABD}+S_{\triangle BCD} \Rightarrow$

$S_{\triangle ABCD}=\frac{1}{2}.4.8.\sin 120°+\frac{1}{2}.8.12.\sin 60°$ **;** $S_{ABCD}=32\sqrt{3}\ cm^2$ **(2 точки).**

Определяне на радиуса на вписаната окръжност от $S=p.r$**,** $r=2\sqrt{3}\ cm$ **(1 точка).**

Определяне на радиуса на описаната окръжност чрез синусова теорема за $\triangle ABD$, откъдето $2R=\frac{4\sqrt{7}}{\sin 60°}$ и $R=\frac{4\sqrt{21}}{3}\ cm$ **(1 точка).**